



GH

高等学校
工科电子类 规划教材

理论物理导论

李卫 刘义荣



北京理工大学出版社

理论物理导论

李 卫 刘义荣

北京理工大学出版社

(京)新登字 149 号

内 容 简 介

本书简明扼要地介绍理论物理方面的基础知识(不含电磁场理论)。内容由五部分组成:分析力学、量子力学、热力学、统计物理学和固体物理学的主要内容(晶格振动、格波与能带论基础——周期场中的电子)。除了着重概念阐述,以使工科学生易学易懂以外,在教材内容的处理上进行了一些尝试,以节省篇幅和学时。

本书为高等学校工科电子类微电子技术专业教材,亦可供电子元件与材料专业、激光专业等相近专业使用及有关工程技术人员参考。

理论物理导论

李 卫 刘义荣

*

北京理工大学出版社出版发行

各地新华书店经售

北京市万龙图文信息公司排版

永清县印刷厂印刷

*

850×1168 毫米 32 开本 15.875 印张 397 千字

1994 年 7 月第一版 1994 年 7 月第一次印刷

ISBN 7-81013-261-X/O·51

印数:1—2500 册 定价:12.50 元

前 言

本教材系按中国电子工业总公司的工科电子类专业教材1991—1995年编审出版规划,由“电子材料与固体器件”教材编审委员会“半导体物理与器件”编审小组征稿推荐出版。责任编辑为曹培栋。

本教材由北京理工大学刘义荣、李卫合编,西安交通大学刘秉钧担任主审。

本课程的参考学时数为72学时,其主要内容为量子力学、热力学与统计物理,另有一章经典力学简介。编写的目的是为把量子力学、热力学与统计物理两门课程合并为一门后,提供一份适用的教材,希望既能为后续课程提供足够的物理基础知识,又能节省一部分学时。为了使初学者认识到物理基础的重要作用,在选材时,有意将对于后续课程有重要意义的固体物理内容,如能带论、晶格振动等,作为物理基础理论的应用溶入教材之中,想在保持物理学本身的系统性的前提下,尽可能地向学生展示它的应用。对于工科中需要物理基础较多,所谓“偏理”专业来源,学完本教材之后,不经学习“固体物理”这门课,直接接触专业课应已无很大困难。使用本教材时注意,凡标题上加*号者均为选学内容,课堂讲授与否由教师掌握。有几章后面有附录,一部分是为学生学习时参考方便而设,如属复习性质的全微分与线积分、排列组合等;另一部分是估计到初学者并无足够的背景知识,阅读难免有困难而写入的。这主要是一些数学推导。这一部分附录材料在性质上也属于选学内容,也应由教师掌握是否在课堂上介绍,但学生在自学时希望教师能给予指导。

本教材由刘义荣编写量子力学部分,李卫编写经典力学简介及热力学,统计物理部分,最后共同协商统一全部书稿。参加审阅工作的还有华中理工大学的马稚尧同志,他们都为本书提供出许多宝贵意见,这里表示诚挚的感谢。由于编者水平有限,书中难免还存在一些缺点和错误,殷切失望广大读者批评指正。

编 者

1994年4月

目 录

第一章 经典力学简介

§ 1-1 自由度·约束与广义坐标	1
§ 1-2 拉格朗日方程	2
* § 1-3 小振动问题	8
§ 1-4 哈密顿函数·哈密顿方程	21
§ 1-5 哈密顿函数的物理意义	25
§ 1-6 例题	27
附录 哈密顿最小作用原理及变分法的初步概念	32
习题	37

第二章 薛定谔方程

§ 2-1 光的波粒二象性	39
§ 2-2 微观粒子的波粒二象性	44
§ 2-3 波函数和它的物理意义	47
§ 2-4 薛定谔方程	54
§ 2-5 一维无限深势阱中的粒子	60
§ 2-6 一维线性谐振子	66
§ 2-7 测不准关系式	73
§ 2-8 隧道效应	80
习题	89

第三章 力学量的算符

§ 3-1 算符的引入	91
§ 3-2 算符的本征值和本征函数	93
§ 3-3 算符的运算法则	95
§ 3-4 厄米算符本征函数的正交性和完全性	99
§ 3-5 力学量平均值的计算	102

§ 3-6	不同力学量同时有确定值的条件	105
§ 3-7	测不准关系式的严格证明	107
附录	狄拉克符号	109
	习题	115
第四章 原子的波函数和能级		
§ 4-1	有心力场中的粒子	117
§ 4-2	库仑有心力场中的电子	122
§ 4-3	轨道角动量算符	126
§ 4-4	核外电子的几率分布	132
	习题	137
第五章 定态微扰论·变分法		
§ 5-1	无简并定态微扰论	140
§ 5-2	氢原子基态能量	146
§ 5-3	有简并定态微扰论	150
§ 5-4	氢原子能级在均匀外电场中的分裂	154
§ 5-5	碱金属原子的能级	157
§ 5-6	变分法	161
	习题	167
第六章 电子自旋·全同粒子		
§ 6-1	电子自旋的实验证据	170
§ 6-2	角动量的普遍性质简介	171
§ 6-3	自旋算符和自旋波函数	173
§ 6-4	全同粒子波函数·泡利原理	176
§ 6-5	原子的电子壳层结构	182
§ 6-6	氢分子的共价键	184
	习题	192
第七章 电子在周期场中的运动——能带论基础		
§ 7-1	晶体结构简介	195
§ 7-2	周期场中电子的波函数——布洛赫函数	200
§ 7-3	克龙尼格-朋奈理想化模型	204
§ 7-4	近自由电子模型	212

§ 7-5	紧束缚模型	219
§ 7-6	金属、绝缘体和半导体的能带	225
§ 7-7	三维布里渊区·等能面	229
§ 7-8	晶体中电子的速度、加速度和有效质量	233
§ 7-9	空穴	237
	习题	239
第八章 含时微扰论		
§ 8-1	含时微扰论	241
§ 8-2	电子在周期微扰下的跃迁几率	244
§ 8-3	吸收和发射光子的几率	247
§ 8-4	量子跃迁的选择定则	254
	习题	257
第九章 热力学的基本概念		
§ 9-1	简史与特点	258
§ 9-2	概念和定义	261
	习题	269
第十章 热力学第一、第二定律		
§ 10-1	概述	271
§ 10-2	有关功和热的说明	272
§ 10-3	热力学第一定律·内能	276
§ 10-4	内能的意义	279
§ 10-5	热力学第一定律的应用	280
§ 10-6	热力学第二定律	292
§ 10-7	热力学第二定律的两种叙述方式等效的证明	294
§ 10-8	卡诺定理	296
* § 10-9	热力学温标	299
§ 10-10	克劳修斯不等式	305
§ 10-11	熵的引入	309
§ 10-12	熵增原理	312
§ 10-13	熵增原理与热力学第二定律	314
§ 10-14	TdS 方程——热力学第一、第二定律的结合	316

附录 关于全微分与线积分的复习	319
习题	323
第十一章 热力学函数	
§ 11-1 独立变量的选择	326
§ 11-2 焓·自由能·吉布斯函数	330
§ 11-3 麦克斯韦关系·吉布斯-亥姆霍兹方程	334
§ 11-4 热动平衡判据及条件	341
§ 11-5 化学势·相平衡条件	346
* § 11-6 热力学第三定律	349
习题	356
* 第十二章 热力学的应用	
§ 12-1 相律	358
§ 12-2 化学平衡·质量作用定律	361
§ 12-3 绝热去磁以获得低温与热力学第三定律	365
§ 12-4 热辐射问题	370
第十三章 统计物理的基本概念	
§ 13-1 引言	378
§ 13-2 分子相空间	381
§ 13-3 宏观态与微观态	384
§ 13-4 等几率原理·热力学几率	391
§ 13-5 最可几分布	398
§ 13-6 熵的统计意义	403
附录 I 排列·组合·几率	408
II 阶乘的计算——斯提令公式	414
习题	417
第十四章 三种统计法及其应用	
§ 14-1 三种统计法的热力学几率表示式	418
§ 14-2 三种统计分布函数	423
§ 14-3 $M-B$ 分布函数	428
* § 14-4 麦克斯韦分子速度分布律	431
§ 14-5 能量均分原理	436

§ 14-6	F - D 分布函数	438
§ 14-7	$(E_F)_0$ 的计算	444
§ 14-8	经典近似	448
§ 14-9	电子的平均能量与比热(定容)	451
* § 14-10	热电子发射	454
§ 14-11	B - E 分布函数	462
* § 14-12	光子统计·普朗克黑体辐射公式	463
§ 14-13	声子统计·固体的比热	466
附录 I	积分 $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx$ 的计算	483
	I E_F 值的计算	489
	习题	493
	参考书目	495
	常用常量表	497

第一章 经典力学简介

所谓经典力学,即是牛顿力学,这是一门最古老的科学,它的创建要归功于伽利略(Galileo Galilei 1564—1642)、惠更斯(C. Huygens 1629—1695)及牛顿(I. Newton 1643—1727)等人。1687年在伦敦出版了牛顿的著作《自然哲学的数学原理》,牛顿系统地阐述了他的统一而和谐的理论,他的基本观点在此后二百多年里一直在物理学中占统治地位,直到相对论和量子理论问世,才给它一次根本性的冲击。尽管如此,现在当我们研究、分析宏观物体的运动时,牛顿力学仍旧是有力的工具,何况,在科学中没有无源之流,即使在量子力学中,我们也不能完全割断它与牛顿力学的联系,这正是我们今天还要学习它的原因。

提起牛顿力学,我们马上会想到著名的牛顿三定律,这在中学以及大学的普通物理课程中都已经介绍过了。现在我们要简要介绍的是继牛顿之后的一个多世纪里,在牛顿所创建的原理的基础之上,经过诸如拉格朗日(J. L. Lagrange 1736—1813)、哈密顿(W. R. Hamilton 1805—1865)等人的努力所建立起来的“分析力学”体系。分析力学这个名称就是从拉格朗日的著作的标题: *Mechanique Analytique* 来的。

§ 1-1 自由度·约束与广义坐标

为了确定一个质点(在描述其运动时,可以忽略其大小,当作一个“点”来处理的物体)在空间的位置,常需要三个坐标 x 、 y 、 z 。假如质点是完全自由的,即 x 、 y 、 z 彼此独立,则可称该质点有三

个自由度。但在某些情况下,例如限制质点在某一特定的轨道上运动,则 x, y, z 三变量之间存在着一定的关系,即 x, y, z 三变量并非彼此独立。例如,限制质点在平面上运动,由一般的平面方程 $Ax + By + Cz + D = 0$, 可见确定质点位置的 x, y, z 已不可能彼此无关,独立地选定 x, y , 则 z 就确定了,所以该质点的自由度只剩下两个了,该平面方程即称为“约束方程”。如果设想限制该质点只在一条直线上运动,且这条直线为两个平面的交线,即此直线由 $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 及 $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 联立确定,则约束方程现在是两个,可供独立选择的坐标变量只余一个,该质点的自由度即为 1。一般说来,由 N 个质点组成的系统,如果各个质点彼此无影响,每个质点均不受任何约束,则此系统由 $3N$ 个独立坐标来描述,如果有形式为 $f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_{3N}, y_{3N}, z_{3N}) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) 的 k 个约束方程,则此系统只需 $3N - k$ 个独立坐标来描述,称此系统具有 $3N - k$ 个自由度。为单值地确定一个系统的位置所必需给定的独立变量的数目,叫作这个系统的自由度数。这些独立量不一定非是笛卡儿直角坐标不可,根据问题的条件,有时选择某一种其他的坐标可能更合适。如研究单摆,用摆球偏离铅直方向的角度 θ 来表示摆球的位置就足够了,又如研究除彼此间相互吸引的作用外,无其他作用力的二质点系统的运动,利用球面坐标更方便(后面有具体讨论)。所以,为了方便,用足够描述有 s 个自由度的系统的位置的 s 个量记以 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_s$, 称为该系统的 s 个广义坐标,广义坐标 q 对时间的微商, dq/dt , 记以 \dot{q} , 称为广义速度。以后我们即采用这种规定,在量的符号 x 上方加一个点, \dot{x} , 代表 x 对 t 的一次导数,加两个点, \ddot{x} , 代表 x 对 t 的二次导数。

§ 1-2 拉格朗日方程

在牛顿运动定律中,出现的量是力、速度、加速度等带有方向

的量,而拉格朗日所建立的方程式,引用广义坐标,以力学系统的动能和势能作为基本量来分析问题,其优越性在处理受约束的力学系统的问题时,特别明显。因为用拉格朗日方程来分析问题时,只需要与系统的自由度数一样多的方程式就够了。为了介绍上的方便,我们先用直角坐标从牛顿运动方程导出拉格朗日方程(以下简称拉氏方程)的形式,然后再过渡到用广义坐标表示的形式。

1. 用拉格朗日函数表示牛顿运动方程

设第 i 个质点的三个直角坐标为 x_i, y_i, z_i , 质量为 m_i , 则 N 个质点的牛顿运动方程为

$$m_i \ddot{x}_i = X_i, m_i \ddot{y}_i = Y_i, m_i \ddot{z}_i = Z_i, (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (1-1)$$

其中 $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ 代表第 i 个质点的加速度在 x, y, z 三个方向上的分量, X_i, Y_i, Z_i 则代表作用于该质点的力的三个分量。对于每一个质点都有类似的方程, 所以含有 N 个质点的力学系统应有 $3N$ 个这样的方程。

定义用直角坐标表示的质点动能 T 为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \dots + \frac{1}{2} m_N (\dot{x}_N^2 + \dot{y}_N^2 + \dot{z}_N^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \end{aligned} \quad (1-2)$$

同时,如果我们讨论的是所谓“保守力系”,则可以引入一个势函数 $U(x, y, z)$ 而有

$$X_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i}, Y_i = - \frac{\partial U}{\partial y_i}, Z_i = - \frac{\partial U}{\partial z_i}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (1-3)$$

从静电场中电场强度等于静电势的梯度的负值有助于想象这种关

系的存在。

由(1-2)式不难得到

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2} m_i \times 2 \dot{x}_i = m_i \dot{x}_i$$

由此可得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{d(m_i \dot{x}_i)}{dt} = m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} = m_i \ddot{x}_i$$

由(1-1)式, $m_i \ddot{x}_i$ 正是 X_i , 于是

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = X_i$$

再结合(1-3)式, 可得

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad (1-4)$$

同样可以写出其余两个分量的式子

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial U}{\partial y_i} = 0 \quad (1-4)'$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} + \frac{\partial U}{\partial z_i} = 0 \quad (1-4)''$$

现在引入拉格朗日函数(以下简称拉氏函数) L , 定义为

$$\begin{aligned} L &= L(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N) \\ &= T - U \end{aligned} \quad (1-5)$$

由于动能 T 只是速度 $\dot{x}_1, \dots, \dot{z}_N$ 的函数, 而 U 又限于只是坐标 x_1, \dots, z_N 的函数, 因此在引入 L 后, 式(1-4)、(1-4)'、(1-4)''可以写成

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} - \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, N) \quad (1-6)$$

(1-6)式,即牛顿运动定律用拉氏函数表示的形式。下面即将论证,把直角坐标 x, y, z 以及 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 变换成广义坐标 $q_1, q_2, \dots, q_s, \dots$ 以及 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, \dots$, 对于一个保守力系, (1-6)式形式不变。

2. 拉格朗日方程

假如有一个由 N 个质点组成的质点系, 具有 s 个自由度, 可由 s 个广义坐标确定其位置, 一般说来, 在每个质点的三个直角坐标与 s 个广义坐标之间存在着联系, 这种联系称为“变换方程”, 如

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_s), y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_s) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_s), (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (1-7)$$

坐标 x_i, y_i, z_i 决定一个位置矢量 \mathbf{r}_i , 于是有

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i[q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)], (i = 1, 2, \dots, N) \textcircled{1} \quad (1-8)$$

将牛顿运动定律(1-1)写成矢量形式

$$m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \mathbf{F}_i, (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1-9)$$

\mathbf{F}_i 的三个分量即 X_i, Y_i, Z_i , 将(1-9)矢量式两边同取与 $\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j$ 的内积, 并对全部质点求和, 得

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, (j = 1, \dots, s) \quad (1-10)$$

上式的右方可视为广义力。为将(1-10)写成更为简洁的形式, 利用

① 此处 \mathbf{r} 是通过 q 以隐函数的形式与时间 t 有关, 如果遇到所谓“非定常约束”, 即约束条件本身就是时间的显函数的情形, 例如一个带孔小珠在一本身就在运动中的线上滑动, 则 \mathbf{r} 应写为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}[q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t), t]$, 对此不再进行讨论。

求积的导数的法则

$$UV = (UV) - U\dot{V}$$

则(1-10)式的左方为

$$\sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \quad (1-11)$$

其中两项可以改写如下：

(1)由于

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = \sum_{k=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

再将 $\dot{\mathbf{r}}_i$ 对广义速度 \dot{q}_j 求偏导数

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^S \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_j}$$

由于选定各 q 是彼此独立的,所以 $\partial \dot{q}_k / \partial \dot{q}_j$ 形式的项只有在 $k=j$ 时等于 1,其余 $k \neq j$ 时均等于零,所以

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (1-12)$$

(2)我们还可以导出

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \quad (1-13)$$

因为
$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^S \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j$$

其中利用了将 \mathbf{r}_i 对 q_k, q_j 依次求导与次序无关,又因为

$$\sum_{j=1}^S \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right)$$

故(1-13)得证,此式表明运算 d/dt 与 $\partial/\partial q_k$ 可以交换,由(1-12)及(1-13)两式,则(1-11)可以写成

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\mathbf{r}}_i \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \right) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) \right] \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T - \frac{\partial}{\partial q_j} T \tag{1-14}
 \end{aligned}$$

其中 $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$ 是系统的总动能,于是(1-10)式成为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T - \frac{\partial}{\partial q_j} T = Q_j, (j = 1, 2, \dots, s) \tag{1-15}$$

式中右方的 Q_j 代表广义力。在导出(1-15)式时,出发点是牛顿运动定律,对于力的性质未加任何假设与限制,所以这 s 个二阶微分方程对于保守力与非保守力都能适用,即对 Q_j 没有任何限制。如果用于保守力系,则可以用势函数 U 的梯度的负值 $-\partial U/\partial q_j$ 来代替广义力 Q_j ,于是(1-15)又可以写成

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T - \frac{\partial}{\partial q_j} T = - \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

或

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T - \frac{\partial}{\partial q_j} T + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0$$

因为 U 不是广义速度 \dot{q} 的函数,所以 $\partial U/\partial \dot{q}_j = 0$, $-\frac{d}{dt} (\partial U/\partial \dot{q}_j)$ 当然也等于零,把此项写入上式,得到