

176858

传输过程数值模拟

Numerical Simulation of Transfer Process

郭鸿志 张欣欣 编著
刘向军 李 杰

北 京
冶 金 工 业 出 版 社
1998

内 容 简 介

全书共 16 章,以湍流及其工程数值模拟为主。前 5 章阐述了粘性流体运动的基本规律、平面势流、层流、湍流模型及边界层理论;第 6 章论述了矢量流函数—涡量法,主要阐述李有章正交曲线坐标系下的涡量输运方程,矢量流函数方程,湍流反应流气相控制方程,矢量流函数及其边值性质,以及矢量流函数—涡量法数值求解方法;第 7 章为电磁流体力学。后 9 章为工程实际应用,主要介绍矢量流函数—涡量法、涡量—流函数法在炼铁、炼钢、精炼、连铸、四角切向燃烧煤粉锅炉及燃烧室等工程实际中的应用,并介绍了应用原型方程与 SIMPLE 的算法对连铸结晶器内电磁流体流动的数值模拟。

本书的鲜明特点是实用性强。本书可供高等工科院校工程热物理、热能工程、冶金、化工等专业研究生学位论文教材,也可作为上述专业教师及从事流体流动、传热传质及燃烧数值模拟和优化设计的研究人员或设计人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

传输过程数值模拟/郭鸿志等编著. —北京:冶金工业出版社,1998. 4

ISBN 7-5024-2178-5

I. 传… II. 郭… III. 传输-过程-数值模拟 IV. TK124

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 03525 号

出版人 卿启云(北京沙滩嵩祝院北巷 39 号,邮编 100009)

责任编辑 王庆福 美术编辑 王耀忠 责任校对 扬力

北京梨园彩印刷厂印刷;冶金工业出版社发行;各地新华书店经销

1998 年 4 月第 1 版,1998 年 4 月第 1 次印刷

850mm×1168mm 1/32;9 印张;239 千字;263 页;1—700 册

18.00 元

(本社图书如有印装质量问题,本社发行部负责退换)

前 言

工程实际中遇到的流体流动、对流传热传质和燃烧过程几乎都是湍流,湍流的机理和详细计算目前尚未解决。然而我们感兴趣的主要是速度、温度和各组分浓度的时均值。但是在对基本方程进行雷诺分解和平均,建立平均量的控制微分方程的过程中,却出现了新的未知量,导致了该方程组的不封闭,人们不得不设法用近似但可解的方程组去取代严格的而不可解的方程组,这个过程即所谓模拟。一百多年来世界上不少著名的科学家为了探索湍流的奥秘,花费了巨大的精力,创造了一些实际可用的工程湍流理论和湍流统计理论,提出了各种湍流模型。近 20 年来国内外许多冶金工作者应用湍流模型,对冶金反应器内的电磁流体流动、传热传质及燃烧过程进行二维或三维的数值模拟,以揭示冶金反应器内的动量、热量、质量的传输规律,取得了丰硕的科研成果,为冶金反应器的优化设计和最佳工艺操作提供了参数和依据。对于二维问题的数值模拟,涡量一流函数法应用方法之一,由于控制方程组中没有压力项,不必使用交错网格,收敛速度很快。湍流,就其本质而言,是有旋流动。因此用涡量作为因变量,更能反应其物理本质。然而以涡量为控制方程的因变量,在三维问题的数值模拟中目前尚未推广应用。迄今对三维问题的模拟国内外普遍采用原型方程和 SIMPELE 法,该方法的最大困难是压力场未知,因此不得不采用交错网格,这样会使计算机存储量大,计算时间长,不经济。80 年代以来,李有章教授在湍流工程计算的涡量一流函数法、矢量流函数—涡量法方面做了些开拓性工作,并由多位研究生实际应用。1967 年 Aziz 和 Hellums 就凹穴内为自由对流,1985 年 Hamed 等就透平机械叶片流道内三维流应用矢量流函数、涡量做了层流计算,但因问题特殊,或将因变量边值过度简化,都未较深入考虑矢

性流函数边值定义的原则问题。由于矢性流函数边值的难于定义,影响了矢性流函数—涡量法在三维流场上应用的开发与推广。李有章从质量速度重新定义矢性流函数,分析提出定义矢性流函数分量边值的方法,建立了以矢性流函数—涡量法计算两相反应流湍流气相的控制方程,特别是在形式与湍流模型上经过改进的正交曲线坐标系下的时均涡量输运方程、矢性流函数方程、矢性流函数及其边值的性质以及方程的离散化等,使矢性流函数—涡量法成为有物理意义、有实用价值的三维流数值模拟方法之一。

在编写本书时,我们注意理论联系实际,面向冶金生产,注重实际应用。本书前5章阐述了粘性流体运动的基本规律、平面势流、层流、湍流模型及边界层理论;第6章论述了上述矢性流函数—涡量法;第7章为电磁流体力学,介绍了电磁流体力学控制方程、磁场强度输运方程以及根据李有章教授提出的理论建立的电磁流体湍流涡量输运方程;第8章是直流电弧炉传输过程的数值模拟,应用涡量—流函数法;第9章是直流电弧电渣钢包炉传输过程的数值模拟,应用非规范正交曲线坐标系下矢性流函数—涡量法;第10章是顶吹底吹转炉流场的数值模拟,主要介绍李有章流函数亦即顶吹气体射流冲击下熔池内液体运动的数学模型、中心顶吹底吹、偏心底吹转炉流场的模拟,应用镜像法、涡量—流函数法、非规范正交曲线坐标系下矢性流函数—涡量法;第11章是连铸中间罐流场的三维数值模拟,应用矢性流函数—涡量法;第12章为连铸结晶器流体流动的数值模拟,应用原型方程和SIMPELE法;第13章为扁平附壁射流煤粉燃烧器流场的数值模拟,应用矢性流函数—涡量法;第14章为高炉直吹管气体两相燃烧数值模拟,应用涡量—流函数法;第15章为四角切向燃烧煤粉锅炉气动流场的数值模拟,应用矢性流函数—涡量法;第16章为圆筒燃烧室旋流流场的数值模拟,应用李有章修正的涡量—流函数法。

本书由张欣欣(第1、3、5章),刘向军(第4、14、15章),李杰、郭鸿志(第13、16章),甄锺(第10.4节),郭鸿志(第2、6、7、8、9、10.1~10.3、11章),张炯明、李杰(第12章)编写。郭鸿志担任主

前 言

编,李有章担任主审。

本书可作为高等学校工程热物理、热能工程、冶金、化工等专业研究生学位课教材,也可作为上述专业教师及从事流动、传热传质及燃烧数值模拟和优化设计的研究人员或设计人员的参考书。

由于我们水平有限,书中错漏之处恳请有关专家和读者批评指正。

郭鸿志

1997年4月

目 录

1 粘性流体动力学的基本方程式	1
1.1 流体的输运性质	1
1.2 输运定理	6
1.3 连续方程	7
1.4 运动方程	7
1.5 能量方程	8
1.6 组分质量守恒方程	9
1.7 方程组的封闭性问题与状态方程	10
1.8 流体的涡旋运动	11
参考文献	13
2 平面势流	14
2.1 理想不可压缩流体基本方程	14
2.2 复势函数和复速度	15
2.3 复势函数及流动简例	17
2.4 无环流圆柱绕流	24
2.5 镜像法	25
参考文献	27
3 层 流	28
3.1 一维层状流动	28
3.2 平面渠道中流动和库塔流	29
3.3 圆管中的哈根-泊肃叶(Hagen-Poiseuille)流动	32
3.4 两个同心旋转圆筒之间的流动	33
3.5 蠕流	37
3.6 斯托克斯(Stockes)流	38
3.7 奥森(Oseen)流	42

3.8	润滑理论	44
	参考文献	48
4	湍流模拟	49
4.1	引言	49
4.2	湍流模拟基础	50
4.3	零方程模型(混合长度模型)	54
4.4	单方程模型(湍动能模型)	56
4.5	$k-\epsilon$ 双方程模型	59
4.6	雷诺应力方程模型	68
4.7	其他模型及方法	75
	参考文献	80
5	边界层	82
5.1	边界层的概念	82
5.2	边界层的厚度	83
5.3	二维层流边界层	86
5.4	边界层的动量积分方程	95
5.5	湍流边界层	97
	参考文献	99
6	矢量流函数——涡量法	100
6.1	矢量流函数——涡量法的发展	100
6.2	两相反应流气相瞬时流场的基本方程	101
6.3	两相反应流气相时均流场涡量输运方程、封闭方程的 湍流模型	103
6.4	正交曲线坐标系下矢量流函数——涡量法两相湍流 反应流气相流场方程	106
6.5	矢量流函数及其边值性质	114
6.6	涡量—流函数法	118
6.7	正交曲线坐标系控制方程的离散化	124
6.8	结论	129
	参考文献	129

7 电磁流体力学	131
7.1 电磁流体的连续介质描述	131
7.2 电磁流体力学控制方程	132
7.3 磁场强度输运方程	133
7.4 电流密度与电磁力	134
7.5 电磁流体湍流的涡量输运方程	135
参考文献	136
8 直流电弧炉传输过程的数值模拟	137
8.1 直流电弧炉内的物理现象	137
8.2 直流电弧炉内电磁流体流动与传热过程的 数学模型	138
8.3 数学模型的数值解法	142
8.4 直流电弧炉的速度场、电磁场、温度场	142
参考文献	146
9 直流电弧电渣钢包炉传输过程的三维数值模拟	148
9.1 直流钢包炉技术发展概况	148
9.2 直流电弧电渣钢包炉熔体流动及传热过程的 三维数学模型	150
9.3 数学模型的数值方法	160
9.4 直流电弧电渣钢包炉的速度场、电磁场、温度场	161
9.5 循环流量、循环周期、抽引比、物料混均时间	166
9.6 结论	167
参考文献	167
10 顶吹底吹转炉流场的数值模拟	168
10.1 顶吹气体射流冲击下熔池内液体运动的 流函数	168
10.2 顶吹氧气转炉深吹下熔池流场的模拟	179
10.3 底吹转炉熔池流场的模拟	186
10.4 偏心底吹转炉三维流场的模拟	190
参考文献	197

11	连铸中间罐流场的三维数值模拟	199
	11.1 连铸中间罐的功能.....	199
	11.2 数学模型与数值解法.....	199
	11.3 计算结果与讨论.....	201
	11.4 结论.....	205
	参考文献.....	206
12	连铸结晶器流体流动的数值模拟	207
	12.1 连铸结晶器内流动过程的数学模型.....	207
	12.2 连铸结晶器内流动过程的计算结果.....	212
	12.3 本章小结.....	226
	参考文献.....	226
13	扁平附壁射流煤粉燃烧器三维流场数值模拟	228
	13.1 物理模型及计算区域.....	228
	13.2 数学模型.....	228
	13.3 计算方法.....	231
	13.4 计算结果.....	231
	13.5 结论.....	235
	参考文献.....	235
14	高炉直吹管煤粉气体两相燃烧数值模拟	236
	14.1 控制方程和气相湍流与燃烧模型.....	236
	14.2 颗粒相运动与反应的控制方程.....	239
	14.3 边界条件及壁函数.....	240
	14.4 计算方法.....	242
	14.5 计算结果与分析.....	242
	14.6 本章小结.....	247
	参考文献.....	247
15	四角切向燃烧煤粉锅炉气动流场的数值模拟	248
	15.1 控制方程.....	248
	15.2 边界条件.....	249
	15.3 求解方法.....	250

15.4	计算结果与分析	251
15.5	本章小结	257
	参考文献	257
16	圆筒燃烧室旋流流场的数值模拟	258
16.1	突扩圆筒燃烧室内双股同心强旋流 流场的数值模拟	258
16.2	突扩燃烧室强旋流空气煤粉冷态 流场的数值模拟	260
	参考文献	263

1 粘性流体动力学的基本方程式

1.1 流体的输运性质

在相邻两层流体层之间会发生某些物理量的输运,例如动量输运、热量输运、质量输运。这些输运现象可以是由两种不同层次的输运过程引起的,即分子热运动引起的输运和湍流脉动运动引起的输运。从某种意义而言,粘性流体动力学就是研究分子输运和湍流输运对流体动力学过程的影响。

分子层次的输运是由分子无序运动完成的。由分子运动论可知,如果温度分布不均匀即存在温度梯度时,分子运动将使温度分布趋于均匀,其宏观表现是热量从高温处向低温处流动,此即热传导或热扩散。单位时间通过与温度梯度方向垂直的单位面积的热量正比于温度梯度的绝对值,比例系数称为导热系数。

如果把速度看成单位质量的流体所具有的动量,当存在速度梯度时分子运动对动量的输运会表现为两流层之间的相互作用力,即粘性力。当高速流层中的分子进入到低速流层时,它们所携带的比当地高的动量将表现为高速流层对低速流层的向前的粘性作用力。同样低速流层的分子进入到高速流层时也将表现出低速流层对高速流层向后的粘性作用力。可用类似于定义导热系数的方式定义粘性系数。粘性系数越大,两相邻流层之间的动量交换越大,即有更大的消除两流层间动量梯度(即速度梯度)的趋势,不易维持大的变形率,所以粘性系数是流体抵抗大的(剪切)变形速率能力的量度。

当流体中某种成分的浓度分布不均匀时,即存在浓度梯度时,分子运动使之均匀化,这种对质量的输运称为质量扩散过程。

本节只讨论以上三种分子输运性质,它影响的问题遍及全书。

1.1.1 粘性系数

粘性力和粘性系数可由如下试验测量：两块很长的平行放置的平板，其中一块静止不动（参见图 1-1），另一块以缓慢的恒速 U 作平行运动。设两平板之间的距离为 h ，且平板间的流体内压力为常数。由于流体的粘附作用，下一平板壁面处的流体速度应等于零，上一平板壁面处的流体速度则应等于平板运动速度 U 。在两平板之间，速度呈线性分布，正比于与下一平板的距离 y

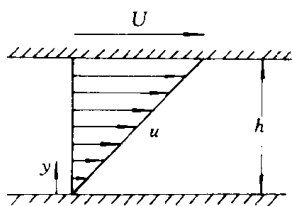


图 1-1 两平板间层流运动速度分布

$$u(y) = \frac{y}{h}U \quad (1-1)$$

为维持这种运动，需要对上一平板作用一沿运动方向的力，它等于流体对该平板作用的向后的粘性摩擦阻力。由试验可知，对于某些流体，例如水和空气，该平板单位面积上所受到的摩擦阻力（即切应力 τ ）正比于该平板的运动速度 U ，反比于距离 h ，即 $\tau \propto U/h$ ，对此可用速度梯度 du/dy 将其表示为

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1-2)$$

式中比例系数 μ 称为粘性系数，或称动力粘性系数，其国际制单位为 $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ 或 $\text{Pa} \cdot \text{s}$ 。

在流体力学中也常用到运动粘性系数 ν

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1-3)$$

式中 ρ 为流体的密度。运动粘性系数 ν 的国际单位制的单位为 m^2/s 。

动力粘性系数 μ 随温度与压力变化，但压力的影响甚微。一般而言，对于液体 μ 随温度的升高而减小，对于气体则随温度升高而增大。

各种气体的粘性系数可以近似采用下列幂次公式来计算

$$\frac{\mu}{\mu_0} \approx \left(\frac{T}{T_0} \right)^n \quad (1-4)$$

这里 $T_0 = 273.16\text{K}$; μ_0 为一个大气压下 0°C 时气体的动力粘性系数; n 为温度指数, 如空气 $n = 0.76$, 氢气 $n = 0.69$, 二氧化碳气体 $n = 0.95$ 。在近似估算时, 高温可取 $n = 0.5$, 低温取 $n = 1.0$ 。

萨瑟兰(C. D. Sutherland)给出了更准确的公式

$$\frac{\mu}{\mu_0} \approx \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \left(\frac{T_0 + T_s}{T + T_s} \right) \quad (1-5)$$

这里 T_0 与 μ_0 的定义与式(1-4)相同, T_s 为萨瑟兰常数, 与气体性质有关。表 1-1 列出了在一个大气压下几种气体的 μ_0 和 T_s 值。

表 1-1 几种气体在一个大气压力的 μ_0 和萨瑟兰常数 T_s 值

气体名称	$\mu_0/\text{Pa} \cdot \text{s}$	萨瑟兰常数 T_s/K
空气	17.161×10^4	124
氮	16.602×10^4	104
氨	9.306×10^4	503
氧	19.200×10^4	125
氢	8.404×10^4	71
氯	12.307×10^4	350
甲烷	10.198×10^4	164
乙炔	9.600×10^4	215
乙烯	9.453×10^4	225
一氧化碳	16.807×10^4	100
二氧化碳	13.807×10^4	254
硫化氢	11.600×10^4	331
水蒸气	8.933×10^4	961

1.1.2 热传导系数

当流场具有温度梯度时将会产生热量的输运。温度梯度与热流密度的关系遵循傅里叶(J. B. Fourier)定律

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (1-6)$$

式中 \mathbf{q} 为热流密度矢量, 即单位时间内通过垂直于 ∇T 的单位面积所传递的热量, 单位为 W/m^2 ; ∇T 为温度梯度; k 为导热系数,

国际制单位为 $W/m \cdot K$ 。对于各向同性流体, k 无方向特性, 仅随温度与压力而变化。

对于各种气体的热传导系数可以用类似于粘性系数的幂次近似公式

$$\frac{k}{k_0} \approx \left(\frac{T}{T_0} \right)^n \quad (1-7)$$

或采用萨瑟兰公式

$$\frac{k}{k_0} \approx \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \left(\frac{T_0 + T_s}{T + T_s} \right) \quad (1-8)$$

式中 $T_0 = 273.16K$; k_0, n 及 T_s 见表 1-2。注意这里的 T_s 与计算粘性系数的 T_s 的数值不同。

表 1-2 几种气体在 $T_0 = 273.16K$ 时的导热系数、幂次和 T_s 常数值

气体名称	$k_0/W(m \cdot K)^{-1}$	n	T_s/K
空气	0.02415	0.81	194
氩	0.01635	0.73	150
二氧化碳	0.01456	1.38	2222
一氧化碳	0.02324	0.85	178
氮	0.02424	0.76	167
氧	0.02457	0.86	222
氢	0.16275	0.85	167

1.1.3 质量扩散系数

分子作随机运动将引起质量输运, 或称质量扩散。例如, 处于宏观静止状态的某一控制体内的空气, 由于分子运动而不断有分子出入该控制体, 该控制体中空气的质量不断脉动变化。这种同一均匀介质之间的质量扩散称为自扩散。对于自扩散的效应不能从宏观上进行考察, 因为它们总是均匀的。

当流体中某种组分在空间分布不均, 即有浓度梯度时, 分子运动将引起质量交换, 并最终使之成为均匀混合物, 可以从宏观上, 即从浓度分布的变化, 考察这样的质量扩散过程。

浓度通常有两种定义。一种是容积浓度 $\rho_i (m_i/V)$, 即单位体积内第 i 组分流体的质量。另一种是质量浓度 $C_i (\rho_i/\rho)$, 即单位质

量的混合物中第 i 组分流体的质量。第二种浓度的定义用得较多。浓度梯度与质量输运量的关系遵循菲克(A. E. Fick)定律

$$\frac{M_i}{A} = -D \nabla \rho_i \quad (1-9)$$

式中矢量 M_i 为单位时间内在浓度减小方向第 i 组分的质量输运量; D 为质量扩散系数, 其国际单位制单位为 m^2/s ; A 为流通面积。

单位面积的质量输运量也可以写成容积浓度 ρ_i 与某一速度矢量 V_i 的乘积

$$\frac{M_i}{A} = -D \nabla \rho_i = \rho_i V_i \quad (1-10)$$

式中 V_i 称为扩散速度。当 ρ 为常数时, 还可以用质量浓度 C_i 代去上式中的容积浓度 ρ_i , 于是得出菲克公式的另一种表达形式

$$V_i = -D \nabla (\ln C_i) \quad (1-11)$$

当存在压力梯度或温度梯度时也将引起质量输运。因此, 质量输运的一般公式可写为

$$V_i = -D \nabla (\ln C_i) - D_p \nabla (\ln p) - D_T \nabla (\ln T) \quad (1-12)$$

式中 D_p 和 D_T 分别为对应于压力梯度和温度梯度的质量扩散系数。通常上式右边后两项远较第一项为小, 因此, 常用的仍是菲克公式(式 1-9、式 1-10 或式 1-11)。

由于数据很少, 还不能确定幂次律或萨瑟兰关系能否用于估算质量扩散系数。

1.1.4 联系各种输运系数的无量纲量

如前所述, 既然热量、动量和质量是以完全相同的方式通过分子碰撞进行输运或“扩散”的, 则这些系数可通过下述一些无量纲量联系起来:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k} \quad (1-13)$$

$$Sc = \frac{\mu}{\rho D} \quad (1-14)$$

$$Le = \frac{k}{\rho c_p D} \quad (1-15)$$

分别称 Pr 为普朗特(Prandtl)数, Sc 为施密特(Schmidt)数, Le 为路易斯(Lewis)数。由这些无量纲量的定义式可以看出, Pr 数是介质扩散动量的能力与扩散热量的能力之比; Sc 数是介质扩散动量的能力与扩散质量的能力之比; Le 数则是介质扩散热量的能力与扩散质量的能力之比。显然, 这些无量纲量也只是介质本身的属性而与介质的宏观运动无关。或者说, 无论流体状态怎样, 只要有相同的热力学参数, 则这些无量纲量都相同。

在这三个无量纲量中, 本书涉及最多的是 Pr 数。根据单原子的气体运动学理论, Pr 数应等于 1。但双原子气体的

表 1-3 20℃时几种典型流体的 Pr 数

流体	Pr 数
水银	0.024
空气	0.72
氟利昂-12	3.7
水	7.0
乙醇	16
甘油	1200

Pr 数实际约等于 0.7, 它几乎与温度无关。表 1-3 列出几种典型流体在 20℃的 Pr 数。

1.2 输运定理

在描述流体运动或流场中任何特性的变化时, 通常有两种处理方法, 它们是考察空间各点变化的欧拉方法和追踪运动流体微团沿程变化的拉格朗日方法。对于一个流体微团, 其某一通用特征量 $\varphi = \varphi(x, t)$ 在拉格朗日方法与欧拉方法之间有如下联系:

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u_j \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \quad (1-16)$$

对于在拉格朗日坐标系中运动的体积为 V_0 的流体团, 通用特征量 φ 的积分可以表达为

$$\Phi(t) = \int_{V_0} \varphi dV_0 \quad (1-17)$$

Φ 是一个物理量, 其意义很明显: 当 $\varphi = \rho$ 时, Φ 代表该流体团

的质量;当 $\Phi = \rho V$ 时, Φ 代表该流体团的动量。应该注意到,该流体团的体积是随时间变化的, $V_0 = V_0(t)$ 。

对于欧拉坐标系中的控制体 V , V 不随时间变化。若在 t 时刻, $V = V_0(t)$, 相应的表面积为 A , 则 Φ 对于时间的变化率可以表述为

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_0(t)} \varphi dV_0(t) = \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \oint_A (\mathbf{Vn}) \varphi dA \quad (1-18)$$

或

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_0(t)} \varphi dV_0(t) = \int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{V}) \right] dV \quad (1-19)$$

式 1-18 或式 1-19 称为输运定理,或雷诺输运定理。式 1-18 右侧第一项表示单位时间内控制体 V 中所含物理量 Φ 的增量,通用特征量 φ 随时间的变化,是流场的不定常性造成的。方程右侧的第二项表示在单位时间内通过控制面 A 流出的相应物理量,是流场的不均匀性造成的。因此,输运定理的物理意义是运动着的流体团的某一物理量对时间的变化率等于单位时间内控制体 V 中所含该物理量 Φ 的增量与通过控制面 A 流出的相应物理量之和。

1.3 连续方程

对于一个确定的系统而言,质量守恒原理或连续方程可以简述为:在系统中不存在源或汇的条件下,系统的质量不随时间变化。若令 $\Phi = \rho$, 则有 $D\Phi / Dt = 0$ 。利用雷诺输运定理,可得质量守恒原理欧拉方法的数学描述,即欧拉坐标系下的连续方程。

积分形式:
$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_A \rho (\mathbf{Vn}) dA = 0 \quad (1-20)$$

微分形式:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (1-21)$$

1.4 运动方程

动量定理可以简述如下:系统的动量对于时间的变化率等于外界作用在该系统上的合力。若令 $\Phi = \rho \mathbf{V}$, 则有 $D\Phi / Dt = \sum \mathbf{F}$ 。合力可以表达为