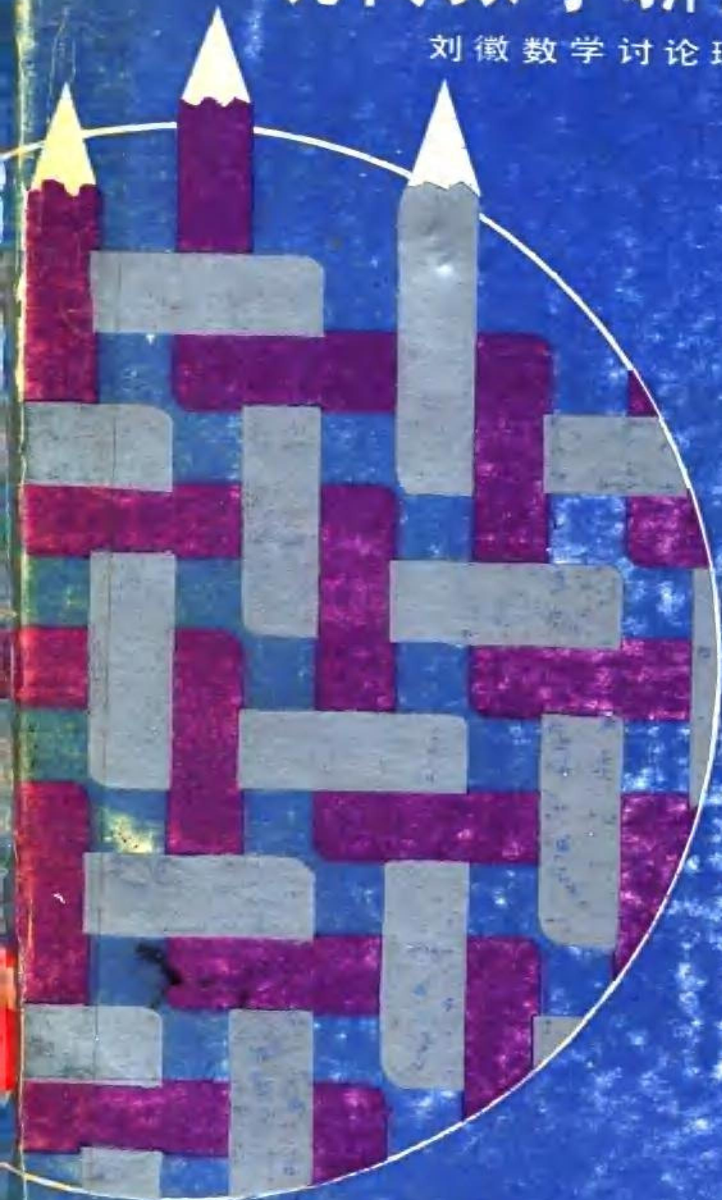
吴文俊 主编

现代数学新进展

刘徽数学讨论班报告集



安徽科学技术出版社

现代数学新进展

刘徽数学讨论班报告集 ● 刘徽数学讨论班报告集

安徽科学技术出版社

责任编辑：杨家骝
封面设计：王国亮

现代数学新进展
刘徽数学讨论班报告集
吴文俊　主编
安徽科学技术出版社出版
（合肥市金寨路283号）
新华书店经销　巢湖地区印刷厂印刷
*
开本：850×1168　1/32　印张：7.625　字数：189,000
1988年12月第1版　1988年12月第1次印刷
印数：2,000

ISBN 7-5337-0012-0/O·1　定价：4.05元

序

1985年10月4日至13日，中国科学院系统科学研究所在部分同志倡导下，举办了以刘徽命名的数学讨论班，邀请十几位数学专家对现代数学的某些领域及其成就作了概括性报告。本书就是这些报告的一个综合。

这一讨论班的出现受益于驰名国际的Bourbaki讨论班的启发。

本世纪30年代，法国的一些青年数学家创立了Bourbaki学派。学派的主要创建人如A.Weil,H.Cartan,C.Chevalley,T.Dieudonné, J.Delsarte, Ch.Ehresmann等，都是当时法国培养数学家的中心和基地——巴黎高等师范学校的学生。这些青年后来都在学术上取得了杰出的成就，从而成为国际数学界的巨擘。但是，他们的活动并不局限于个人的学术研究。他们以Bourbaki为集体，举办了若干对全世界数学发展有重大与深远影响的活动。其一是《数学原理》全书的编写，其二是Bourbaki讨论班的设立。

数学经过几千年的发展，已成为分支庞杂的宏伟体系。学者终其一生，即使是一流大师，也往往只能在少数领域有所建树，很难了解数学全貌。Bourbaki集体提出了用结构这一概念来贯

串整个数学，并着手编写《数学原理》，从无结构的集合论与具有最基本结构的实数论开始，依次进入结构不同逐步丰盈的各个领域。该书各分册由Bourbaki中成员分头执笔，但是必须经过集体讨论，集体修改，并以Bourbaki署名。每本书的编写，往往数易其稿。至今已出版数十分册，历时四五十年，但尚不能预料完成的时日。编写工作也已由Bourbaki中老的一代交卸给新的一代。这部鸿篇巨制不仅对数学的发展有巨大的影响，而且给法国数学界带来了极高的声誉。

博与精难以得兼。数学家为自己所从事的课题研究，已耗费了大部分精力和时间，对与研究课题无关的领域，往往无力涉猎。Bourbaki 讨论班之设立恰好弥补了这一缺憾。这一讨论班实质上是一种数学动态讨论班，报告的内容并非个人的研究成果，而是介绍国际上当前某些重大发现。该讨论班一年举办三次报告会，每次约三天；在报告会的中间提出下一次值得介绍的课题，并由与会者自告奋勇地去准备，有时也邀请外人作报告。报告人在报告时往往融合自己的思想和创见。由于其内容的精辟，影响已远远越过了法国国界。历届讨论班都编印报告论文集刊行，成为数学上创新的重要源泉，为全世界各个不同领域中的数学家共同的重要参考文献。笔者50年代初参加这一讨论班时，全班不过20来人，在巴黎高等师范学校的一个小教室中举办。1982年重游巴黎时，地点已移到巴黎Poincaré研究所的一个阶梯教室。笔者到达时虽不算晚，但不仅座无虚席，而且阶梯过道上也坐满了人，后来者只好立于门外。许多人是专程从远道赶来参加的。

Bourbaki学派对青年一代的培养极为重视。姑且不说老一辈中如Weil，Cartan曾获得可与Nobel奖相埒的Wolf奖，在他们培育之下成长的如L. Schwartz，J. P. Serre，R. Thom，A. Grothendieck，P. Déligne等，都先后获得了在数学界享有最高荣誉但只授予青年数学家的Fields奖。

50年代以来，Bourbaki的影响已波及整个数学界。青年数学家纷纷将Bourbaki奉为圭臬，以《数学原理》为学习基础，钻研Bourbaki学派的著作，追随他们提出的研究方向，接受他们的结构思想、推行他们倡导的公理化体系。

这些虽然都是Bcurbaki学派的伟大业绩，但还仅仅是其外部表现，而不足以说明其精神实质。

笔者在国外曾遇到一位第三世界的数学家，他说了这样一句话："Bourbaki是法国民族精神的产物。"

此语可谓一针见血。这位数学家口中的Bourbaki，才是真正的Bourbaki!

文艺复兴与资产阶级大革命以后，法国已成为欧洲科学文化的中心，数学界尤其人材辈出。拿破仑在执政时又创办了独具一格的多工艺学校，由数学家G. Monge主持其事。从此多工艺学校就成了法国培养数学家的中心与基地，直到J. Douboux活跃于数学界时才让位于巴黎高等师范学校。从17世纪R. Descartes, P. Fermat，牛顿，莱布尼茨等创立解析几何与微积分起，法国在长达两百多年的时期一直执欧洲数学发展即世界数学发展的牛耳。但是到19世纪中期，德国数学崛起，逐渐后来居上，数学中心有从巴黎转至德国的Göttingen与柏林之势。进入本世纪后，与德国相比，法国数学研究的范围日益显得有些偏狭，更少新的思想。函数论向来是法国数学的一张王牌，但到本世纪30年代，J. Hadamarl, E. Borel, E. Pieard, P. Montal, G. Julia, G. Valiron等的光辉成就已成强弩之末，难以为继，他们的方向也不再象过去那样在整个数学王国中占据核心地位，法国数学已濒临丧失过去二百多年来国际领先地位的境地，而且与周围各国的差距颇有扩大之势。在这样的形势下，法国一些年轻而有才华的有心人创立了Bourbaki学派，经过数十年的惨淡经营，终于

使法国数学重新占据世界舞台的中心。在构造概念下对全部数学的统一处理，《数学原理》全书的编写，Bourbaki讨论班的创立，对青年一代的培养，凡此种种，都无非是在以复兴法国数学为历史使命这一指导思想下产生的数学思想与具体措施。当年都是二十多岁的年轻人，如今都已耄耋老矣，有的已经故世。近年来，Bourbaki的影响已见衰退，对他们的思想与体系也颇有争议，并不时受到非议，其成功确也有一定的范围和局限性。但是他们为重振法兰西精神所作的努力，不仅对法国人民是可贵的，也可供其他各国人民借鉴与学习。我们要向Bourbaki学派学习的，不在于他们在各个领域取得的各项特殊的成就，也不在于他们时有争议的思想体系。这些都在可学可不学、可从可不从之间。真正值得我们学习的乃是他们这种可贵的精神。

中世纪的欧洲，一直为封建领主所割据而分成无数小块领地。至10世纪末，法兰西虽然名义上成为统一的国家，实际上仍然四分五裂，直到英法百年战争之后，于15世纪才结束了封建割据，实现国家统一至今不过四百多年。与之相较，早在公元前211年，秦始皇统一六合，中国就成为中央集权的封建大帝国。自秦汉迄宋元时代，我国在数学上绵延不绝的光辉成就，为现代数学打下了基础，也为数学的未来发展做出了楷模。只是自明代以来的几百年中，我国的传统数学骤然衰微，几乎退出了历史舞台。振兴中华，对数学工作者来说，不仅是振兴的问题，而且还有一个复兴的问题。Bourbaki学派复兴法国数学所作的努力，为我们提供了一个良好的榜样。这是我们创设刘徽数学讨论班的缘起。

发起的同志认为讨论班有必要冠以某一著名数学家的名字，原拟为祖冲之讨论班，最后确定为刘徽讨论班。

祖冲之，5世纪南北朝人，最为国内外知名的工作是关于圆周率π的计算。《隋书·律历志》载："宋末，南徐州从事史祖

冲之更开密法。……密率：圆径一百一十三，圆周三百五十五。约率：圆径七，周二十二。”用现代的形式描述即

$$\frac{22}{7}>\pi>\frac{355}{113}.$$

此外，祖冲之最主要的著作是《缀术》，号称难读，并已失传，内容已不得而知。他的儿子祖暅，为解决长期悬而未决的球体积问题提出“幂势既同，则积不容异”的原理，也就是迟至17世纪又被重新发现的Cavalieri原理。众所周知，这一原理是微积分得以产生的主要推动力之一。祖冲之不仅是一位伟大的数学家和天文学家，而且也是一位伟大的工程师。他曾制造过指南车、欹器、千里船、水碓磨等机械，经试验都很有效，可以说是我国古代一位Leonardo da Vinci式的伟人。西方撰写的数学史提到我国古代的数学家时，常以祖冲之为代表。鉴于祖冲之在科学技术上的成就，受到国内外如此尊崇，应该说是很自然的，而且是无可非议的。

但是，从数学的角度来说，祖冲之不能视为我国古代数学史上的代表人物。真正的代表人物应该是刘徽，而不是祖冲之。

刘徽，三国魏晋时人，生卒年月不详。我国古代数学的经典代表著作是成书于公元前后100年间的《九章算术》（以下简称《九章》）。刘徽的主要著作一是为《九章》作注（以下简称《九章注》），另一是原拟作《九章》新补一章但后来单独成书的《海岛算经》。对于从事中国古代数学史研究的同志来说，把刘徽看成我国古算的代表人物应该是无庸置疑的。但对于一般人来说，刘徽可能是不见经传的人物，与祖冲之之家喻户晓不能相提并论。

笔者认为，一般人，包括很大一部分数学工作者，只知有祖冲之而不知有刘徽，其中颇有缘故。不论中外，圆周率的计算历来都是众所瞩目的问题。在圆周率计算上有突出成就的祖冲之，

也就容易得到对我国古代数学颇为隔膜的西方数学史家的赞扬。追本溯源，很可能是由对我国古算仅仅一知半解的西方传教士先入为主的介绍所致。不论有意无意，真正代表我国古代数学的《九章》，西方传教士几乎从未提到。近代，《九章》虽然也被翻译成几种外文，但其真正精髓《九章注》，至今仅有一种日文译本。我国古代数学，至明季已几成绝学。现代的数学，自明末西方传教士进入我国开始，完全从西方引进。一般人对我国传统数学的认识，也就往往以西方数学史家的著作为依据，西方传教士的一孔之见，不知不觉地深入人心而成为普遍的看法。

祖冲之父子的主要著作《缀术》早已失传，其内容不得而知。因而对祖冲之在数学上的成就很难作出全面确切的评价。就圆周率计算而论，虽然祖冲之的疏密二率是一项杰作，但二率的得来各家说法不一，颇难臆测；估算较疏但早于祖冲之者国外有阿基米德，国内据《隋书》所载就有刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗等，晚于祖冲之但估算更精密者则有15世纪阿拉伯的阿尔卡西等。因而祖冲之在数学史上的地位仅凭这一工作并不能评价过高。相反，计算圆周率的理论根据需要某种极限的概念。通过圆内接多边形周界极限来计算圆周率的方法，刘徽在《九章注》中已作了详细的解释。在没有发现其他文献可以印证的情况下，刘徽无疑应视为圆周率计算理论与方法的真正奠基人与缔造者。同样，祖暅原理即后世的Cavalieri 原理虽然出自祖暅，球体积的计算也完成于祖暅，但在刘徽的《九章注》中，早已有了这一原理的痕迹，刘徽并且已应用于某些简单曲体体积的计算，只是没有形成文字而已。把这一原理改称为刘祖原理，亦无不当。至于祖暅的球体积计算，依赖于某一古怪的立体所谓牟合方盖体积的计算。但牟合方盖以及由此通往球体积计算的道路，刘徽在《九章注》中都已指明。自刘徽至祖暅的数百年间，不妨可以认为正是由于数学家们孜孜矻矻地遵循了刘徽指明的道路，才终于完成于祖暅

的。

《九章》特别是刘徽的《九章注》，是我国传统数学的伟大宝库，是直至宋元时期我国在数学上许多重要发明创造的源泉。刘徽对数学的贡献，足可与古希腊的贡献相提并论，对现代数学的影响，也决不在古希腊的影响之下。以上所举的圆周率与球体积计算，只是刘徽众多贡献中的两例而已。我们不拟对刘徽的贡献作较详细的介绍。读者尽可求之于刘徽的原著或有关中国数学史家的专门著作。

为《九章》作注者并非刘徽一人，在刘徽前后都不乏其人。但除了唐代李淳风作的补注以外，只有刘徽的《九章注》流传至今。我们不妨认为《九章注》是刘徽以及其前与同期我国数学家聪明智慧的结晶，而以刘徽为这些古贤哲的代表，正象Bourbaki是一个集体的代表名称那样。在这种意义下，刘徽无可争议地是我国传统数学中唯一的代表人物。

对于我国的中国数学史专家来说，刘徽之为我国传统数学的代表人物本来是一种常识。但我国传统数学濒于失传并让位于西方近代数学已有几个世纪之久。因而我国的数学家容易以对我国传统数学几乎一无所知的西方数学史家的舆论为舆论，而忽略了熟悉我国传统数学的我们自己数学史家的真实意见。这可能是历来盛称祖冲之而刘徽之名不彰的重要原因之一。

这一轻重倒置与我们创设这一讨论班的主旨根本不相容。因之，这一讨论班不能冠以祖冲之之名而应以刘徽来命名。这就是刘徽讨论班名称的由来。

这次讨论班由15位专家分别对数学中若干重要领域、重要理论与课题作了概括性的介绍。他们的报告除了一篇因未交稿以外都收在这本文集中。所介绍的领域有数理统计、线性规划、模型论、复几何、Kac-Moody代数、非标准分析、模糊数学等。报

告人都是有关方面的专家并有他们自己的贡献。这些领域有些历史悠久，其重要性久已为人们认识，有些虽然出现较晚，但影响颇为深远。例如50年代开始提出的模型论，是60年代出现的划时代的非标准分析的基础。又如线性规划，虽然出现于60年代初期，近年来由于出现了苏联Khachiyan和印度Karmarkar 提出的新方法引起了重大反响，《参考消息》上也有过多次报道。再如复几何，由于陈省身、丘成桐等的重要贡献，成为纯数学中当前极为活跃的一项中心课题，报告人钟家庆同志由于这方面的工作而获得第一届陈省身奖。某些领域形成未久，例如Kac-Moody 代数，因1968年Kac的工作而得名，由于在物理学及其他方面的应用而得到迅速发展。另外，某些领域如模糊数学，历来虽有争议，但其应用前景颇为乐观，有待于在这方面已有显著成就的我国数学家继续努力。又如非标准分析，于60年代初为A.Robinson创立后，数学家们对之持不同态度，但近年来由于法国Strasbourg大学G.Reeb 领导下数学家做了出色的工作，Bourbaki讨论班曾作专门介绍，局面势将改观。我国数学家已率先将非标准分析成功地应用于解决广义函数乘法问题，这是广义函数问世以来即被公认的难题。

近年来，众多长期成为悬案的难题获得了重大进展，以至彻底解决。例如，关于Bieberbach猜想的论文历来数以万计，却为de Branges一举获得完全的证明。尤其难能可贵的是组合数学中中存在了百多年的所谓Steiner三元系问题，直至1980年还认为解决无期，却在1981～1983年间为我国内蒙古一位中学教师陆家羲几乎完全解决。在他不幸早逝时，只留下了六个孤立的例外。陆家羲同志由于这一杰出成就获得第三届全国自然科学奖一等奖。此外如气体动力学中的Riemann问题，已有百年以上的历史，向为Courant研究所的传统研究课题，我国丁夏畦、罗佩珠、陈贵强等同志对此取得了重要的突破性的进展。陈贵强同志因此被Courant研究所邀请访问已有两年之久。中国科学院已初步评定授予丁夏畦同志科技进步奖特等奖。又如不动点理论向来是拓扑学与应用联系的一个重要纽带。其中关于不动点几何个数的Nielsen理论出现于本世纪20年代，我国数学家江泽涵、姜伯驹、石根华等同志作了重要的发展。Nielsen的一个重要猜测直到数年前才为姜伯驹所解决。

有些理论与方法是我国数学家所独创的。例如廖山涛同志关于微分动力体系的理论，获得了1986年度第三世界科学院奖和我国第三届自然科学奖一等奖。又如洪加威同志的几何定理例证法，思想新颖，不仅在数学上而且在哲学思想上发人深思，已在国际上引起轰动。

我国传统数学有其自身的发展途径与独到的思想体系，而以机械化为其特色；方程求解尤其是贯穿两千多年发展中的一条主线。这与遵循古希腊传统的西方数学的公理化演绎体系大相径庭，旨趣迥异。在历史长河中，数学机械化算法体系与数学公理化演绎体系曾多次反复互为消长，交替成为数学发展中的主流。肇始于我国的这种机械化体系，在经过百年来的消沉后，由于近代计算机的出现，已越来越为数学家所认识和重视，势将重新登上历史舞台。笔者关于几何学的机械化方法，本质上即直接导源于我国传统数学的思维方式，目前在几何学定理的证明上，已获得极为可观的成功。这一方法同样可用于方程求解，这也是对我国传统的直接继承。由于理论问题与实际中来源不一的形形色色问题，最后往往归结为求解某种类型的方程，因而其应用前景极为宽广。我们的方法为复兴我国的传统数学，提供了一个有效的切实可行的途径。笔者在这方面的第一篇著作《初等几何判定问题与机械化证明》，刊载于1978年《中国科学》。笔者在该文之末加了一个附注，现将这一附注照录如下：

“我们关于初等几何定理机械化证明所用的算法，主要牵涉到一些多项式的运用技术，例如算术运算与简单消元法之类。应该指出，这些都是十二至十四世纪宋元时期中国数学家的创造，在那时已有相当高度的发展。详细介绍可参阅钱宝琮的著作（中国数学史，科学出版社，1964）。事实上，几何问题的代数化与用代数方法系统求解，乃是当时中国数学家的主要成就之一，其时间远在十七世纪出现解析几何之前。”

讨论班的创立曾得到北京中关村科技发展公司的赞助，在此顺致谢意。国外近年来有了重大发展而国内又有这方面专家可作深刻分析介绍者为数众多，国内也还有不少发明创造。由于条件限制，讨论班的报告人只能局限于北京及其近邻地区。还有些同志由于出国访问或其他原因，虽曾邀请作相应的报告但未能如愿。不过，仅从收集在本文集的报告内容来看，已足见我国在数学上已具有一定的实力和强大的潜力。复兴而不仅是振兴中国数学，使自秦汉迄宋元傲居世界舞台中央的中国数学重展昔日雄风于今日，应该是完全可能的。

吴文俊

1988.3.16

目　录

拓扑学中的不动点理论

北京大学数学系
姜伯驹

（一）不动点问题

不动点问题是解方程问题的一种典型形式，许多解方程问题可以化成不动点问题.

设X是一个空间，$f:X\to X$是一个映射.

$$\mathrm{Fix}(f):=\{x\in X\mid x=f(x)\}.$$

称为f的不动点集.不动点问题包括不动点的有无、性质、求法等等.

在拓扑学中，主要讨论映射的变形对不动点的影响，或者说，研究与不动点有关的同伦不变量.

为避免枝节，以下假定空间X是紧的光滑流形（闭的或有边的），映射f也是光滑映射.问与f同伦的映射最少有多少不动点，即求

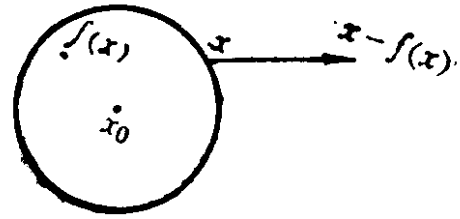
$$MF[f]:=\mathrm{Min}\{\#\mathrm{Fix}(g)\mid g\simeq f:X\to X\}.$$

（二）Lefschetz的不动点指数与Nielsen的不动点类

我们不妨假定$f:X\to X$的不动点都是孤立的，且都不在流形X的边上.（通过小扰动总能实现.）

不动点指数：把孤立不动点x_0的邻近看成欧氏空间，x_0的指

数就是向量场$x-f(x)$在其孤立零点x_0处的指数；或者说，当动点x绕x_0一周时，向量$x-f(x)$绕0多少周。这是多项式的根的重数概念的推广。



Lefschetz(1923)：f的全体不动点的指数的代数和是f的同伦不变量，可用简单公式算出：

$$L(f)=\sum_q(-1)^q \operatorname{trace}(f_*: H_q(X)\to H_q(X)).$$

因此$L(f)\neq 0\Rightarrow$与f同伦的映射都有不动点。

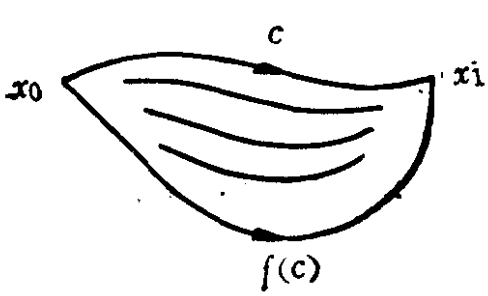
【例】 对于环面T^2，$f_*: H_1(T^2)\to H_1(T^2)$由一个整数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

所刻划。这时$L(f)=\det(E-A)$，这里E是单位矩阵。

对于"一般的"(generic)光滑映射来说，每个不动点的指数是± 1，因而与f同伦的光滑映射"一般说来"至少有$|L(f)|$个不动点。

Nielsen (1921) 与Brouwer (1921)：对于$f: T^2\to T^2$，与f同伦而不动点最少的映射，恰有$|\det(E-A)|$个不动点。

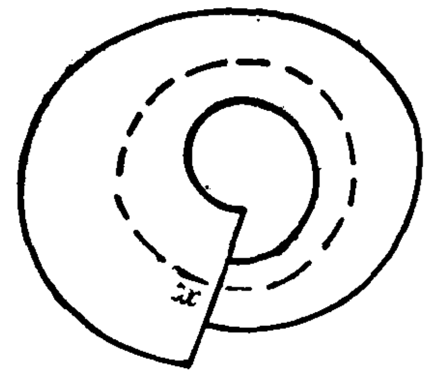


不动点类：f的不动点x_0与x_1同类，如果在X中有从x_0到x_1的道路c，使c与$f(c)$同伦。(指保持端点不动的同伦。)

等价说法：

$$f\text{的映射环}:=\frac{X\times[0,\ 1]}{((x,\ 1)\sim(f(x,\ 0)),\ \forall x)}.$$

不动点对应于闭轨线；同类的不动点对应于同伦的闭轨线。



不动点类的指数：该类中诸不动点的指数之和。

Nielsen数$N(f)$：=指数非零的不动点类的个数。

Nielsen（1927）与Wecken（1940）：$N(f)$是f的同伦不变量。与f同伦的映射至少有$N(f)$个不动点，即$N(f)\leqslant MF[f]$。

于是，问题分成两个方面。代数方面——怎样计算$N(f)$？几何方面——何时有$N(f)=MF[f]$？不等时，如何计算$MF[f]$？

（三）Nielsen数的计算简况

在环面T^2上$N(f)=|L(f)|$，这并非普遍规律，$N(f)$可以大于也可以小于$|L(f)|$。$N(f)$的计算相当困难，因为基本群的同态

$$f_*:\pi_1(X)\to\pi_1(X)$$

起着关键性的作用，而$\pi_1(X)$一般是非交换群，不易处理。

二十年来，对某些常见的流形（如李群、齐性空间、基本群为有限群的流形等）或常见的映射（如纤维映射等）已找到一些相当有效的办法。本文作者和尤承业的工作[2]、[11]有重要的影响。有兴趣者请参看江泽涵先生的书[1]及本文作者的讲义[6]。

当前重要的课题：(i)同伦幂等映射。Geoghegan猜想，若$f\cdot f\simeq f$必$N(f)\leqslant 1$。这问题从Shape theory来，与代数K理论有密切关系。(ii)曲面的伪Anosov自同胚。其Nielsen数计算与动力系统的研究有关，主要困难在于其映射环(它是三维双曲流形)的基本群中，共轭问题不知如何解。