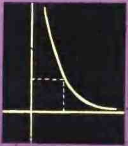
黑龙江科学技术出版社

管理数学

（第三册）

管理数学 编写组 编



管 理 数 学

第三册　概率统计

《管 理 数 学》编 写 组 编

黑 龙 江 科 学 技 术 出 版 社

1987年·哈尔滨

责任编辑：程 明 秋
封面设计：洪 冰

管 理 数 学

（第三册）

《管理数学》编写组 编

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区建设街35号）
黑龙江省教委会印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

787×1092毫米 32开本 8.25印张 166千字
1987年4月第1版·1987年4月第1次印刷
印数：1—8,700册

书号：13217·178 定价：1.65元

前　　言

黑龙江省教育委员会组织省内十五所成人高校在哈尔滨召开管理、经济专业数学教学大纲及教材讨论会。会上确定了管理数学教学大纲。根据大纲要求，黑龙江省财贸管理干部学院、工业交通管理干部学院、林业管理干部学院、哈尔滨市工人业余大学、哈尔滨市经济管理干部学院等院校联合组成《管理数学》教材编写组，编写了本教材，经过试用和修改后，报请省教委审定后交出版社出版。

本教材共分四册：第一册微积分（76学时），第二册线性代数及线性规划（46学时），第三册概率统计(50学时)，第四册运筹学初步（40学时）。

本书在编写过程中力求适应成人教育特点和管理专业的需要，对基本概念、重要公式、定理的实际意义尽量详加解释，并通过大量例子加以说明。注重实际应用题目，略去了比较繁杂的数学证明。每节末尾配有习题，每章后面，有全章复习题，便于学员复习。全书附有习题和复习题答案，供自学者参考。

本教材由陈俊澳副教授主编，参加编写的有：第一册关程璠、刘敏、刘兴权（关程璠主编）；第二册吴宝泉、张俭、王家兴（吴宝泉主编）；第三册朱少毅、赵恒普（朱少毅主编）；第四册赵恒普、霍显英（赵恒普主编）。

本书缺点和不足之处，请读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　随机事件及其概率

自然界出现的现象，大体上可分为两类，一类为必然现象，另一类为随机现象。在经济管理中，我们常常遇到大量的随机现象。例如某项投资的效益，事前很难作出确切的结论，只能对若干因素进行合理的定量分析，作出尽可能正确的估计。又如，社会对某种产品的需求量，也往往事先不能确切地预计，而只能根据对市场的调查结果及其他有关统计资料进行分析，作出比较合理的估计。概率论就是研究随机现象的数量规律性的一个数学分支。

§1.1　随机事件

一、随机试验

为了研究随机现象的规律性，首先需要对随机现象进行试验。这里所说的试验含意比较广泛，可以是各类科学试验，也可以是对某些现象的某些特征的观察。

例 1　抛一枚质量均匀的硬币，落在平面上，观察其正面朝上（记为H），还是反面朝上（记为T）。这可看作是一次试验，记为E_1。

例 2　从100台同型号的洗衣机中，任意取出 3 台，检查这 3 台中含的次品台数X。这也是一种试验，记为E_2。

例 3 考察某商店一天内接待的顾客人数N。这个试验记为E_3。

例 4 记录某地一昼夜的最高气温（$MaxT$℃）和最低气温（$MinT$℃）。将这个试验记为E_4。

例 5 检验某灯泡厂一批产品的使用寿命t（小时）。将这个试验记为E_5。

可以看出上述五个试验，都具有下列特征：

（1）可以在相同的条件下，重复进行。

（2）每一次试验的结果不一定相同，但能事先明确试验的所有可能结果。

（3）进行某次试验之前，不能确定哪个结果会出现。

具有这三个特征的试验，称为**随机试验**。以后简称为**试验**，用E表示。

二、随机事件

在一次随机试验中，可能出现，也可能不出现，而在大量的重复试验中，具有某种统计规律性的事情称为**随机事件**。简称**事件**，常以大写字母A、B、C等等表示。

事件有简单的，也有复杂的。我们把在一定范围内不能再分解的（或不必再分解的）事件称为**基本事件**。例如：在例 2 中，在抽出的 3 台洗衣机中，$X=1$，"有一台次品"，$X=2$，"有二台次品"等等，都是基本事件。而由若干个基本事件组合而成的事件称为**复合事件**。例如：在例 2 中，"次品数不超过两台"是一个复合事件，它是由"$X=0$"、"$X=1$"、"$X=2$"，这三个事件组合而成的。

一个事件是不是基本事件，是相对于试验的目的来说的，例如检查灯泡的寿命，则任何非负实数都可以是一个基本

事件。但如果我们规定灯泡寿命不超过1000小时的是次品，超过(或等于)1000小时的是合格品，我们关心的是灯泡合不合格，而不是灯泡的寿命有多长，这时就只需考虑“合格”或“不合格”这两个基本事件。

每次试验中肯定发生的事件称为**必然事件**。记为Ω。例如在例 5 中灯泡的使用寿命$t\geqslant0$是必然事件。

每次试验中肯定不会发生的事件称为**不可能事件**。记为ϕ。例如在例 2 中，抽出的“次品数是 4 台”，这是不可能事件。

注意：必然事件和不可能事件不是随机事件。因为作为随机试验的结果，它们都呈现着确定性（严格说这也不是随机试验）。不过为了研究上的方便，我们总是将它们也当成特殊的随机事件来处理。

三、样本空间

定义1.1 随机试验E的所有基本事件组成的集合，称为E的**样本空间**，用Ω表示。

Ω中的元素就是试验E的基本事件。基本事件也称为**样本点**。例如：

E_1的样本空间为：$\Omega_1=\{H,T\}$

E_2的样本空间为：$\Omega_2=\{X=x|x=0,1,2,3\}$

E_3的样本空间为：$\Omega_3=\{N=n|n=0,1,2,\cdots\}$

E_4的样本空间为：$\Omega_4=\{T|T_0<T<T_1\}$，其中T_0，T_1为两个确定的温度值。

E_5的样本空间为：$\Omega_5=\{t|t\geqslant0\}$。

§1.2 事件的关系和运算

研究一个随机现象，往往同时涉及许多事件。因此有必要先了解这些事件间的关系和运算。

样本空间Ω是基本事件的集合，其他事件A、B……等都可以看作Ω的子集。对于试验E，它所有可能的基本事件全体，构成了全集（即样本间空Ω）。所以Ω也可以理解为E的必然事件，几何上常用一个方块来表示。

下面我们讨论事件间的关系和运算，与集合间的关系和运算有很多相同之处，只是使用的术语有的地方不同面已。

一、包含关系

如果事件A发生，必然导致事件B发生。则称**事件A包含于事件B**，记为$A\subset B$。或称**B包含A**，记为$B\supset A$。这一关系可用图形直观说明，如图1—1中方形表示样本空间Ω，区域B表示事件B，区域A表示事件A。

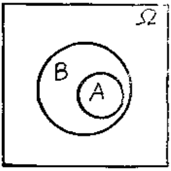


图1—1

例 1 检验某圆柱型产品是否合格。以其直径和高度两项标准来衡量。设A表示“直径不合格”，B表示“高度不合格”。C表示“产品不合格”。则A发生必然导致C发生。所以有$A\subset C$，同理有$B\subset C$。

二、相等关系

若$A\subset B$，且$B\subset A$，则称事件**A与B相等**。记为$A=B$。

三、事件的和

“事件A或事件B发生”这一事件，称为**A与B的和**。记为$A\cup B$。如图1—2中阴影部分所示。

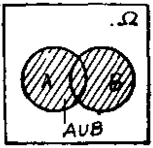


图1—2

如例1中，$A\cup B=C$。因为产品不合格就意味着要么直径不合格，要么高度不合格，二者至少有一个发生，当然包括直径和高度都不合格这种情况。

设A_1、A_2、……A_n为n个事件，则$A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}Ai$，表示这$n$个事件至少有一个发生。

四、事件的积

“事件A与事件B同时发生”这一事件称为**A与B的积**，记为$A\cap B$或AB。如图1—3中阴影部分所示。

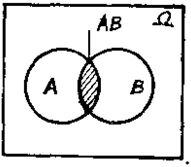


图1—3

例2 如图1—4所示，同一电路上有两个开关，则“电路接通”（以C表示）是开关A接通与开关B接通之积，即$C=AB$。

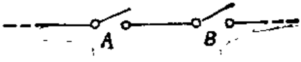


图1—4

设A_1、A_2……A_n为n个事件，则$A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots\cap An=\bigcap\limits_{i=1}^{n}Ai$表示这$n$个事件同时发生。

五、事件的差

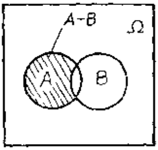


图1—5

"事件A发生而事件B不发生"，这一事件称为**A与B的差**，记为$A-B$。如图1—5中阴影部分所示。

六、互斥事件（互不相容事件）

如果事件A与B不可能同时发生，即$AB=\phi$，则称**A与B互斥（或互不相容）**，如图1—6所示。例如：

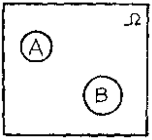


图1—6

§1.1 例1中，H与T是互斥事件；

§1.1 例2中，"$X=0$"与"$X=1$"互斥，"$X=1$"与"$X=3$"也是互斥的。

显然，任何随机试验的所有基本事件都是两两互斥的。

当A、B是互斥时，常常把$A\cup B$记为$A+B$。

七、对立事件（互逆事件）

如果$A\cap B=\phi$，且$A\cup B=\Omega$，（即A、B不能同时发生，但A、B中又必有一个发生）则称A、B为**对立事件（或互逆事件）**，或者说B是A的逆事件，记为$B=\bar{A}$（当然A也是B的逆事件$A=\bar{B}$)。如图1—7所示。

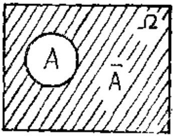


图1—7

例如：§1.1 例1，H与T是互为对立事件，§1.1 例

5中“合格”与“不合格”是对立事件。

注意：对立事件必然是互斥事件，但互斥事件不一定互逆。如§1.1 例2中，“$X=0$”与“$X=1$”互斥，但不是对立事件。

设 A、B、C 是随机事件，则有下列运算定律：

1. $\overline{(\overline{A})}=A$； (1.1)

2. 交换律：$A\cup B=B\cup A$；$AB=BA$； (1.2)

3. 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(AB)C=A(BC)$； (1.3)

4. 分配律：$(A\cup B)C=AC\cup BC$；

$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$； (1.4)

5. 对偶原理：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$； (1.5)

下面用图示证明对偶原理的第一个关系。$\overline{A\cup B}$ 是图1—8(a)中的阴影部分；$\overline{A}$是图1—8(b)中A的外部，$\overline{B}$是

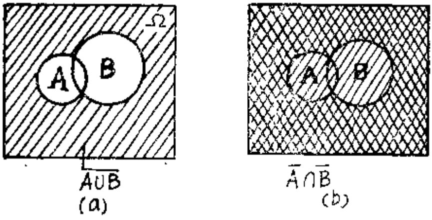


图1—8

B的外部，$\overline{A}\cap\overline{B}$是$\overline{A}$与$\overline{B}$的公共部分，即图1—8$(b)$中双阴影部分，这与$(a)$中的阴影部分相同，即$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。

请读者自己用图说明$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$也是成立的。

例 1 设A、B、C为三个事件，用A、B、C的运算关系表示下列事件。

（1）A发生，B与C不发生；

（2）A、B、C都发生；

（3）A、B、C中不多于一个发生。

解 （1）利用事件的运算的定义，“A发生、B与C不发生”事件，可表示为$A\bar{B}\bar{C}$；

（2）“A、B、C都发生”事件，可表为ABC；

（3）“A、B、C中不多于一个发生”包括“A、B、C都不发生”，或者“A、B 、C中只有一个发生”即$A\bar{B}\bar{C}$或$\bar{A}\bar{B}C$或$\bar{A}B\bar{C}$。所以，“A、B、C中不多于一个发生”事件可表成

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$$

例 2 在图书馆按书号任选一本书，设A表示“选的是数学书”，B表示“选的是中文版的书”，C表示“85年及85年以后出版的书”。问：

（1）$AB\bar{C}$表示什么事件？

（2）$\bar{C}\subset B$表示什么意思？

（3）$\bar{A}=B$ 表示什么意思？是否意味着馆中所有的数学书都不是中文版的？

解 （1）$AB\bar{C}$ 表示“选的是85年以前出版的中文版数学书”；

（2）$\bar{C}\subset B$ 表示“馆中85年以前出版的书都是中文版的”；

（3）由于$\bar{A}=B$与$A=\bar{B}$是等价的，由后面的那个等式知，“数学书”等于“非中文版的书”，或者说“数学书都不是中文版的”。

习　　题 1.1

一、设A、B、C表示三个随机事件

试将下列事件用A、B、C的运算关系表示出来：

（1）仅A发生；

（2）A、B、C都发生；

（3）A、B、C都不发生；

（4）A、B、C不都发生；

（5）A、B、C中至少有一事件发生；

（6）A、B、C中恰有一事件发生；

（7）A不发生，而B、C中至少有一事件发生；

（8）A、B、C中至少有二事件发生；

（9）A、B、C中不多于一事件发生。

二、从某班学生中任意选出一名同学，设 $A=\{$选到的人是女生$\}$，$B=\{$选到的人是数学爱好者$\}$，$C=\{$选到的人欢喜唱歌$\}$。

（1）用文字表达$\bar{A}B\bar{C}$与ABC；

（2）何时成立$\bar{C}\subset B$？

（3）何时同时成立$A=B$及$\bar{A}=C$？

三、E：袋中有三个球，编号为1、2、3，从中任意摸出一个球观察号码。

设$A=\{$摸到球其号码小于3$\}$，

$B=\{$摸到球其号码是奇数$\}$，

$C=\{$摸到的球其号码是3$\}$，

试问（1）E的样本空间是什么？

（2）A与B、A与C、B与C是否互不相容？

（3）A、B、C的对立事件是什么？

（4）A与B的和事件是什么？差事件是什么？积事件是什么？

四、回答下列问题：

（1）举例说明两事件互不相容但不一定是互逆的。

（2）举例说明A、B、C三事件满足$ABC=V$，但却未必两两互不相容的。

（3）举例说明A、B二事件“都不发生”和“不都发生”的区别。

§1.3 概率的统计定义

一、频 率

在观察某一随机事件时，如果在一定的条件下进行n次重复试验，设事件A在这n次试验中出现了k次，比值$\frac{k}{n}$称为在n次试验中A出现的频率，记为$f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{k}{n}. \tag{1.6}$$

由频率的定义及$0\leqslant k\leqslant n$，显然有

（1）$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$； (1.7)

（2）$f_n(\Omega)=1$，$f_n(\phi)=0$。 (1.8)

例如考察“抛掷一枚硬币”这个随机试验。现将硬币连抛n次，观察n次试验中正面(带国徽的一面)出现的次数。取 $n=5$次、50次、500次，并将n分别取这三个值的试验，各作10遍，得数据如下表：

设H表示为“正面向上”这一事件。