

高等学校教材

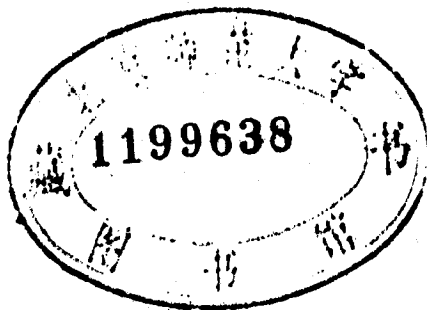
数 学 分 析

(第 二 版)

下 册

复旦大学数学系 陈传璋 金福临 编
朱学炎 欧阳光中

JY1/244/13



高等教育出版社

本书在复旦大学数学系陈传璋等编《数学分析》(1979年版)的基础上,由作者根据近年来的教学实践作了修订。这次修订除了文字上和内容上的刊误以及改写了不定积分与定积分的部分内容外,主要是为适应教学需要,调整了部分章节的次序,并把第一版中第十章第8节“向量值函数的导数”作为附录放在书末。

本书为下册,内容包括数项级数和广义积分;函数项级数、幂级数、富里埃级数和富里埃变换;多元函数的极限与连续、偏导数和全微分、极值理论、隐函数存在定理与函数相关;含参变量的积分和广义积分;多变量积分学(重积分、曲线积分、曲面积分和场论初步)。

本书可作为综合大学、师范院校数学系的教材。

高等学校教材
数 学 分 析
(第 二 版)
下 册

复旦大学数学系 陈传璋 金福临 编
朱学炎 欧阳光中

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
上海商务印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 12.375 字数 296,000

1979年5月第1版

1983年11月第2版 1984年4月第1次印刷

印数 00,001—32,000

书号 13010·0938 定价 1.45 元

目 录

第三篇 级 数 论

第一部分 数项级数和广义积分

第九章 数项级数	1
§ 1. 预备知识: 上极限和下极限	1
习题	4
§ 2. 级数的收敛性及其基本性质	5
习题	11
§ 3. 正项级数	12
习题	19
§ 4. 任意项级数	20
一、绝对收敛级数	20
二、交错级数	22
三、阿贝尔(Abel)判别法和狄立克莱判别法	24
习题	29
§ 5. 绝对收敛级数和条件收敛级数的性质	30
习题	37
*§ 6. 无穷乘积	37
习题	43
第十章 广义积分	44
§ 1. 无穷限的广义积分	44
一、无穷限广义积分的概念	44
二、无穷限广义积分和数项级数的关系	48
三、无穷限广义积分的收敛性判别法	49
*四、阿贝尔判别法和狄立克莱判别法	51
习题	55

§ 2. 无界函数的广义积分	57
一、无界函数广义积分的概念, 柯西判别法	57
*二、阿贝尔判别法和狄立克莱判别法	60
习题	61

第二部分 函数项级数

第十一章 函数项级数、幂级数

§ 1. 函数项级数的一致收敛	63
一、函数项级数的概念	63
二、一致收敛的定义	64
三、一致收敛级数的性质	69
四、一致收敛级数的判别法	72
习题	76
§ 2. 幂级数	78
一、收敛半径	78
二、幂级数的性质	81
三、函数的幂级数展开	83
习题	90
§ 3. 逼近定理	91

第十二章 富里埃级数和富里埃变换

§ 1. 富里埃级数	95
一、富里埃级数的引进	95
二、三角函数系的正交性	95
三、富里埃系数	97
四、狄立克莱积分	98
五、黎曼引理	100
六、狄尼(Dini)判别法及其推论	104
*七、狄立克莱-约当判别法	106
八、富里埃级数的一致收敛性	108
九、函数的富里埃级数展开	108
十、周期为 T 的函数的展开	112
十一、富里埃级数的复数形式	114
*十二、富里埃级数的逐项求积和逐项求导	115

习题	118
§ 2. 富里埃变换	121
一、富里埃变换的概念	121
二、富里埃变换的一些性质	125
习题	126

第四篇 多变量微积分学

第一部分 多元函数的极限论

第十三章 多元函数的极限与连续	127
§ 1. 平面点集	127
一、邻域、点列的极限	127
二、开集、闭集、区域	128
三、平面点集的几个基本定理	130
习题	132
§ 2. 多元函数的极限和连续性	132
一、多元函数的概念	132
二、二元函数的极限	134
三、二元函数的连续性	136
四、有界闭区域上连续函数的性质	138
五、二重极限和二次极限	139
习题	142

第二部分 多变量微分学

第十四章 偏导数和全微分	144
§ 1. 偏导数和全微分的概念	144
一、偏导数的定义	144
二、全微分的定义	147
三、高阶偏导数与高阶全微分	150
习题	153
§ 2. 求复合函数偏导数的链式法则	154
习题	160

§ 3. 由方程(组)所确定的函数的求导法	161
一、一个方程 $F(x, y, z) = 0$ 的情形	161
二、方程组的情形	163
习题	167
§ 4. 空间曲线的切线与法平面	169
习题	173
§ 5. 曲面的切平面与法线	173
习题	176
§ 6. 方向导数和梯度	177
一、方向导数	177
二、梯度	179
习题	183
§ 7. 泰勒公式	183
习题	185
第十五章 极值和条件极值	186
§ 1. 极值和最小二乘法	186
一、极值	186
二、最小二乘法	192
习题	195
§ 2. 条件极值	196
习题	203
第十六章 隐函数存在定理、函数相关	205
§ 1. 隐函数存在定理	205
一、 $F(x, y) = 0$ 情形	205
二、多变量及方程组情形	210
习题	214
§ 2. 函数行列式的性质、函数相关	216
一、函数行列式的性质	216
二、函数相关	218
习题	224

第三部分 含参变量的积分和广义积分

第十七章 含参变量的积分	225
---------------------------	------------

习题	231
第十八章 含参变量的广义积分	233
一、一致收敛的定义	233
二、一致收敛积分的判别法	234
三、一致收敛积分的性质	235
四、欧拉 (Euler) 积分	239
五、阿贝尔判别法、狄立克莱判别法	240
习题	244

第四部分 多变量积分学

第十九章 积分(二重、三重积分, 第一类曲线、曲面积分)	
的定义和性质	246
§ 1. 二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分的 概念	246
§ 2. 积分的性质	251
习题	253
第二十章 重积分的计算及应用	254
§ 1. 二重积分的计算	254
一、化二重积分为二次积分	254
二、用极坐标计算二重积分	261
三、二重积分的一般变量替换	264
习题	272
§ 2. 三重积分的计算	275
一、化三重积分为三次积分	275
二、三重积分的变量替换	279
习题	285
§ 3. 积分在物理上的应用	286
一、质心	286
二、矩	288
三、引力	290
习题	291
§ 4. 广义重积分	292
习题	294

第二十一章 曲线积分和曲面积分的计算	296
§ 1. 第一类曲线积分的计算	296
习题	299
§ 2. 第一类曲面积分的计算	300
一、曲面的面积	300
二、化第一类曲面积分为二重积分	304
习题	309
§ 3. 第二类曲线积分	309
一、变力做功与第二类曲线积分的定义	309
二、第二类曲线积分的计算	314
三、两类曲线积分的联系	319
习题	321
§ 4. 第二类曲面积分	322
一、曲面的侧的概念	322
二、第二类曲面积分的定义	325
三、两类曲面积分的联系及第二类曲面积分的计算	327
习题	334
第二十二章 各种积分间的联系和场论初步	335
§ 1. 各种积分间的联系	335
一、格林(Green)公式	335
二、高斯(Gauss)公式	338
三、斯托克司(Stokes)公式	342
习题	346
§ 2. 曲线积分和路径的无关性	349
习题	355
§ 3. 场论初步	356
一、场的概念	356
二、向量场的散度与旋度	358
*三、保守场	368
*四、算子 ∇	370
习题	372
附录 向量值函数的导数	374
索引	383

第三篇 级数论

第一部分 数项级数和广义积分

第九章 数项级数

§ 1. 预备知识: 上极限和下极限

我们先来叙述一个预备知识, 即数列的上极限和下极限. 就其内容来说, 是属于极限论的范围.

对于一个有界数列 $\{a_n\}$, 去掉它的最初 k 项以后, 剩下的仍旧是一个有界数列, 记这个数列的上确界为 β_k , 下确界为 α_k , 亦即

$$\beta_k = \sup_{n > k} \{a_n\} = \sup \{a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots\}$$

$$\alpha_k = \inf_{n > k} \{a_n\} = \inf \{a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots\}$$

令 $k=1, 2, 3, \dots$, 于是得到一列 $\{\beta_k\}$ 和一列 $\{\alpha_k\}$. 显然数列 $\{\beta_k\}$ 是单调减少的, $\{\alpha_k\}$ 是单调增加的, 所以这两个数列的极限都存在. 我们称 $\{\beta_k\}$ 的极限是 $\{a_n\}$ 的上极限, 设它是 H . $\{\alpha_k\}$ 的极限是 $\{a_n\}$ 的下极限, 设它是 h . 并分别将上极限和下极限记为 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$. 也就是

$$H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} \{a_n\}$$

$$h = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n > k} \{a_n\}$$

显然: $h \leq H$.

如果数列 $\{a_n\}$ 无上界, 我们就说 $H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 如果数列 $\{a_n\}$ 无下界, 就说 $h = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

下面给出上极限和下极限的重要性质.

定理 1 设

$$H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

则 (i) 当 H 为有限时, 对于 H 的任何 ε 邻域 $(H - \varepsilon, H + \varepsilon)$, 在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项属于这个邻域, 而在 $(H + \varepsilon, +\infty)$ 中只有有限多个项. (图 9-1).



图 9-1

(ii) 当 $H = +\infty$ 时, 对任何数 $N > 0$, 在 $\{a_n\}$ 中必有无穷多个项大于 N .

(iii) 当 $H = -\infty$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 以 $-\infty$ 为极限.

证明 (i) 当 $-\infty < H < +\infty$ 时, 假设存在某一正数 ε_0 , 使得在 $\{a_n\}$ 中只有有限多个项大于 $H - \varepsilon_0$, 那么必存在 n_0 , 当 $n > n_0$ 时, 一切 a_n 皆有 $a_n \leq H - \varepsilon_0$. 于是上确界

$$\beta_n = \sup \{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \leq H - \varepsilon_0 \quad (n > n_0)$$

因此
$$H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq H - \varepsilon_0$$

矛盾, 这就证明了对任何 $\varepsilon > 0$, 在 $\{a_n\}$ 中必有无穷多个项大于 $H - \varepsilon$.

再来证明, 在 $\{a_n\}$ 中只有有限多个项大于 $H + \varepsilon$. 因为, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = H$, 故存在 N , 当 $n > N$ 时有 $\beta_n < H + \varepsilon$, 而 β_n 又是 $\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\}$ 的上确界, 所以当 $n > N$ 时, 对一切自然数

k 成立 $a_{n+k} \leq \beta_n < H + \varepsilon$, 这样就证明了大于 $H + \varepsilon$ 的 a_n 只可能有有限多个.

(ii) 当 $H = +\infty$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 无上界, 由此便获得所要的结论.

(iii) 当 $H = -\infty$ 时, 对任何 $G > 0$, 存在 n_0 , 当 $n > n_0$ 时

$$a_{n+1} \leq \beta_n < -G$$

这表明 $\{a_n\}$ 的极限为 $-\infty$.

到此定理全部证毕.

定理 2 设

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

则 (i) 当 h 为有限时, 对 h 的任何 ε 邻域 $(h - \varepsilon, h + \varepsilon)$, 在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项属于这个邻域, 而只有有限多个小于 $h - \varepsilon$.

(ii) 当 $h = -\infty$ 时, 对任何数 $N > 0$, 在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项小于 $-N$.

(iii) 当 $h = +\infty$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的极限为 $+\infty$.

证明与定理 1 完全相仿.

定理 3 设 H 为 $\{a_n\}$ 的上极限, 那么, H 必是 $\{a_n\}$ 中所有收敛子列的极限中的最大值. 设 h 为 $\{a_n\}$ 的下极限, 那么, h 必是 $\{a_n\}$ 中所有收敛子列的极限中的最小值.

证明 仅以上极限 H 来证明如下. 分三种情形来考察:

(i) $-\infty < H < +\infty$, 由定理 1 知道, 必有一个子列 a_{n_k} 收敛于 H . 此外, 对任意 $\varepsilon > 0$, 在 $\{a_n\}$ 中只可能有有限多个项大于 $H + \varepsilon$, 这就表明所有收敛子列的极限决不会大于 $H + \varepsilon$, 再由 ε 的任意性, 便得到所有收敛子列的极限必不大于 H .

(ii) 当 $H = +\infty$ 时, 按定理 1, 存在子列 $a_{n_k} \rightarrow +\infty$, 而其他一切收敛子列的极限当然不会大于 $+\infty$.

(iii) 当 $H = -\infty$ 时, 此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, 故数列 $\{a_n\}$ 的一切子列都发散到 $-\infty$.

这样便证明了定理.

这一定理告诉我们, 在一个数列 $\{a_n\}$ 中, 它的所有收敛子列的极限所组成的数集必有最大值和最小值, 并且这个最大(小)值正是 $\{a_n\}$ 的上(下)极限.

推论 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ (有限或无穷大) 的充要条件为:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

这个推论容易从定理 3 得到.

例 1 $a_n = n + (-1)^n n \quad (n=1, 2, 3, \dots).$

它只有两个具有极限的子数列 (包括极限为 ∞ 的情形): a_{2k} 和 $a_{2k+1} (k=1, 2, 3, \dots)$. 前者极限为 $+\infty$, 后者极限为 0, 于是:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

例 2 $a_n = \cos \frac{n}{4} \pi, \quad (n=0, 1, 2, \dots).$

由于 $-1 \leq \cos \frac{n}{4} \pi \leq 1$, 当 $n=8k (k=1, 2, \dots)$ 时, $a_{8k} \rightarrow 1 (k \rightarrow \infty)$, 当 $n=4(2k+1) (k=1, 2, 3, \dots)$ 时, $a_{4(2k+1)} \rightarrow -1 (k \rightarrow \infty)$, 于是有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$$

习 题

1. 证明:

$$(1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

2. 设 $x_n > 0, y_n > 0$, 证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则对任何数列 $\{y_n\}$ 成立:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$$

4. 求下列数列的上极限与下极限:

$$(1) a_n = \frac{1}{2^{-n} + (-1)^n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(2) a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(3) a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(4) a_n = \sin \frac{n\pi}{5} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$5. \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_n|} = a, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{k_0+n}|} = a.$$

此处 k_0 是任意固定的整数.

6. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < b$, 证明: 必存在 N , 当 $n > N$ 时, 有 $a_n < b$. 又如果

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < b$. 情况如何?

§ 2. 级数的收敛性及其基本性质

一系列无穷多个数 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, 写成和式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

就称为无穷级数, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. 这仅仅是一种形式上的相加, 这种

加法是不是具有“和数”呢? 这个“和数”的确切意义又是什么呢?

为了回答这个问题, 我们先令

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots,$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k, \dots$$

这样, 对任何一个无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 我们总可以作出一个数列 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k (n=1, 2, 3, \dots)$, 并称 S_n 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 次部分和 (简称部分和), 称数列 $\{S_n\}$ 为级数的部分和数列. 反之, 从一个数列 $\{S_n\}$, 也可以作出一个级数, 使这个级数的部分和数列恰恰就是 $\{S_n\}$, 实际上这只要取

$$\begin{aligned} u_1 &= S_1, \quad u_2 = S_2 - S_1, \quad u_3 = S_3 - S_2, \quad \dots, \\ u_n &= S_n - S_{n-1}, \quad \dots \end{aligned}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 就是所要求的级数.

定义 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于有限值 S , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = S$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$$

也称此值 S 为级数的和数. 若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 当级数收敛时, 又称

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$$

为级数的余和.

由此可见, 研究无穷级数的收敛问题, 实质上就是研究部分和数列的收敛问题, 这就使得我们能够应用已经知道的有关数列极限的知识来研究无穷级数.

首先, 我们给出收敛级数的一些基本性质.

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, a 为任一常数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a u_n$ 亦收

敛,并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a u_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 S_n , 由假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

S 为一有限数. 又设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a u_n$ 的部分和为 S'_n , 显然有 $S'_n = a S_n$, 再按数列极限性质知道

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a S_n = a S$$

这就是

$$\sum_{n=1}^{\infty} a u_n = a S = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

性质 2 若两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

利用数列极限的运算法则即可获得证明.

性质 3 一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 对其项任意加括号后所成级数

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + \cdots + u_{i_2}) + \cdots$$

仍为收敛, 且其和不变.

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 那么加括号后的级数的部分和数列 $\{A_n\}$ 有

$$A_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1} = S_{i_1}$$

$$A_2 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) = S_{i_2}$$

.....

$$\begin{aligned}
 A_n &= (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) + \cdots \\
 &\quad + (u_{i_{n-1}+1} + u_{i_{n-1}+2} + \cdots + u_{i_n}) = S_{i_n} \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

可见, $\{A_n\}$ 实际上是 $\{S_n\}$ 的一个子数列, 故由 $\{S_n\}$ 的收敛性立即推得 $\{A_n\}$ 也收敛, 且其极限值相同.

要注意的是: 加括号后的级数为收敛时, 不能断言原来未加括号的级数也收敛, 例如级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

加括号后成为

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

它收敛于零, 但原来未加括号的级数是发散的.

性质 4(收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $u_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 由于

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

得
$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

这一性质告诉我们, 当我们考察一个级数是否收敛时, 我们首先应该考察当 $n \rightarrow \infty$ 时, 这个级数的一般项 u_n 是否趋于零, 如果 u_n 不趋于零, 那么立即可以断言这个级数是发散的. 但要注意的是: 一般项 u_n 趋于零只是级数收敛的必要条件, 不是充分条件. 例如级数

$$\begin{aligned}
 &1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\text{共 2 项}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{\text{共 3 项}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{\text{共 } n \text{ 项}} + \frac{1}{n+1} + \cdots
 \end{aligned}$$