亚纯函数的不动点与分解论

庄圻泰 杨重骏

北京大学出版社

亚纯函数的不动点与分解论

庄圻泰　杨重骏

北京大学出版社

内 容 简 介

亚纯函数的不动点与分解的理论是复分析的一个重要分支，近代有许多有关的研究工作．本书的目的一方面是使读者具备这个理论的基本知识；另一方面是引起读者研究这个分支的兴趣．本书共分四章和五个附录．前两章扼要地论述了 Nevanlinna 的亚纯函数理论和 Montel 的全纯函数正规族理论，并根据这两个理论证明了几个关于不动点的基本定理．后两章偏重于介绍亚纯函数的分解及不动点与分解的研究工作，论述了关于分解及不动点的一些近代研究成果，并提出了一些待解决的问题供读者思考．

本书可供高等院校数学系高年级学生和研究生及有关的研究人员阅读．

亚纯函数的不动点与分解论

庄圻泰　杨重骏

责任编辑　徐信之

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

850×1168 毫米　32 开本　8.5 印张　200 千字

1988 年 3 月第一版　1988 年 3 月第一次印刷

印数：00001—3000 册

ISBN 7-301-00010-3/O-005　定价：3.25元

序 言

亚纯函数的理论的研究工作，在国内从三十年代开始到现在已有五十年的历史. 在这段悠长的时间内，国内作出了大量研究成果，其中有一些受到国际上同行专家的好评及重视. 但国内过去在这方面的研究工作都限于理论本身的范畴之内，至于这个理论对数学的其它分支的应用方面的研究基本上没有作，只是在较近的时期内才开始有一些这方面的研究工作.

亚纯函数的不动点与分解是在应用上的两个方面. 在不动点方面的研究中,历史上 Fatou 和 Julia 等人用了 Montel的正规族理论，在近代 Baker, Hayman 及庄圻泰等人继续并光大了此方面的研究工作. 分解论是六十年代末期才开始萌芽的. 在这方面研究的有 Gross, Yang (杨重骏), Goldstein, Ozawa, Goldberg 及 Prokopovich 等人. 他们主要是用了 Nevanlinna 的亚纯函数理论. 现在国际上已经发表了许多有关分解论的论文，并出版了有关的书,其中有 F. Gross 著的《Factorization of meromorphic functions》及 C. C. Yang 主编的论文集《Factorization theory of meromorphic functions》. 这两本书中都包含关于不动点及关于分解的内容,但由目前看来这两本书的研究结果已显陈旧了.事实上不动点与分解是互相联系着的. 此外应该指出的是最近的一个研究趋势是把不动点与分解的研究和函数方程及微分方程关联起来. 此方面 Steinmetz 得到了很好的结果. 函数方程的研究国外有 Goldstein, Ozawa, A. Z. Mokhoriko, V. D. Mokhoriko 等人,而在国内函数方程方面的研究工作是很少的.

本书的目的是一方面使读者具备关于亚纯函数的不动点与分

解的基本知识；另一方面引起读者进行有关研究工作的兴趣．本书共分四章和几个附录，其中许多近代的新的研究成果不包含在上述的两本书之内．本书的前两章是由庄圻泰执笔，其内容偏重于基本知识方面，因而证明比较详细．后两章和几个附录由杨重骏执笔，其中提出了一些待解决的问题供读者思考，内容偏重于科学研究方面．在这一部分的写作过程中，有些定理的叙述及证明在文字方面参照了宋国栋所编的讲义．

最后我们感谢北京大学出版社同意将本书出版．胡美香女士为本书承担了繁重的抄写工作，随后敖海龙，马立志，胡振军和华歆厚四位研究生进行了校对．对此我们也都表示深切的谢意．

庄圻泰　杨重骏

1986年1月

目　录

第一章　亚纯函数的 Nevanlinna 理论

§1.1 导　言

在函数论的发展过程中，Nevanlinna 的亚纯函数理论是近代的一项巨大成就，它的内容非常丰富．在本章中将对于这个理论作一系统的初步介绍，其中内容的选取主要考虑到它在以后几章中关于亚纯函数的不动点与分解的应用．本章中的一部分内容来自庄圻泰著的《亚纯函数的奇异方向》一书．除此书外，读者亦可参考 R. Nevanlinna 著的《Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes》和 W. K. Hayman 著的《Meromorphic functions》两本书．

在本书中亚纯函数(除去特别指出者外)均为在复平面 **C** 为亚纯的函数．非为有理函数的亚纯函数称为超越亚纯函数．整函数可以看做是亚纯函数的特别情形，即不取值∞的亚纯函数．

§1.2 Poisson-Jensen 公式

定理 1.1　设 $f(z)$ 为在一区域 $|z|<R$ $(0<R\leqslant\infty)$ 的一个亚纯函数，不恒等于 0．考虑一圆 $|z|<\rho$ $(0<\rho<R)$ 和在此圆内 $f(z)$ 的零点 $a_\lambda(\lambda=1,2,\cdots,h)$ 及极点 $b_\mu(\mu=1,2,\cdots,k)$，其中每一零点或极点出现的次数与其级相同，则在圆 $|z|<\rho$ 内成立着下列公式：

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|\operatorname{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)d\varphi$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{h}\log\left|\frac{\rho^2-\bar{a}_\lambda z}{\rho(z-a_\lambda)}\right|+\sum_{\mu=1}^{k}\log\left|\frac{\rho^2-\bar{b}_\mu z}{\rho(z-b_\mu)}\right|.$$

(1.1)

R. Nevanlinna 称此公式为 Poisson-Jensen 公式.

证 为了证明这个公式我们分别两种情形:

1° 在圆 $|z|=\rho$ 上 $f(z)$ 没有零点及极点.我们知道如果 z_0 为圆 $|z|<\rho$ 内一点,则函数

$$w=\frac{\rho(z-z_0)}{\rho^2-\bar{z}_0 z}$$

将圆 $|z|=\rho$ 变为圆 $|w|=1$, 并将圆 $|z|=\rho$ 的内部变为圆 $|w|=1$ 的内部. 作乘积

$$P(z)=\prod_{\lambda=1}^{h}\frac{\rho(z-a_\lambda)}{\rho^2-\bar{a}_\lambda z},\quad Q(z)=\prod_{\mu=1}^{k}\frac{\rho(z-b_\mu)}{\rho^2-\bar{b}_\mu z},$$

并考虑函数

$$F(z)=f(z)\frac{Q(z)}{P(z)}. \tag{1.2}$$

$F(z)$ 仍为区域 $|z|<R$ 内之一亚纯函数,但在圆 $|z|<\rho$ 内无零点及极点,而在圆 $|z|=\rho$ 上

$$|F(z)|=|f(z)|. \tag{1.3}$$

取一值 $R_1(\rho<R_1<R)$ 使在圆环 $\rho<|z|<R_1$ 内 $F(z)$ 无零点及极点. 则在圆 $|z|<R_1$ 内 $F(z)$ 无零点及极点, 故在圆 $|z|<R_1$ 内 $F(z)$ 为全纯并且无零点. $\log|F(z)|$为 圆 $|z|<R_1$ 内之一调和函数; 根据 Poisson 公式在圆 $|z|<\rho$ 内成立着下列公式:

$$\log|F(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(\rho e^{i\varphi})|\operatorname{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)d\varphi. \tag{1.4}$$

由 (1.3) 式, 此公式中之积分与 (1.1) 式中之积分相等. 故根据 (1.2) 式由 (1.4) 式即得 (1.1) 式.

2° 在圆 $|z|=\rho$ 上, $f(z)$ 有零点或极点.在此情形 (1.1) 式中之积分为一反常积分,故首先须证明此积分有意义. 因为

$$\left|\operatorname{Re}\left(\frac{\rho e^{i\varphi}+z}{\rho e^{i\varphi}-z}\right)\right|\leqslant\frac{\rho+|z|}{\rho-|z|},$$

只需证明积分

$$\int_0^{2\pi}|\log|f(\rho e^{i\varphi})||\,d\varphi \tag{1.5}$$

有意义．为此起见考虑圆 $|z|=\rho$ 上 $f(z)$ 之一零点或极点 $z_0=\rho e^{i\varphi_0}$．在一适当小圆 $|z-z_0|<\delta$ 内

$$f(z)=(z-z_0)^s g(z),$$

其中 s 为一整数(正或负)而 $g(z)$ 为一函数在圆 $|z-z_0|<\delta$ 内为全纯并且无零点． 故若 $\varphi_0-\eta\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0+\eta$ (η 为适当小正数)则

$$f(\rho e^{i\varphi})=(\rho e^{i\varphi}-\rho e^{i\varphi_0})^s g(\rho e^{i\varphi}),$$

$$\log|f(\rho e^{i\varphi})|=s\log\rho+\log|e^{i\varphi}-e^{i\varphi_0}|+\log|g(\rho e^{i\varphi})|,$$

$$|\log|f(\rho e^{i\varphi})||\leqslant A+\log\frac{1}{|e^{i\varphi}-e^{i\varphi_0}|},$$

其中 A 为一常数．我们有

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0}\left|\frac{e^{i\varphi}-e^{i\varphi_0}}{\varphi-\varphi_0}\right|=1,$$

故若 $0<|\varphi-\varphi_0|\leqslant\eta_1$ (η_1 为一适当小正数，$\eta_1<\eta$)，则

$$|e^{i\varphi}-e^{i\varphi_0}|>\frac{1}{2}|\varphi-\varphi_0|,$$

$$|\log|f(\rho e^{i\varphi})||<A+\log 2+\log\frac{1}{|\varphi-\varphi_0|}.$$

我们知道积分

$$\int_{\varphi_0-\eta_1}^{\varphi_0+\eta_1}\log\frac{1}{|\varphi-\varphi_0|}\,d\varphi$$

有意义，故积分

$$\int_{\varphi_0-\eta_1}^{\varphi_0+\eta_1}|\log|f(\rho e^{i\varphi})||\,d\varphi$$

有意义．由此即知积分 (1.5) 有意义．

现在证明在圆 $|z|<\rho$ 内(1.1)式仍成立．考虑圆 $|z|<\rho$ 内一点 z 不是 $f(z)$ 的一个零点或极点．取一值 $\rho'<\rho$ 使此点 z 及 $a_\lambda(\lambda=1,2,\cdots,h)$，$b_\mu(\mu=1,2,\cdots,k)$ 各点均包含在圆 $|z|<\rho'$ 内．则根据情形 1° 有公式:

$$\log|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho'e^{i\varphi})|\mathrm{Re}\left(\frac{\rho'e^{i\varphi}+z}{\rho'e^{i\varphi}-z}\right)d\varphi$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{h}\log\left|\frac{\rho'^2-\bar{a}_\lambda z}{\rho'(z-a_\lambda)}\right|+\sum_{\mu=1}^{k}\log\left|\frac{\rho'^2-\bar{b}_\mu z}{\rho'(z-b_\mu)}\right|.$$

令 $\rho'\to\rho$，则此式中之第一和数及第二和数分别以(1.1)式中第一和数及第二和数为极限，而又可证明此式中之积分以(1.1)式中之积分为极限，故得(1.1)式．

假定 $z=0$ 不是函数 $f(z)$ 的一个零点或极点．在(1.1)式中令 $z=0$ 得公式

$$\log|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\rho e^{i\varphi})|d\varphi$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{h}\log\frac{\rho}{|a_\lambda|}+\sum_{\mu=1}^{k}\log\frac{\rho}{|b_\mu|}. \qquad (1.6)$$

此公式称为 Jensen 公式．

以 $n\left(r,\frac{1}{f}\right)$ 及 $n(r,f)$ 分别表示 $f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant r$ $(0<r<R)$ 的零点的个数及极点的个数(一个 m 级的零点或极点算作 m 个零点或极点)．我们知道

$$\sum_{\lambda=1}^{h}\log\frac{\rho}{|a_\lambda|}=\int_{r_0}^{\rho}\left(\log\frac{\rho}{t}\right)dn\left(t,\frac{1}{f}\right),$$

其中 r_0 为一适当小的正数．利用分部积分法，上式中之积分等于

$$\left[\left(\log\frac{\rho}{t}\right)n\left(t,\frac{1}{f}\right)\right]_{r_0}^{\rho}+\int_{r_0}^{\rho}\frac{n\left(t,\frac{1}{f}\right)}{t}dt$$

$$= \int_{r_0}^{\rho} \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right)}{t} dt = \int_0^{\rho} \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right)}{t} dt.$$

故

$$\sum_{\lambda=1}^{h} \log \frac{\rho}{|a_\lambda|} = \int_0^{\rho} \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right)}{t} dt.$$

同理

$$\sum_{\mu=1}^{k} \log \frac{\rho}{|b_\mu|} = \int_0^{\rho} \frac{n(t, f)}{t} dt.$$

另一方面有

$$\log |f(z)| = \log^+ |f(z)| - \log^+ \left|\frac{1}{f(z)}\right|,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\frac{1}{f(\rho e^{i\varphi})}\right| d\varphi. \quad (1.7)$$

故 (1.6) 式可写为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(\rho e^{i\varphi})| d\varphi + \int_0^{\rho} \frac{n(t, f)}{t} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\frac{1}{f(\rho e^{i\varphi})}\right| d\varphi + \int_0^{\rho} \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \log |f(0)|. \quad (1.8)$$

在以上 Jensen 公式中我们假定 $z=0$ 不是 $f(z)$ 的一个零点或极点. 如果 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一个零点或极点，则在 $z=0$ 的邻域内

$$f(z) = c_s z^s + c_{s+1} z^{s+1} + \cdots \qquad (c_s \neq 0).$$

考虑函数

$$f_1(z) = z^{-s} f(z).$$

$f_1(z)$ 仍为区域 $|z| < R$ 内之一亚纯函数而 $f_1(0) = c_s$. $f_1(z)$ 在圆 $|z| \leqslant r$ 的零点个数及极点个数分别为 $n\left(r, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)$ 及 $n(r, f) - n(0, f)$. 另外

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f_1(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi - s\log\rho, \tag{1.9}$$

$$s = n\left(0, \frac{1}{f}\right) - n(0, f). \tag{1.10}$$

应用(1.8)式到 $f_1(z)$, 然后利用(1.7), (1.9), (1.10)式, 得公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi + \int_0^{\rho} \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t}\,dt + n(0, f)\log\rho$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\frac{1}{f(\rho e^{i\varphi})}\right|\,d\varphi + \int_0^{\rho} \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t}\,dt$$

$$+ n\left(0, \frac{1}{f}\right)\log\rho + \log|c_s|. \tag{1.11}$$

这个公式称为 Jensen-Nevanlinna 公式,它包含(1.8)式.

§1.3 特征函数

设 $f(z)$ 为在一区域 $|z| < R(0 < R \leqslant \infty)$ 的亚纯函数,不恒等于0. 并考虑公式(1.11), 在此公式中易 ρ 为 r, 并命:

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi, \tag{1.12}$$

$$N(r, f) = \int_0^{r} \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t}\,dt + n(0, f)\log r, \tag{1.13}$$

则(1.11)式可写为

$$m(r, f) + N(r, f) = m\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log|c_s|. \tag{1.14}$$

再命
$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f) \qquad (0<r<R), \quad (1.15)$$
则上式又可写为
$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|c_s|. \qquad (1.16)$$
Nevanlinna 称 $T(r,f)$ 为函数 $f(z)$ 的特征函数. 如果 $f(z)$ 恒等于 0, (1.15) 式仍有意义,并且 $T(r,f)=0$, 但此时 (1.16) 式无意义.

在以下我们求出 $T(r,f)$ 的一个表示式,并证明它的几个性质. 为此先注意有公式
$$\frac{1}{2\pi}\int^{2\pi}\log|\alpha-e^{i\theta}|d\theta=\log^+|\alpha|, \qquad (1.17)$$
其中 α 为任意的一个复数. 事实上, 若 $\alpha=0$, 则 (1.17) 式显然成立. 设 $\alpha\neq 0$, 并考虑函数 $\varphi(z)=\alpha-z$. 根据公式 (1.6),
$$\log|\alpha|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\varphi(e^{i\theta})|d\theta \qquad (|\alpha|\geqslant 1),$$
$$\log|\alpha|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\varphi(e^{i\theta})|d\theta-\log\frac{1}{|\alpha|} \quad (|\alpha|<1).$$
由此即得 (1.17) 式.

现在假定 $f(0)$ 为有穷. 应用 (1.7) 及 (1.8) 式到函数 $f(z)-e^{i\theta}$, 其中 θ 为一实数使 $e^{i\theta}\neq f(0)$, 得
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\varphi$$
$$=N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)-N(r,f)+\log|f(0)-e^{i\theta}|,$$
其中 $0<r<R$. 在此式中将 r 固定并将两端对 θ 求积分,得
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\varphi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta-N(r,f)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(0)-e^{i\theta}|d\theta. \tag{1.18}$$

但根据(1.17)式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi=m(r,f),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(0)-e^{i\theta}|d\theta=\log^+|f(0)|,$$

故(1.18)式可写为

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta+\log^+|f(0)|. \tag{1.19}$$

这就是我们要求的 $T(r,f)$ 的表示式,称为 Cartan 公式.

在以上我们假定 $f(0)$ 为有穷.现在设 $z=0$ 为 $f(z)$ 的一个 m 级极点, 并设 c_{-m} 为在 $z=0$ 的邻域内 $f(z)$ 的展式中 z^{-m} 的系数. 则 $z=0$ 亦为 $f(z)-e^{i\theta}$ (θ 为一实数)的一个 m 级极点, 并且在 $z=0$ 的邻域内 $f(z)-e^{i\theta}$ 的展式中 z^{-m} 的系数亦为 c_{-m}, 故应用(1.7)及(1.11)式到函数 $f(z)-e^{i\theta}$, 得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})-e^{i\theta}|d\varphi$$

$$=N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)-N(r,f)+\log|c_{-m}|.$$

仿上得公式

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)d\theta+\log|c_{-m}|. \tag{1.20}$$

当 θ 固定时, $N\left(r,\frac{1}{f-e^{i\theta}}\right)$ 为 r 的非减函数,并为 $\log r$ 的凸函数,故由(1.19)及(1.20)式即知 $T(r,f)$ 为 r 的非减函数并为 $\log r$ 的凸函数.

我们需要证明由 (1.13) 式定义的函数 $N(r, f)$ 是 r 的非减函数，并且是 $\log r$ 的凸函数. $N(r, f)$ 为 r 的非减函数是显然的. 至于 $N(r, f)$ 是 $\log r$ 的凸函数可以证明如下：考虑 r 的三个值 $0<r_1<r_2<r_3<R$，我们有

$$
\begin{aligned}
&N(r_2, f)-N(r_1, f)\\
&\qquad=\int_{r_1}^{r_2}\frac{n(t, f)-n(0, f)}{t}\,dt+n(0, f)\log\frac{r_2}{r_1}\\
&\qquad=\int_{r_1}^{r_2}\frac{n(t, f)}{t}\,dt\leqslant n(r_2, f)\int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t}=n(r_2, f)\log\frac{r_2}{r_1}.
\end{aligned}
$$

同理有

$$N(r_3, f)-N(r_2, f)\geqslant n(r_2, f)\log\frac{r_3}{r_2},$$

故有

$$\frac{N(r_2, f)-N(r_1, f)}{\log\dfrac{r_2}{r_1}}\leqslant\frac{N(r_3, f)-N(r_2, f)}{\log\dfrac{r_3}{r_2}}.$$

由此又可推出

$$N(r_2, f)\leqslant\frac{\log\dfrac{r_3}{r_2}}{\log\dfrac{r_3}{r_1}}N(r_1, f)+\frac{\log\dfrac{r_2}{r_1}}{\log\dfrac{r_3}{r_1}}N(r_3, f).\qquad(1.21)$$

这个不等式就表示 $N(r, f)$ 是 $\log r$ 的凸函数.

现在证明关于特征函数的几个不等式. 首先关于 $\log^+\alpha$ 有以下两个不等式:

$$\log^+(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p)\leqslant\sum_{j=1}^{p}\log^+\alpha_j,\qquad(1.22)$$

$$\log^+(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p)\leqslant\sum_{j=1}^{p}\log^+\alpha_j+\log p.\qquad(1.23)$$

事实上按定义

$$\log^+\alpha=0\quad(0\leqslant\alpha<1),\quad\log^+\alpha=\log\alpha\quad(\alpha\geqslant1).$$

为了证明(1.22)式，只需注意，若 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p<1$，则左边为 0；若 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p\geqslant 1$，则左边为

$$\log(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p)=\sum_{j=1}^{p}\log\alpha_j\leqslant\sum_{j=1}^{p}\log^+\alpha_j.$$

为了证明(1.23)式设 α 为 $\alpha_j(j=1,2,\cdots,p)$ 各数中之最大者，则(1.23)式的左边不超过 $\log^+p\alpha$，而

$$\log^+p\alpha\leqslant\log^+\alpha+\log p.$$

设 $f_j(z)(j=1,2,\cdots,p)$ 为在一区域 $|z|<R(0<R\leqslant\infty)$ 的 p 个亚纯函数. 由(1.22)及(1.23)式易知，于 $0<r<R$ 有不等式：

$$m(r,f_1f_2\cdots f_p)\leqslant\sum_{j=1}^{p}m(r,f_j),\tag{1.24}$$

$$m(r,f_1+f_2+\cdots+f_p)\leqslant\sum_{j=1}^{p}m(r,f_j)+\log p.\tag{1.25}$$

另外若 $f_j(0)\neq\infty(j=1,2,\cdots,p)$，则于 $0<r<R$ 亦有不等式：

$$N(r,f_1f_2\cdots f_p)\leqslant\sum_{j=1}^{p}N(r,f_j),\tag{1.26}$$

$$N(r,f_1+f_2+\cdots+f_p)\leqslant\sum_{j=1}^{p}N(r,f_j).\tag{1.27}$$

先证明当 $p=2$ 时(1.26)及(1.27)式成立. 为此分别以 $n_1(t)$, $n_2(t)$, $n_{12}(t)$, $n'_{12}(t)$ $(0<t<R)$ 表示在圆 $|z|\leqslant t$，函数 $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_1(z)f_2(z)$, $f_1(z)+f_2(z)$ 的极点的个数. 显然只需证明：

$$n_{12}(t)\leqslant n_1(t)+n_2(t),\tag{1.28}$$

$$n'_{12}(t)\leqslant n_1(t)+n_2(t).\tag{1.29}$$

先证(1.28)式. 如果在圆 $|z|\leqslant t$，函数 $f_1(z)f_2(z)$ 无极点，则(1.28)式显然. 如果在圆 $|z|\leqslant t$，函数 $f_1(z)f_2(z)$ 有极点，则在此圆 $f_1(z)$ 或 $f_2(z)$ 必有极点；设 $z_k(k=1,2,\cdots,q)$ 为在圆