数学基础知识丛书

极坐标与参数方程

赵 霖

江苏人民出版社

极坐标与参数方程

赵　霖

江苏人民出版社

极 坐 标 与 参 數 方 程

赵　霖

*

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行

江苏宜兴印刷厂印刷

1979 年 10 月第 1 版

1979 年 10 月第 1 次印刷

印数：1—53,000 册

书号：13100·032　定价：0.41 元

内 容 提 要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》(试行草案)精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书分两个部分，第一部分为极坐标，介绍极坐标的概念、各种曲线的极坐标方程及求两曲线交点的方法；第二部分为参数方程，阐述参数方程与普通方程的关系和作图方法，并介绍一些常见曲线的参数方程及其图形。

目　录

一、极 坐 标

我们知道，在平面上建立直角坐标系，可以使得平面上的点和一对有序实数之间建立起一一对应的关系。从而平面上的曲线可以用两个变量所满足的方程来表示，并且可以通过对方程的讨论来研究曲线的性质。这就是说，几何问题可以用代数的方法来进行研究，这是解析几何所常用的方法。

但是在研究某些问题时，如果通过建立直角坐标系来讨论，往往感到很不方便，甚至会遇到很大困难。因此必须"用不同的方法去解决不同的矛盾"，选择另外的坐标系才便于解决问题。下面就介绍另一种常用的坐标系——极坐标系。用它来建立平面上的点与一对有序实数之间的对应关系，可以讨论一些不便于用直角坐标系来研究的曲线与方程的关系。

§1 极坐标系

1. 平面上点的极坐标

在三大革命斗争实践中，常常利用距离和方向来确定一个目标的位置。例如：

指挥所向炮位 O 指示射击目标 P 的位置时，常常是指出距离 $|OP|$ 和目标 P 的方位角 $\angle NOP$（图 1）。炮兵战士根

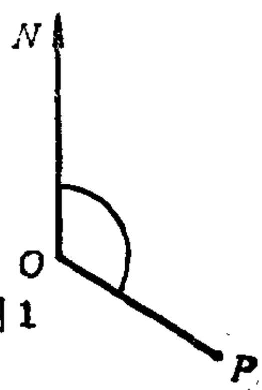


图 1

据这一对数字——$|OP|$和$\angle NOP$的值，可以很迅速地调正炮口水平角和射程，立即摧毁轰击目标。不然的话，如果给出的目标位置是两个直角坐标的数值，那还得通过换算，才能进行射击，这样便会贻误战机。

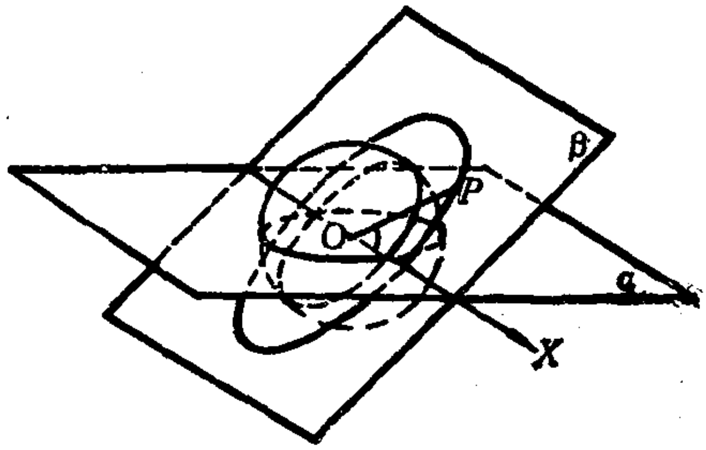


图 2

人造地球卫星P是以地球中心O为引力中心，沿椭圆轨道运行的(图 2)。设卫星轨道平面β与地球赤道平面α的交线为OX，那么，卫星P在轨道平面β上任何时刻的位置，可以用卫星P到地心O的距离$|OP|$和旋转角$\angle XOP$来确定。

在这两个例子中，有一个共同的特点，那就是它们描述平面上点P的位置都是利用P到一定点O的距离和射线OP的方向这两个数值。这就说明可以用长度和角度这两个数值来确定平面上点的位置，这就是极坐标系的基本思想。

下面我们介绍建立平面上极坐标系的方法：

先在平面上取一定点O，从O引一射线OX(图 3)，再确定一个长度单位和计算角度的正方向(通常选择逆时针方向为正向)，这样就构成了一个**极坐标系**。定点O称为**极点**，射线OX称为**极轴**，今后我们把已经建立了极坐标系的平面称为**极坐标平面**。

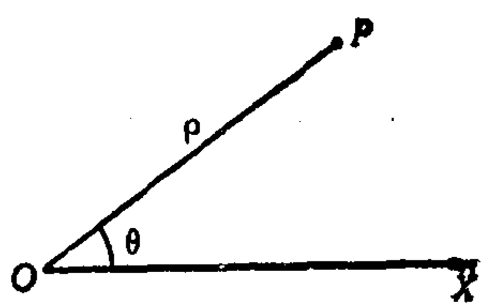


图 3

这样，对于极坐标平面上的任意一点P，如果P到极点

O的距离$|OP|$记为ρ，以极轴OX为始边，射线OP为终边的角$\angle XOP$记为θ，那么点P的位置完全可以由一对有序实数ρ、θ来确定．我们把有序实数对（ρ，θ）称为点P的**极坐标**，记为$P(\rho,\ \theta)$。ρ称为点P的**极半径**，简称**极径**，θ称为点P的**极角**。

例1　在极坐标平面上，作出极坐标为$\left(2,\ \frac{\pi}{4}\right)$和$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{2\pi}{3}\right)$的点．

解　在极坐标平面上，作射线OA，使

$$\angle XOA=\frac{\pi}{4}$$

在OA上取一点P_1，使

$$|OP_1|=2$$

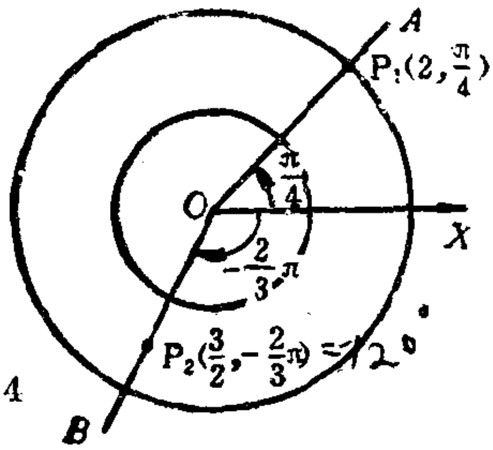


图4

那么P_1就是极坐标为$\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$的点（图4)。

再作射线OB，使

$$\angle XOB=-\frac{2\pi}{3}$$

在OB上取一点P_2，使

$$|OP_2|=\frac{3}{2}$$

那么P_2就是极坐标为$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{2\pi}{3}\right)$的点。

图5中的A、B、C、D、E、F各点分别是极坐标为$\left(5,\frac{\pi}{6}\right)$、$\left(3,-\frac{3\pi}{2}\right)$、$\left(4,\ \frac{3\pi}{4}\right)$、$(6,\ \pi)$、$\left(5,\ -\frac{5\pi}{6}\right)$、$\left(2,\ \frac{11\pi}{6}\right)$的点。

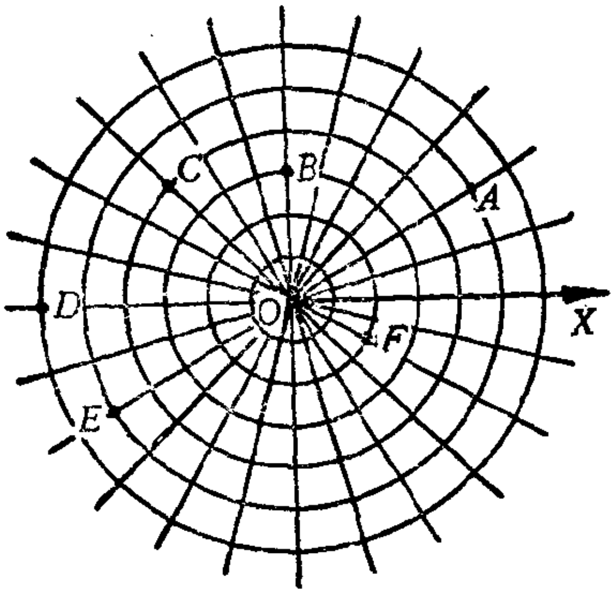


图 5

不难看出，对于极坐标平面上的任一点P，如果把射线由OX开始，以逆时针方向绕O旋转到OP的位置所成的角记为θ，那么$\angle XOP$也可以看作是射线由位置OX开始，以逆时针方向绕O旋转一周后继续旋转，最后落在OP的位置所形成的角(图6甲)。这时点P的极角是$\theta+2\pi$。当然$\angle XOP$也可以看作是射线由位置OX开始，以逆时针方向绕O旋转两周后继续旋转，最后落在OP的位置所形成的角，所以点P的极角也可以看作是$\theta+4\pi$。……。

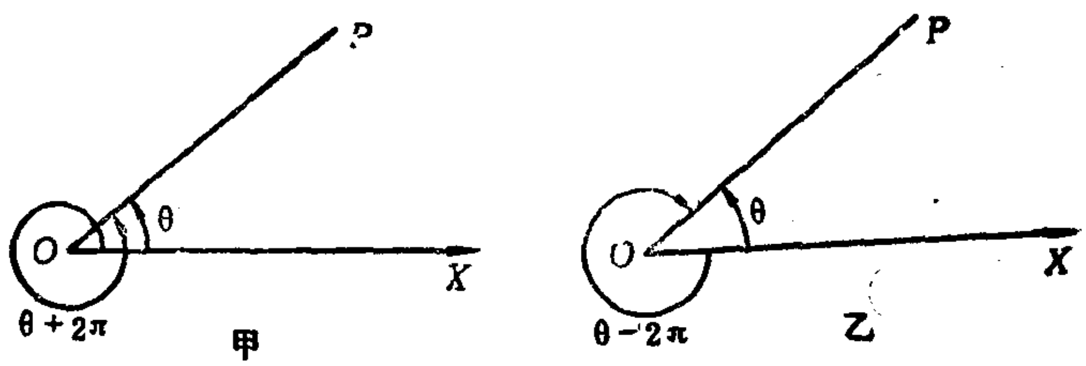


图 6

一般地，$\angle XOP$可以看作是射线由位置OX开始，以逆时针方向绕O旋转n周后继续旋转，最后落在OP的位置所

形成的角，所以点P的极角可以看作是$\theta+2n\pi$。($n=1$，2，……)。

同样，$\angle XOP$可以看作是射线由OX开始，以顺时针方向绕O旋转到OP的位置所成的角，这时点P的极角是$\theta-2\pi$(图6、乙)。当然，$\angle XOP$也可以看作是射线由OX开始，以顺时针方向绕O旋转一周后继续旋转，最后落在OP的位置所形成的角，这时点P的极角是$\theta-4\pi$。……。

一般地，$\angle XOP$可以看作是射线由OX开始，以顺时针方向绕O旋转($n-1$)周后继续旋转，最后落在OP的位置所形成的角，所以点P的极角可以看作是$\theta-2n\pi$($n=1$，2，……)。

因此，点P的极角一般可表示为：$\theta+2n\pi$(n为整数)。所以极坐标(ρ, $\theta+2n\pi$)(n为整数)与极坐标(ρ, θ)表示的是同一点。

例如图5中点A的极坐标是$(5, \frac{\pi}{6})$，也可以表示为：

$$\left(5, \frac{13\pi}{6}\right)、\left(5, \frac{25\pi}{6}\right)、\cdots\cdots$$

或者

$$\left(5, -\frac{11\pi}{6}\right)、\left(5, -\frac{23\pi}{6}\right)、\cdots\cdots。$$

所以点A的极坐标可以一般地表示为$\left(5, \frac{\pi}{6}+2n\pi\right)$($n$为整数)。

但是要注意，当$\rho=0$时，点P与极点O重合，这时θ的值是不确定的，也就是极点O的极角可以取任意实数值。所以极点O的极坐标可表示为$(0, \theta)$(θ为任意实数值)。如$(0, 0)$、$(0, \frac{\pi}{6})$或$(0, -\frac{3\pi}{4})$都是极点O的极坐标。因

此，在极坐标平面上，极点O是个特殊的点，今后在有些问题的讨论中，必须注意它的这个特殊性。

2. 极坐标概念的推广

根据前面极坐标的定义，平面上任一点P的极径ρ是点P到极点O的距离，所以必有$\rho \geqslant 0$。但是在某些情况下，为了研究问题的方便，也允许极坐标平面上点P的极径ρ取负值。这时ρ就不能理解为点P到极点O的距离了。下面我们来讨论当点P的极径ρ是负值时，点P的位置是如何确定的。

当$\rho<0$时，点$P(\rho, \theta)$的位置按下列规则确定：

在极坐标平面上作射线OA（图7），使

$$\angle XOA=\theta.$$

在OA的反向延长线上取点P，使

$$|OP|=|\rho|,$$

那么，点P就是极坐标为$(\rho, \theta)(\rho<0)$的点。

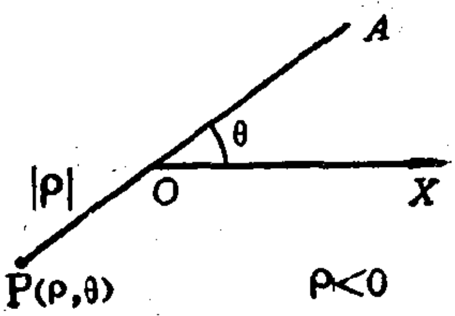


图7

例2 作极坐标为$\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$的点。

解 作射线OA，使

$$\angle XOA=\frac{2\pi}{3},$$

在OA的反向延长线上取一点P，使

$$|OP|=|-3|=3$$

那么，点P就是极坐标为$\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$的点（图8）。

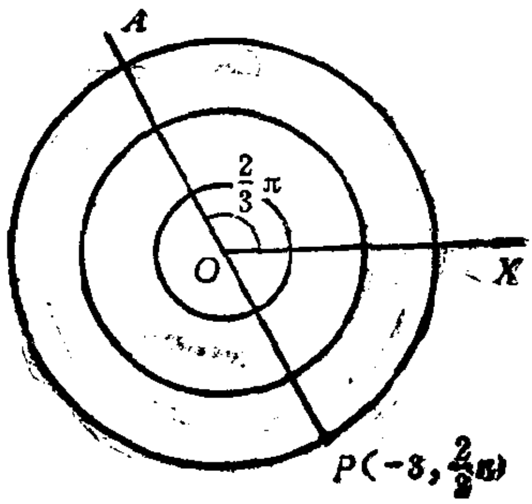


图8

图9中的A、B、C、D、E各点分别是极坐标为

$(-5,\frac{\pi}{4})$、$(-9,\frac{8\pi}{3})$、$(-3,-\frac{11\pi}{12})$、$(-7,\frac{19\pi}{12})$、$(-8,-\frac{25}{12}\pi)$的点.

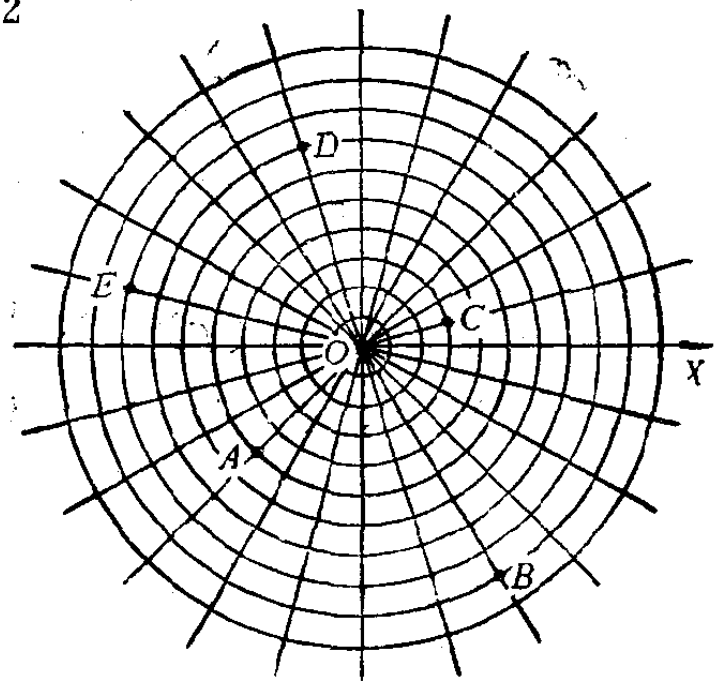


图9

由图10可见，无论是$\rho<0$，还是$\rho>0$，也不管θ是什么值，坐标(ρ,θ)和$(-\rho,\theta+\pi)$在极坐标平面上，总表示同一个点．因而，今后如果遇到$\rho<0$的情形时，可以利用这一关系，将问题转化为$\rho>0$的情形来处理．如图9中点$A(-5,\frac{\pi}{4})$的极坐标也可以表示为$(5,\frac{5\pi}{4})$．

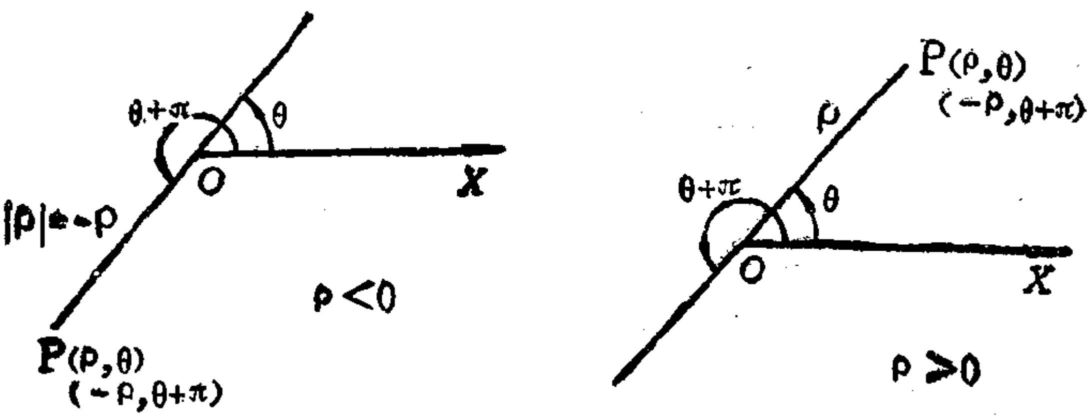


图10

极坐标概念经过这样推广以后，ρ、θ的取值范围可以是$-\infty<\rho<+\infty$，$-\infty<\theta<+\infty$。也就是ρ、θ都可以取任意实数值。

如果给定一对有序实数（ρ，θ）作为点P的极坐标，那么点P在极坐标平面上的位置便唯一地确定了。但是倒过来，对于极坐标平面上的任一点P，它的极坐标却不是唯一的，而是有无限多对。

如图9中点A的极坐标可以是（$\rho>0$）：

$$\left(5,\ \frac{5\pi}{4}\right)、\left(5,\ \frac{5\pi}{4}\pm 2\pi\right)、\left(5,\ \frac{5\pi}{4}\pm 4\pi\right)、$$

……也可以是（$\rho<0$）：

$$\left(-5,\frac{\pi}{4}\right)、\left(-5,\frac{\pi}{4}\pm 2\pi\right)、\left(-5,\frac{\pi}{4}\pm 4\pi\right)、\cdots\cdots$$

一般地，如（ρ，θ）是极坐标平面上点P的极坐标，那么（ρ，$\theta+2n\pi$）及（$-\rho$，$\theta+(2n+1)\pi$）（n为整数）也都是点P的极坐标。我们可以将它统一表示为

$$[(-1)^n\rho,\ \theta+n\pi]\ (n\text{为整数})$$

这就是P（ρ，θ）的极坐标的一般表示式。

我们知道，在平面上建立了直角坐标系后，每一对有序实数（x，y）可以确定平面上一个点的位置。倒过来，在直角坐标平面上的每一个点有且只有一对有序实数（x，y）作为它的直角坐标，也就是通常所说的平面上的点和一对有序实数之间存在着一一对应的关系。但是由上面的讨论可以知道，极坐标概念推广以后，极坐标平面上的点和一对有序实数之间并不是一一对应的关系。这是极坐标与直角坐标显著不同的地方。以后在有关曲线的极坐标方程的讨论中，常常需要注意这一点。

在有些情况下，为了讨论问题的方便，我们可以限制

ρ、θ 的取值范围为

$$\rho \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi;$$

或 $$\rho \geqslant 0, \qquad -\pi < \theta \leqslant \pi.$$

这个ρ、θ的取值范围称为点的极坐标的**主值范围**。如果点的极坐标在这个范围内取值，那么极坐标平面上的点P（除极点O外）与有序实数对（ρ，θ）之间保持一一对应关系。也就是平面上任一点P（除极点O外）具有唯一确定的极坐标（ρ，θ）；倒过来，给定主值范围内的任一有序实数对（ρ，θ）作为平面上点的极坐标，那么它也唯一地确定了平面上一点P的位置。

例 3　求点P_1（2，$\frac{\pi}{6}$）关于极轴或极点对称的点的极坐标。（$\rho \geqslant 0$，$-\pi < \theta \leqslant \pi$）

解　设P_2为P_1关于极轴的对称点（图11），则 $|OP_2| = |OP_1| = 2$，

$\angle XOP_2 = -\angle XOP_1 = -\frac{\pi}{6}$。

所以P_2的坐标为$(2, -\frac{\pi}{6})$。

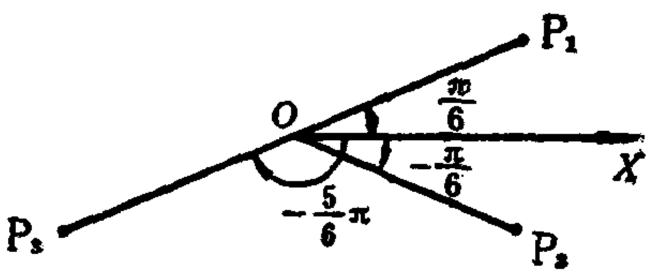


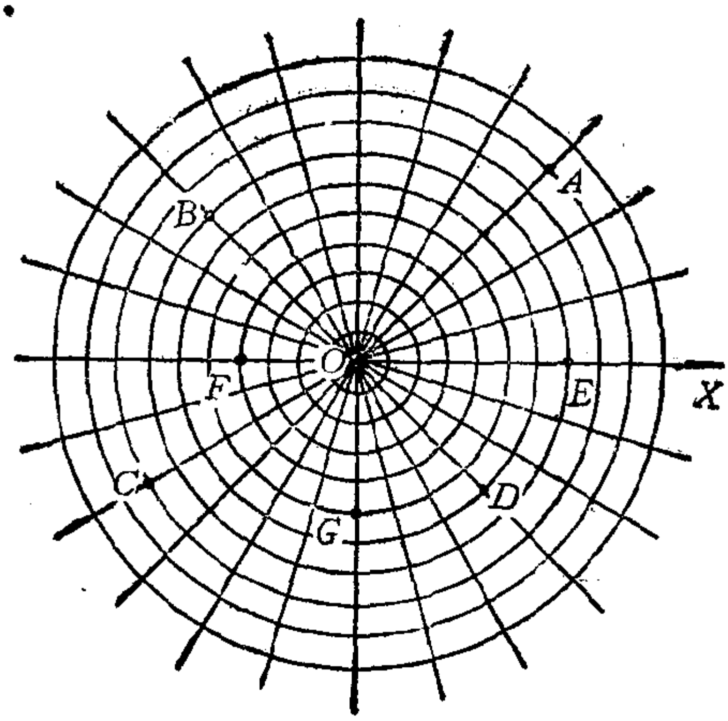
图11

设P_3为P_1关于极点的对称点，则$|OP_3| = |OP_1| = 2$，$\angle XOP_3 = \angle XOP_1 - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$，所以$P_3$的坐标为（$2$，$-\frac{5\pi}{6}$）。

至于平面上点的极坐标ρ、θ的取值范围是选取$\rho \geqslant 0$，$0 \leqslant \theta < 2\pi$或$\rho \geqslant 0$，$-\pi < \theta \leqslant \pi$，还是选取$\rho \geqslant 0$，$-\infty < \theta < +\infty$，或$-\infty < \rho < +\infty$，$-\infty < \theta < +\infty$，应根据实际问题的需要和讨论的方便而定。

习　题　一

1. 写出图中 A、B、C、D、E、F、G 各点的极坐标（$\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$）.



第 1 题

2. 已知点的极坐标分别是 $A\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$、$B\left(6, -\frac{2\pi}{3}\right)$、$C\left(5, \frac{7\pi}{6}\right)$、$D\left(2, -\frac{5\pi}{4}\right)$、$E\left(-5, \frac{3\pi}{4}\right)$、$F(-2, \pi)$、$G\left(-6, -\frac{\pi}{6}\right)$、$H\left(-4, \frac{3\pi}{2}\right)$，在极坐标平面上作出各点.

3. 求出上题中各点关于极轴所在直线的对称点和关于极点的对称点的极坐标（$\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$）.

4. 证明极点 O 和 $A\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$、$B\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$ 为一等边三角形的三顶点.

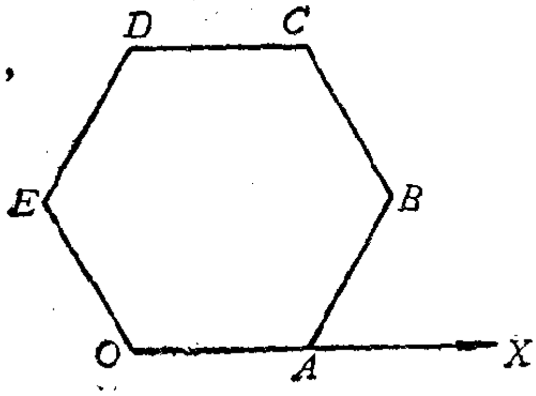
5. 求顶点在极点 O，一边在极轴 OX 上，边长为 a 的正六边形（如图），各顶点的极坐标（$\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$）.

6. 写出$A(5, \frac{\pi}{3})$的其它极坐标，使

(1) $\rho<0$, $0\leqslant\theta<2\pi$;

(2) $\rho>0$, $-2\pi<\theta\leqslant0$;

(3) $\rho<0$, $-2\pi<\theta\leqslant0$.



第 5 题

7. 求A、B两点间的距离：

(1) $A(5, \frac{\pi}{4})$, $B(5, \frac{5\pi}{4})$

(2) $A(-6, \frac{\pi}{6})$, $B(10, \frac{\pi}{6})$

(3) $A(\rho_1, \theta_1)$, $B(\rho_2, \theta_2)$ ($\rho_1\geqslant0$, $\rho_2\geqslant0$)

§2 曲线的极坐标方程

在平面上建立极坐标系后，我们可以用一对有序实数来描述平面上点的位置，因而同直角坐标平面上的曲线可以用含有变量x，y的方程表示一样，极坐标平面上的曲线也可以用含有变量ρ和θ的方程来表示。以后可以看到，有些曲线在极坐标系中的方程，比在直角坐标系中的方程简单得多，便于讨论和研究。

同直角坐标方程类似，我们可以对曲线的极坐标方程定义如下：

设含有ρ、θ的方程$F(\rho, \theta)=0$及极坐标平面上的曲线C，如果

(1) 曲线C上任一点P的极坐标(ρ, θ)必满足方程$F(\rho, \theta)=0$；

(2) 以满足方程$F(\rho, \theta)=0$的实数对(ρ, θ)作为