

结构简化计算原理 及其应用

刘开国 著



科学出版社

1996

序

工程师们对结构的简化计算总是特别感兴趣。由于数学上的困难,纯解析的理论分析方法所解决的问题十分有限,而各种纯数值方法(有限元、有限差分法等)又基于全离散原理,对大型结构问题输入数据及计算工作量大,对计算机要求高,费用可观。因此,结构简化计算的研究,即使在有了电子计算机这一有力的分析工具的今天,依然十分必要。

我国科技界一直十分重视结构理论的研究。50年代,已故著名结构学者、中国科学院院士蔡方荫教授主持《土木工程学报》,带动了一批中青年科技工作者,开展刚构分析的理论研究和学术讨论。作者有幸参与了刚构分析的研究和讨论,并在恩师蔡方荫教授的教诲下获益良多,深知研究结构计算必须先从物理概念入手,建立数学模型,然后运用数学工具求解。这一计算方法的优点是物理概念清楚、数学求解简便。

作者曾出版《杆系与板系结构的分析方法》和《伞状折板与膜型扁壳》两种书,并在有关学术刊物发表文章,对高层、超高层、大跨度以及高耸等结构体系的简化计算进行了研究。现将80年代以来作者的部分研究成果结合国内的具体情况,撰写成本书,将结构简化计算加以小结供广大建筑科技工作者参考。

在本书的编写过程中,得到中南建筑设计院樊小卿院长的鼓励与支持,还有黄慕洁同志亦给予了极大的关怀,特在此致以衷心感谢。

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书主要采用连续化的数学模型和能量变分解,个别章节采用微分方程法、加权残数法、形变法和力法等,论述了结构简化计算的基本原理(连续原理、能量原理,方差泛函变分原理等),以及在高层(框架、框-剪、剪力墙)和超高层(框筒、筒中筒、成束筒)结构简化计算、高层结构与地基基础的相互作用、大跨度空间(穹顶网壳、网架、双层扁网壳、悬索)结构简化计算、高耸(钢塔架、桅杆)结构简化计算等方面的应用。各章均附有算例说明有关应用。

本书概念清楚,计算简便,可供从事土建结构设计和力学研究的科技人员,以及高等院校有关专业的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构简化计算原理及其应用/刘开国著.-北京:科学出版社,1995

ISBN 7-03-004761-3

I. 结… II. 刘… III. 建筑结构-结构计算-计算方法
IV. TU311.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 15198 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1996 年 2 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

1996 年 2 月第一次印刷 印张:19

印数:1 2 570 字数:437 000

ISBN 7-03-004761-3/TU·44

定价: 37.00 元

目 录

序

第一章 绪论

1.1 引 言 1

1.2 数学模型——连续原理 2

1.3 能量原理 3

1.4 变分原理与平衡方程 5

1.5 能量变分解 6

1.6 方差泛函变分原理 7

1.7 加权残数法 9

1.8 位移函数..... 11.

第二章 高层框架、框-剪和剪力墙结构

2.1 引 言..... 15

2.2 高层建筑结构简化计算的研究..... 15

2.3 高层建筑结构考虑楼板变形的计算..... 28

2.4 圆弧形高层建筑结构的空分析..... 38

2.5 高层钢框架 $P-\Delta$ 效应的简化计算 45

2.6 高层钢框架考虑节点域剪切变形的计算..... 50

第三章 超高层筒体结构

3.1 引 言..... 54

3.2 高层建筑结构的能量变分解..... 54

3.3 圆形筒体结构的计算..... 64

3.4 多边形筒体结构的计算..... 69

3.5 成束筒结构的计算..... 73

3.6 考虑楼板梁作用的筒中筒结构计算..... 79

3.7 框筒结构的剪力滞后效应..... 83

3.8 框筒结构的温度效应..... 91

3.9 框筒结构的扭转效应..... 97

3.10 筒体结构的整体稳定计算..... 105

第四章 高层结构与地基基础的相互作用

4.1 引 言 109

4.2 地基-基础-框架体系相互作用的计算方法 109

4.3 十字交叉弹性地基梁与空间高层框架相互作用的计算 131

4.4 高层框架与箱型基础整体计算的半解析半残数法 141

4.5	弹性地基梁与高层框架相互作用的能量变分解	152
4.6	在侧力作用下高层框架与地基基础的相互作用	160
第五章 穹顶网壳结构		
5.1	引 言	167
5.2	空间杆系穹顶结构的几个计算问题	167
5.3	空间杆系穹顶结构的能量变分解	177
5.4	正三角形网格式球壳的实用计算	181
第六章 网架及双层扁网壳结构		
6.1	引 言	194
6.2	四柱支承带悬挑的网架结构计算	194
6.3	双层双曲扁网壳结构的计算	199
6.4	双层双曲抛物面扁扭网壳结构的计算	206
6.5	组合型双层扁扭网壳结构的计算	210
第七章 悬索结构		
7.1	引 言	215
7.2	大跨度圆形双层悬索结构的计算	215
7.3	拉索穹顶结构在轴对称荷载作用下的计算	221
7.4	索-梁屋盖结构的计算	228
7.5	斜拉屋盖结构的力法解	240
7.6	斜拉屋盖结构的变分解	245
7.7	悬挂屋盖结构分析	249
第八章 高耸及其他结构		
8.1	引 言	255
8.2	高耸钢塔架结构的计算	255
8.3	高耸桅杆结构的几个计算问题	264
8.4	高低跨厂房排架的空间简化计算	272
8.5	点支承的平板计算	280
8.6	连续深梁计算	289

第一章 绪 论

1.1 引 言

一般而言,工程力学的边值问题,可以归结为微分方程的求解问题,也可以归结为泛函变分的极值或驻值的求解问题,后者称之为变分法;这两者是等价的,又是相互可以沟通的。

然而,从求近似解的角度来看,从泛函的极值或驻值出发常常比从微分方程出发更为方便。自从电子计算机广泛应用以来,这种看法已得到国内外愈来愈多的学者赞同。因此,为了简化结构的计算,本书主要从以下两个方面入手:

一方面直接由能量泛函通过变分取其极值或驻值,寻求与之相应的微分方程的近似解法,如能量变分解^[16]。

另一方面直接由已有的微分方程,通过方差泛函变分原理去寻找它的近似解法,如加权残数法^[7,8]。

大家知道,能量原理中的最小势能原理在工程力学的变分原理中虽不是唯一的,但确实是充足的,而且具有最大的通用性,它可以处理几乎一切结构理论问题。大家也知道,有限元法正是基于变分原理,特别是采用以位移为基础的变分原理形式之后,才在实践上取得了巨大成功。和有限元法一样,本书提出的简化算法,也是采用以位移为基础的变分原理形式;但不同的是:

(1) 有限元法采用离散化的数学模型;而本书采用连续化的数学模型,即根据连续原理将杆系结构化为连续体结构。

(2) 有限元法是在单元上选择位移函数,只要求该函数在单元内部或单元之间的界面上满足一定的条件;而本书是在整个结构的求解域上选择位移函数,并要求该函数在域内(含域与域之间的交界上)或域的边界上均满足一定的条件。

总之,本书的理论基础是连续原理、能量原理和方差泛函变分原理。书中所提出的简化算法,理论严谨,物理概念清楚,数学求解简便,应用范围广泛,一般只需解少数联立方程式,手算或电算均很方便。

一个抓住问题本质的简化法,即使在有了电子计算机这一有力的计算工具的今天,依然是结构工程师们乐于采用的。特别是在结构方案比较和初步设计时,简化法仍然具有不可替代的意义,因为它能提供比较清晰的受力概念。此外,对于较规则的结构体系,简化法已完全可以提供符合设计需要的较满意而完整的计算结果。

为了便于读者阅读本书,现将全书涉及的有关问题,包括连续原理、能量原理、变分原理与平衡方程、能量变分解、方差泛函变分原理、加权残数法及位移函数等,综合论述于本章各节。

1.2 数学模型——连续原理

正如前述,本书主要采用连续化的数学模型,即根据连续原理将杆系结构化为连续体结构。例如:在高层结构计算中,将框筒的四周框架模拟为四块等效的均质正交板,将圆筒的周边框架模拟为等效的圆柱壳;在空间结构计算中,将网架模拟为等效的夹层板,将网壳模拟为等效的夹层壳;在高耸结构计算中,将钢塔架模拟为等效的剪弯悬臂杆等。

现将本书部分数学模型的等效刚度推导如下,其他数学模型的等效刚度将在有关章节中介绍。

1. 框筒结构

由连续原理可求得框筒的等效连续体的折算厚度 t 和折算剪切模量 G 。取等效单元如图 1.1 所示,图中 h 为层高, s 为柱间距, I_b 和 I_c 分别为梁及柱的截面惯性矩。

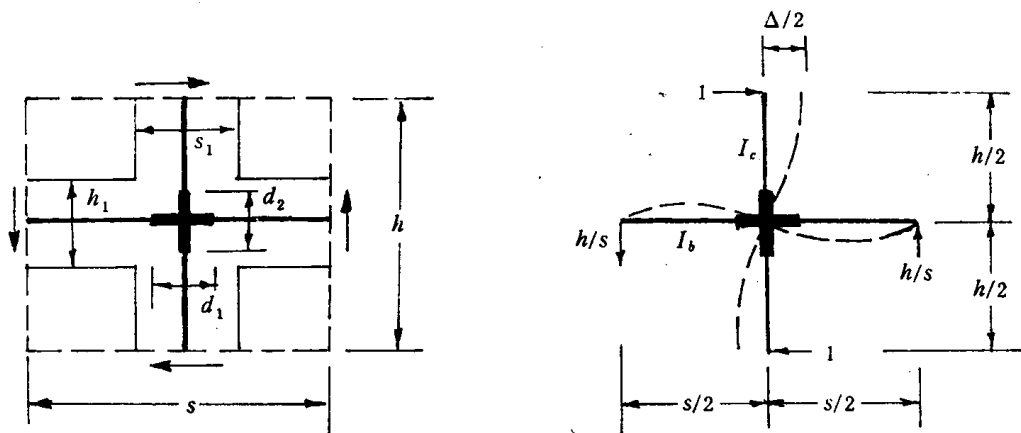


图 1.1

由框架柱的轴向劲度等于拟板的竖向劲度,则 $AE = stE$, 故

$$t = A/S \quad (1.1)$$

式中, A 及 E 分别为柱的截面面积及材料弹性模量。

由框架的剪切劲度等于拟板的剪切劲度,用图乘法不难求得

$$\Delta = \frac{2}{3} \left(\frac{h-d_2}{2} \right)^3 \frac{1}{EI_c} + \frac{2}{3} \frac{(s-d_1)^2 h^2}{(2s)^2} \left(\frac{s-d_1}{2} \right) \frac{1}{EI_b}$$

将在层高 h 范围内产生一单位剪变(即 $\frac{\Delta}{h} = 1$) 所需之剪力定义为抗剪劲度 GA , 则 $GA = h/\Delta$, 故

$$\frac{G}{E} = \frac{\frac{s_1^2 h}{(h-d_2)^3}}{1 + \frac{(s-d_1)^3 h^2 I_c}{(h-d_2)^3 s^2 I_b}} \quad (1.2)$$

式中

$$d_1 = s_1 - h_1/2 \quad \text{及} \quad d_2 = h_2 - s_1/2$$

2. 网架结构

根据连续原理将网架上(下)弦分别假定为不同厚度的上(下)表层,它们只能承受层内的平面力而不能承受横向剪力;将网架的腹杆视为厚度等于网架高度 h 的夹心层,它只能承受横向剪力而不能承受平面力。换言之,上下表层只具有层内平面刚度而忽略其横向剪切刚度;夹心层只具有横向剪切刚度而忽略其平面刚度。

现以两向正交正放网架为例,取单元平面桁架如图 1.2 所示。图中 A_a 、 A_b 、 A_c 和 A_d 分别为桁架上弦、下弦、斜杆和竖杆的截面面积,则桁架的惯性矩 I 和抗弯刚度 D ,为:

$$\begin{aligned} I &= \frac{A_a A_b h^2}{A_a + A_b} \\ D &= EI/s \\ \Delta_{11} &= \delta_d + \delta_c / \sin \theta = s \left(\frac{\operatorname{tg} \theta}{EA_d} + \frac{1}{EA_c \sin^2 \theta \cos \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

式中, E 为材料弹性模量。

对于一块平面大小为 $s \times h$ 的正交异性夹心层,在相应的一对单位横向力作用下,其相对竖向位移 $\bar{\Delta}_{11}$ 为

$$\bar{\Delta}_{11} = \frac{s}{c \cdot s} = \frac{1}{c}$$

由 $\Delta_{11} = \bar{\Delta}_{11}$, 求得抗剪刚度

$$C = \frac{EA_c A_d \sin^2 \theta \cos \theta}{(A_d + A_c \sin^3 \theta)s} \quad (1.4)$$

1.3 能量原理

能量原理是工程力学中的一个重要原理,它的内容很广泛,本节仅对能量原理中的应变能、虚功原理及最小势能原理分别论述如下:

1. 应变能

设杆件的长度为 l , 截面面积为 A , 材料弹性模量为 E 及剪切模量为 G 。则杆件受拉(压)、剪、弯、扭等变形时的应变能 U , 可由材料力学直接写出如下:

(1) 拉(压)应变能

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} EA \epsilon^2 dx \quad (1.5)$$

式中, ϵ 为应变, EA 为截面抗拉(压)刚度。

(2) 剪切应变能

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} \cdot \frac{GA}{\mu} r^2 dx \quad (1.6)$$

式中, r 为剪应变, GA/μ 为截面抗剪刚度, μ 为截面剪切系数。

(3) 弯曲应变能

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} EI k^2 dx \quad (1.7)$$

式中, k 为曲率, EI 为截面抗弯刚度。

(4) 圆杆的扭转应变能

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} GI_p \phi^2 dx \quad (1.8)$$

式中, ϕ 为单位长度的扭转角, GI_p 为截面抗扭刚度, I_p 为截面极惯性矩。

2. 虚功原理

试考察梁在横向分布荷载 q 作用下的平衡问题。按照力学上的一般称呼, 满足位移连续条件的位移叫做变形可能的位移, 简称可能位移。在梁的弯曲问题中只有一个广义位移 w 。因此, w 是可能挠度的充要条件是 w 和 w' 连续, 并在边界上满足有关位移的条件, 即

$$\text{在固支端上} \quad w = \bar{w} \quad \frac{dw}{dx} = \bar{\phi}$$

$$\text{在简支端上} \quad w = \bar{w}$$

与可能挠度相应的曲率, 称为可能曲率。

又按照力学上的一般称呼, 与某种外力保持平衡的内力, 称为与此种外力相应的静力可能的内力, 简称可能内力。在梁的弯曲问题中, 内力有弯矩 M 和剪力 Q 两个。组成一组可能内力的充要条件是: 在梁内满足平衡方程, 即

$$Q = \frac{dM}{dx} \quad - \frac{d^2M}{dx^2} = q$$

而在边界上满足有关力的边界条件, 即

$$\text{在简支端上} \quad M = \bar{M}$$

$$\text{在自由端上} \quad M = \bar{M} \quad Q = \bar{Q}$$

根据能量守恒原理, 外力在可能位移上所作之功, 等于可能内力在可能应变上所作之功。如果把边界上的支座反力(含反力矩)也视为外力, 则虚功原理在梁理论中的数学表达式为

$$\int_0^l q w dx + \left(Q w - M \frac{dw}{dx} \right) \Big|_0^l = \int_0^l \left(-M \frac{d^2w}{dx^2} \right) dx \quad (1.9)$$

这里 w 与 M 是两个任意的函数, 不一定满足

$$M = -D \frac{d^2w}{dx^2}$$

应当指出, 虚功原理的等式是极重要的数学关系式, 有了它, 其他各个能量原理将不难证明。

3. 最小势能原理

仍以梁为例, 设梁的挠度 w 满足下列微分方程及边界条件

$$\frac{d^2}{dx^2}D\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) = q \quad (1.10)$$

在 $x=0$, 固支

$$w = \bar{w}_0 \quad \frac{dw}{dx} = \bar{\psi}_0 \quad (1.11)$$

在 $x=l$, 简支

$$w = \bar{w}_l \quad (1.12a)$$

$$-D \frac{d^2w}{dx^2} = \bar{M}_l \quad (1.12b)$$

这里, $\bar{w}_0, \bar{\psi}_0, \bar{w}_l, \bar{M}_l$ 为已知。

把满足方程(1.10)~(1.12)的挠度叫做真实挠度,或叫做精确解;把满足条件式(1.11)和(1.12a),但不管它是否满足式(1.10)和(1.12b)的挠度叫做变形可能的挠度,简称可能挠度。

在最小势能原理中,把外荷载看作是不变的已知量,而把挠度看作是可变的自变函数。整个系统的势能包括两部份:

$$\text{梁的应变能} \quad U_b = \frac{1}{2} \int_0^l D \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx$$

$$\text{荷载的势能} \quad U_q = - \int_0^l q w dx + \bar{M}_l w'_l$$

故总势能

$$U = \int_0^l \left[\frac{1}{2} D \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 - q w \right] dx + \bar{M}_l w'_l \quad (1.13)$$

其中除函数 w 可变之外,其余的量都假定为已知的不变量。

最小势能原理指出,在所有变形可能的挠度中,精确解使总势能取最小值。

1.4 变分原理与平衡方程

大家知道,力学中的平衡方程可以由最小势能原理导出。现以图 1.3 的拉杆为例论述如下:

总势能

$$U = \int_0^l \left(\frac{1}{2} EA \epsilon^2 - F \epsilon \right) dx = \frac{EA}{2l} u^2 - Fu \quad (1.14)$$

由 $\frac{dU}{du} = 0$, 得平衡方程

$$\frac{EA}{l} u - F = 0 \quad (1.15)$$

又 $\frac{d^2U}{du^2} = \frac{EA}{l} > 0$, 故 U 取极小值的状态,必然是平衡状态。

因此,力学上的平衡问题可归结为数学上的极值问题,即变分问题

$$U = \frac{EA}{2l} u^2 - Fu = \min \quad (1.16)$$

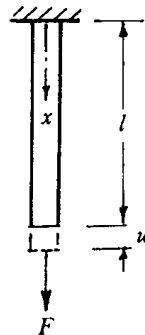


图 1.3

最小势能原理还有另一种等价形式,即虚功原理。设平衡态位移 u 获得增量或称虚位

移 v ,而变为 $u+v$,这时拉杆的势能由 $U(u)$ 变到 $U(u+v)$ 。由于 $U(u)$ 是 u 的二次函数,所以

$$\begin{aligned} U(u+v) &= U(u) + U'(u)v + \frac{1}{2}U''(u)v^2 \\ &= U(u) + U'(u)v + \frac{EA}{2l}v^2 \end{aligned}$$

由此可见, U 达到极小值的充要条件是

$$U'(u)v = 0$$

即

$$\frac{EA}{l}uv - Fv = 0 \quad (\text{对一切虚位移}) \quad (1.17)$$

式(1.17)的力学意义为,平衡位移使虚功总和等于零,此即虚功原理。

综上所述,下列三个问题的解是等价的:

(1) 最小势能原理:

$$U(u) = \frac{EA}{2l}u^2 - Fu = \min$$

(2) 虚功原理:

$$\frac{EA}{l}uv - Fv = 0 \quad (\text{对一切虚位移})$$

(3) 平衡方程:

$$\frac{EA}{l}u - F = 0$$

这种等价性对于一切结构的弹性平衡问题也都是普遍成立的,不过大多数结构的平衡方程为微分方程形式。

1.5 能量变分解

不从微分方程出发,而是直接从能量泛函的驻值条件来求得待定函数的近似值,这就是本节将要介绍的能量泛函的变分近似解,简称为能量变分解^[16]。

试求一个函数 w ,使其满足边界条件

$$\text{在 } x=0 \text{ 及 } x=l \text{ 处} \quad w=0, w''=0 \quad (1.18)$$

并使

$$U = \int_0^l \left[\frac{1}{2}D \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 - qw \right] dx = \min \quad (1.19)$$

为了求近似解,假定位移函数为

$$w = \sum_{n=1}^m C_n \phi_n \quad (1.20)$$

C_n 为待定常数, ϕ_n 为函数基并满足了式(1.18)的边界条件。这样,把原来在相当大的范围内寻找 w 的问题,简化为在由式(1.20)规定的小范围内寻找 w 。将式(1.20)代入式(1.19)算出积分,泛函 U 就变成 C_n 的函数,即

$$U(w) = U(c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m K_{ij} C_i C_j - \sum_n^m F_n q C_n \quad (1.21)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} K_{ij} &= \int_0^l D \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \cdot \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx \\ F_n &= \int_0^l \phi_n dx \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

原来是求 w 使 U 取驻值, 现在简化为求 C_n 使 $U(c)$ 取驻值。这样, 得到一组代数方程

$$\frac{\partial U(c)}{\partial C_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (1.23)$$

即

$$\sum_{j=1}^m K_{ij} a_j - F_i q = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (1.24)$$

从这一组联立方程可解出 C_n , 将它代回式(1.20)便得到 w 的一个近似解。

位移函数的取法很多。关于这个问题可参考 1.8 节。还应指出, 本书在求解能量泛函的条件驻值问题时, 常常用到拉格朗日乘子法, 关于此法的原理可参阅文献[1, 2, 3], 兹不赘述。

例 1.1 试求两端简支梁, 在均布荷载 q 作用下的位移和内力。

取位移函数

$$w = C_1 \sin \frac{\pi x}{l} + C_3 \sin \frac{3\pi x}{l}$$

此函数满足了简支梁的边界条件: 在 $x=0, x=l$ 处, $w=0, w' \neq 0$ 。由式(1.21)得

$$U = \frac{\pi^2 D}{4l^3} (C_1^2 + 81C_3^2) - \frac{2ql}{\pi} (C_1 + \frac{1}{3}C_3)$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial C_1} &= \frac{\pi^4 D}{2l^3} C_1 - \frac{2ql}{\pi} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial C_3} &= \frac{\pi^4 D}{2l^3} (81C_3) - \frac{2ql}{3\pi} = 0 \end{aligned}$$

解之, 得

$$C_1 = \frac{4ql^4}{\pi^5 D} \quad C_3 = \frac{4ql^4}{243\pi^5 D}$$

进而求得

$$w_{\max} = 0.013017 \frac{ql^4}{D} \text{ 及 } M_{\max} = 0.1242ql^2$$

结果与精确解很接近。

1.6 方差泛函变分原理

正如 1.1 节所述, 工程力学边值问题可以归结为一定边界条件和初始条件的微分方

程求解问题,这就是微分方程法。除了一些特殊情况外,微分方程法几乎不太可能求得问题的精确解。因此,为了求其近似解,可以采用加权残数法。方差泛函变分原理是加权残数法的理论基础,故本节先将方差泛函变分原理介绍如下。

如何用一种比较简单的函数(例如多项式、三角级数等)去逼近一个给定的函数,是一个最佳逼近的问题。对于函数逼近,有以下两种重要准则:一是极大极小逼近,二是平均平方逼近,后者即著名的最小平方逼近,而方差泛函变分原理就是由平均平方逼近发展而成的。

试考察方程(1.25)和(1.26)所确定的边值问题:

$$\text{微分方程} \quad L_m(u) = f_0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (1.25)$$

$$\text{边界条件} \quad G_t(u) = f_t \quad \text{在 } B_t \text{ 上} \quad (1.26)$$

$$t = 1, 2, 3, \dots, m$$

其中 L_m 为 m 阶偏微分算子, G_t 为 $t-1$ 阶边界法向微分的边界算子, $f_t (t=0, 1, 2, \dots, m)$ 为给定的坐标函数, Ω 域的边界 B 为

$$B = \bigcup_{t=1}^m B_t$$

设位移函数 $\bar{u}$ 为

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^n C_i \phi_i \quad (1.27)$$

其中 $\{\phi\}$ 为位移函数的函数基, C_i 为相应的待定常数。

将式(1.27)代入方程(1.25)及(1.26),一般不会满足,于是分别出现的内部残差 R_I 及边界残差 R_t 为

$$R_I(\bar{u}) = L_m(\bar{u}) - f_0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (1.28a)$$

$$R_t(\bar{u}) = G_t(\bar{u}) - f_t \quad \text{在 } B_t \text{ 上} \quad (1.28b)$$

所有残差的均方在对应区域上加权积分之和为 $J_R(\bar{u})$ 即

$$J_R(\bar{u}) = \int_{\Omega} b_I^2 R_I^2 d\Omega + \sum_{t=1}^m \int_{B_t} b_t^2 R_t^2 dB \quad (1.29)$$

式(1.29)为平方残差泛函,简称方差泛函,其中: b_I 为区域内相对加权系数; b_t 为边界条件相对加权系数;它与权函数 w 不同,它的作用:一是若边界条件非常重要,可以人为地增大 b_t 的值,以保证该条件的重要性;二是可以用作调整内部残差与边界残差的量纲。

方差泛函有以下重要性质:

- (1) 方差泛函 $J_R(\bar{u})$ 有极小值,且极小值为零。
- (2) 使方差泛函取零极小值的解,等价于偏微分边界问题的解。

方差泛函极小值原理指出,在所有 u 值中,使 $J_R(u^*)$ 取极小值的解 u^* 一定是方程(1.25)及(1.26)边值问题的解,即

$$J_R(u^*) = \min J_R(\bar{u}) = 0 \quad (1.30)$$

由方差泛函极小值原理可以导得方差泛函变分原理如下:

对于线性问题,方差泛函 $J_R(\bar{u})$ 取零极小值的充要条件为变分方程

$$\delta J_R(\bar{u}) = 2 \int_{\Omega} b_i^2 R_i \delta R_i d\Omega + 2 \sum_{i=1}^m \int_B b_i^2 R_i \delta R_i dB = 0 \quad (1.31)$$

可以证明^[8], 变分方程(1.31)与边值问题(1.25)及(1.26)是等价的。

方差泛函变分原理与能量泛函变分原理在数学上非常相似, 它们都是泛函的极值原理。对于线性问题, 它们都是二次正定泛函, 而且仅当 u 为精确解时, 泛函取极小值, 泛函一次变分等于零是泛函极小值的充要条件。不同的是, 能量泛函的极小值预先不知道, 而方差泛函的极小值为零。

1.7 加权残数法

为了节省篇幅, 本节仅介绍加权残数法中精度较好的最小二乘法 and 伽辽金变分法。其他方法请读者参阅文献[7, 8]。

按照选择的位移函数来分, 加权残数法又可分为以下三类: 内部法、边界法和混合法。所选择的位移函数式(1.27)如果能满足所有的边界条件式(1.26), 但不能满足控制微分方程(1.25), 则称为内部法。如果只能满足控制微分方程(1.25), 而不能满足所有边界条件(1.26), 则称为边界法。如果两者都不满足, 则称为混合法。

1. 最小二乘法

作为例子, 下面采用内部法, 即由式(1.29)取其 $b_i=1, b_i=0$, 则

$$J_R(\bar{u}) = \int_{\Omega} R_i(\bar{u}) d\Omega \quad (1.29a)$$

将式(2.27)代入式(1.29a)得

$$J_R(\bar{u}) = \int_{\Omega} \left[L_m \left(\sum_{i=1}^n C_i \phi_i \right) - f_0 \right]^2 d\Omega = J_R(c) \quad (1.32)$$

由 $\delta J_R(\bar{u})=0$, 得

$$\frac{\partial J_R(c)}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1.33)$$

解之可求出 C_i 。

如将式(1.33)写成加权残数法形式, 即

$$\int_{\Omega} R_i(\bar{u}) W_{I_i} d\Omega = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1.34)$$

则最小二乘法的权函数

$$W_{I_i} = \frac{\partial R_i(\bar{u})}{\partial C_i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1.35)$$

例 1.2 试用最小二乘法计算例 1.1。

取位移函数同例 1.1,

$$R_I(\bar{u}) = D \frac{d^4 w}{dx^4} - q = D \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 \left[C_1 \sin \frac{\pi x}{l} + 81 C_3 \sin \frac{3\pi x}{l} \right] - q$$

由 $\int_0^l R_I(\bar{u}) = \frac{dR_I(\bar{u})}{dc_1} dx = 0$ 得

$$D\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left(\frac{1}{2}C_1l\right) - \frac{2ql}{\pi} = 0$$

即

$$C_1 = \frac{4ql^4}{\pi^5 D}$$

由 $\int_0^l R_I(\bar{u}) \frac{dR_I(\bar{u})}{dC_3} dx = 0$ 得

$$D\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\left(\frac{81}{2}C_3l\right) - \frac{2ql}{3\pi} = 0$$

即

$$C_3 = \frac{4ql^4}{243\pi^5 D}$$

结果与例 1.1 完全一样。

2. 伽辽金法

此法把位移函数式(1.27)中的 ϕ_i 作为权函数,即

$$W_{Ii} = \phi_i \quad (1.36)$$

将式(1.36)代入式(1.34),得伽辽金变分方程,

$$\int_{\Omega} R_I(\bar{u}) \phi_i d\Omega \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1.37)$$

解之可以求出 C_i 。

例 1.3 试用伽辽金法计算例 1.1。

取位移函数同例 1.1; 权函数为函数基 $\sin \frac{\pi x}{l}$ 和 $\sin \frac{3\pi x}{l}$ 。伽辽金变分方程

$$\begin{aligned} \int_0^l R_I(\bar{u}) \sin \frac{\pi x}{l} dx &= 0 \\ \int_0^l R_I(\bar{u}) \sin \frac{3\pi x}{l} dx &= 0 \end{aligned}$$

可见,其结果与例 1.1 完全相同。

由上可知,加权残数法具有方法简便、计算准确、工作量少、程序短易、便于应用微机等优点,目前加权残数法在我国发展很快。

总的来说,加权残数法是一种数学方法,其理论基础就是方差泛函变分原理。除伽辽金法外,其他加权残数法均无明确的物理意义,而能量泛函具有明确的物理意义,这一点是能量变分解的最大优点。

从物理意义的角度来看,伽辽金变分法应属于能量原理范围。它可以从能量泛函中导得,也可以从虚功原理导得。鹭津久一郎在文献[10]中从虚功原理导得广义伽辽金变分法,并认为伽辽金变分法是一个基于虚功原理的近似解法。下面仍以梁的弯曲问题为例,阐明如下。

梁的微分方程为

$$L(u) = D \frac{d^4 u}{dx^4} - q = 0 \quad (1.38)$$

伽辽金变分方程为

$$\int_0^l \left(D \frac{d^4 u}{dx^4} - q \right) w dx = 0 \quad (1.39)$$

对式(1.39)分部积分两次,得

$$\int_0^l \left[D \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} - q \right] dx - \left[Q(u)w - M(u) \frac{dw}{dx} \right]_0^l = 0 \quad (1.40)$$

式中,

$$Q(u) = -D \frac{d^3 u}{dx^3} \quad M(u) = -D \frac{d^2 u}{dx^2}$$

式(1.40)可以写成

$$\int_0^l q w dx + \left(Q(u)w - M(u) \frac{dw}{dx} \right) \Big|_0^l = \int_0^l \left(-M(u) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) dx \quad (1.41)$$

可见,式(1.41)与式(1.9)完全一样,这说明伽辽金法与虚功原理是等价的。在这里,对式(1.39)应从虚功原理去理解,即 $(D \frac{d^4 u}{dx^4} - q)$ 为综合力, w 为虚位移。这就是伽辽金变分法的物理概念。

3. 半解析半残数法

此法在文献[17]中首先提出并应用于上部结构与地基基础的整体计算,它充分发挥了解析法和数值法的各自优点,是一个很有发展前景的计算方法,详见本书4.4节。

1.8 位移函数

位移函数又叫试函数或坐标函数,由两部分组成,

$$\bar{u} = \sum_{m=1}^n C_m \phi_m \quad (1.27)$$

一部分为待定常数 C_m (由计算确定),另一部分为位移函数基 ϕ_m 。

位移函数的选择是一个很重要的问题。在低阶近似计算中,位移函数选取的好坏,对计算结果的精度影响很大。在高阶近似计算中,从理论上讲,不同的位移函数对计算结果影响不大,但对计算的工作量大小和计算结果收敛快慢有较大影响。

位移函数的选择还没有一种通用的方法可以遵循,主要依靠使用者的实践经验的积累。经验说明,欲求一个问题的近似解,使用者必须对这个问题的解的特点,例如微分方程的通解与特解、问题的对称性、渐近性与奇异性、边界条件情况、类似问题的解答等有较多的了解。更重要的,还须对这个结构的物理概念和变形特点有较深的了解。有了尽可能多的了解之后,使用者才能应用自如,才能选取尽可能反映这些特点的比较接近真解的位移函数。

位移函数一般应满足下列条件:

- (1) 在域内连续及 n 阶可微(n 为问题控制方程的最高阶次)。
- (2) 满足相应控制方程所需要的约束条件(如采用能量变分解,要满足位移边界条件,以及域与域之间的交界条件)。
- (3) 是完备的线性无关函数序列。
- (4) 要反映所求结构的变形规律。