自然科学知识丛书

数海钩沉

——世界数学名题选编

自然科学知识丛书

数 海 钩 沉

——世界数学名题选辑

高 希 尧 编

陕 西 科 学 技 术 出 版 社

自 然 科 学 知 识 丛 书

数 海 钩 沉

——世界数学名题选辑

高希尧 编

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行　西安新华印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 7.5　字数 153,000

1982年3月第1版　1982年6月第1次印刷

印数 1—52,000

统一书号：13202·29　定价：0.63元

出版说明

实现四个现代化是我国现阶段的中心任务。广大工农兵、青年、干部，迫切需要自然科学方面的普及读物。为满足这种需要，我们编辑一套《自然科学知识丛书》，陆续出版。

这套丛书，力求用辩证唯物主义和历史唯物主义观点，通俗地介绍数学、物理、化学、天文、地理、生物等方面的基础知识。由于我们水平有限，经验不足，难免有些缺点、错误，希望广大读者批评指正。

序　言

陕西省数学会理事长
陕西师范大学教授　魏庚人

数学是一门基础科学，是理解自然和征服自然的有力武器，任何一门自然科学和工程技术都离不开数学作为支柱。

数学的产生和发展经过了萌芽时期（公元五世纪以前）、初等数学即常量数学时期（公元五世纪至十七世纪）、变量数学即数学分析的出现和发展时期（公元十七世纪至十九世纪）和现代数学时期。在这漫长的历史过程中，世界各国人民都对数学科学的发展作出了自己的贡献。数学科学是世界各国人民集体智慧的结晶。

数学是中华民族所擅长的科学。在我国历史上，不仅出现过象刘徽、祖冲之、张燧（一行）、沈括、贾宪、秦九韶、朱世杰、李冶和程大位等著名数学家，还出现过象《周髀算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《张邱建算经》《缀术》等举世闻名的数学著作。我国最早应用了十进位制的记数法，这比世界所见最早的印度十进位制数码早了约一千年。我国的《九章算术》成书于纪元时期，是世界上最早的系统论述分数运算、提出联立一次方程解法、引用负数概念的著作。其中有关分数的运算，比印度要早六、七百年；有关联立一次方程的解法，比法国数学家布丢早了一千五百年；有关负数概念的引用，比印度早了六百多年，比欧洲早

出一千五、六百年。我国伟大的数学家祖冲之，最早计算出准确到小数点后六位的圆周率。这一高度准确的纪录一直保持了近千年，只是到了公元十五世纪才由中亚细亚数学家阿尔·卡西所打破。祖冲之用分数$\frac{355}{113}$表示圆周率的密率，更是世界数学史上最卓越的成就之一，它比通称为“安托尼兹率”的荷兰数学家安托尼兹的相同结果，要早千年以上。到了宋代，中国数学发展到了最高峰，成为中世纪世界数学史上最丰富多彩的一页，在许多重要的数学学科上都处于遥遥领先的地位。十一世纪中叶的数学家贾宪，最早创立了“增乘开方法”，比西方所谓“霍纳法”早了七百七十年。贾宪的“开方作法本源”图（杨辉三角），比法国数学家巴斯卡采用的相同的图（巴斯卡三角）早出五、六百年。我国伟大数学家秦九韶在《数书九章》中，最早提出了高次方程的数值解法，较欧洲相同的解法（霍纳方法）早了八百多年；他提出的联立同余式解法，比世界著名数学家欧拉和高斯的同类结果，早了五百余年。

希腊人在数学发展史上也取得了辉煌成就，作出了卓越的贡献。

公元前七世纪至公元后六世纪，是数学史上著名的希腊时期。公元前三世纪，希腊相继出现了伟大的数学家欧几里德、阿基米德和阿波罗尼，使希腊数学发展到了全盛时期。欧几里德的《几何原本》成为两千多年间几何教科书的楷模，仅从印刷术发明以来，就先后出现过一千多种版本。

希腊人还研究了圆锥曲线，证明了某些属于射影几何的一些定理，建立了球面几何学，制出了最初的一些正弦表，

发现了一系列复杂几何图形的面积和体积计算方法。在算术和代数方面，他们奠定了数论的基础，如他们对素数的研究（欧几里德关于素数个数无限的定理、埃拉托色尼筛法等），对不定方程的研究（刁番都方程）都是属于这方面的。希腊人还发现了无理数。

在萌芽时期和初等数学时期，对数学发展作出重要贡献的，除中国和希腊人外，还有埃及人、巴比伦人和印度人。埃及人和巴比伦人的贡献主要在数学发展的早期。印度人的主要贡献是对现代计数法和代数方程的研究。在印度，曾出现过婆罗笈多（七世纪）、拜斯卡拉（十二世纪）等著名数学家。

十七世纪，数学发展到一个新时期——变量数学时期。在这个时期，不少新的数学分支相继出现，杰出的数学家层出不穷。牛顿、莱布尼兹、笛卡儿、欧拉、高斯等成为这个时期的代表人物。变量数学建立过程中第一个决定性步骤是笛卡儿1637年创立解析几何学。牛顿和莱布尼兹在十七世纪后半叶建立微积分学，这是变量数学发展的第二步。在这同时，还出现了级数理论、微分方程、微分几何。在十九世纪，复变函数论产生，概率论也得到了发展。十九世纪后期，数学发展进入现代数学时期。

在数学发展的历史长河中，有许多名题象颗颗珍珠闪耀着人类智慧的光彩，千百年来为各国人民所珍爱。不少名题，由于其构思巧妙，深刻地反映了某种数学思想和数学方法，而被编入各种教科书，承前启后，世代传授；不少名题，由于内容的精彩有趣，成了锻炼人们智巧的数学游戏，在民间广为流传；更有一些似易而实难的题目，在长达千年

的时间里，磨炼着无数数学爱好者的毅力和才华，在探求过程中，开了某些数学新分支的先声，产生了不可估量的影响。这些题目，有的产生于相异的国度而内容几无差别；有的经历过不同的时代而解法争奇斗胜；有的以构图的奇巧见长，有的以朗朗上口的诗歌体赢人。真是千奇百巧，琳琅满目。我相信，学习研究这些名题，将会使广大青少年的数学学习增益不少。

这些名题，散见于多种中外数学书报。高希尧同志在学习和研究数学史的过程中，对它们进行了初步发掘，附以史料介绍，加上个人的见地和评断，整理成册子，名曰《数海钩沉》。古往今来，有多少金银珠宝因翻船而沉没在浩淼的大海之中，要重睹它们的奇光异彩，非得把它们打捞出来不可。目前，世界上有不少国家正在做这件工作。名题有如金银珠宝，要将它们从深邃的数海中采撷出来，也是要下一番功夫的。以作者的勤苦、忠实，我以为这本小册子虽然还有不足之处，但广大青少年读者是一定会从中吸取不少有益的东西的。

一九八〇年十二月于西安

目　录

1．勾股定理（中国、希腊）

对于一个定理，从不同的角度给出各种不同的证明方法，这在数学史上本是司空见惯的事，但是，如果有人告诉你，一个定理有数百种证明方法，你大概会感到难以置信，然而这毕竟是事实，国外曾出版过一本数学小册子（*E. E. S. Loomis, The Pythagorean Proposition, Edwards Brothers, Ann Arbor, Michigan*, 1940），专门搜集了勾股定理的证明方法，就有365种之多。

勾股定理，亦称商高定理或毕达哥拉斯（*Pythageras*，古希腊数学家）定理。其内容如下：

在直角三角形中，斜边（弦）的平方等于两直角边（长者叫股，短者叫勾）平方的和。

对于勾股定理的研究，中国古代数学家作出了巨大的贡献，据我国现存最古的一部数学典籍《周髀算经》记载，公元前一千一百多年数学家商高在与周公的谈话中，就明确地提出了“勾三股四弦五”这一重要关系。书中还通过介绍测量太阳的高度和远近的方法，实质上给出了普遍的勾股定理。原书对勾股定理没有加以证明，后来赵爽（君卿）（公元三至四世纪人）对该书作注时，利用“弦图”，将几何图形互相移补凑合，分段加以朱、青、黄诸色，以“出入相补，各从其类”，由此得出各形间的关系，从而给出了我国关于勾股定理最早的一个证明。

〔**赵爽证明**〕如图1，其中每一个直角三角形称为“朱实”，中间的一个小正方形叫“中黄实”，以弦为边的正方

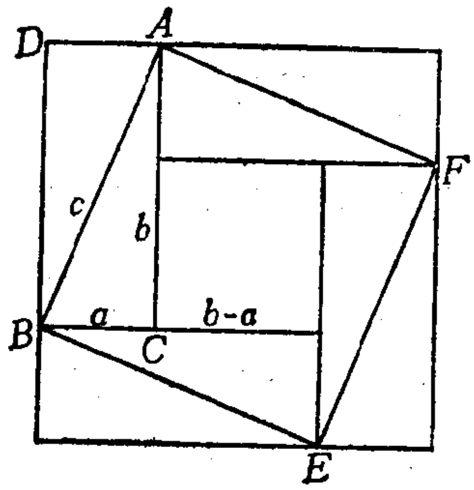

图 1

形$ABEF$叫"弦实"．四个朱实加上一个黄实就等于弦实．写成代数式，就是

$$4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2=c^2.$$

化简即得

$$a^2+b^2=c^2.$$

自赵爽以后，我国古代数学家梅文鼎、李锐、项名达、华蘅芳等还创造了多种证法*．

在勾股定理的研究方面作出了巨大贡献的除中国古代数学家而外，还有许多别的国家和民族的数学家，特别是古希腊、埃及、印度的数学家．古希腊数学家毕达哥拉斯是西方第一个严格证明了勾股定理的人．相传在公元前六世纪，当他找到了证明勾股定理的方法以后，欣喜若狂，杀了一百头牛来祭神，以示庆贺．故西方亦有人称勾股定理为"百牛定理"．

古埃及人也早就知道了勾股定理．不但知道直角三角形的两条直角边的平方和，一定等于斜边的平方；而且还知道，如果一个三角形两边的平方和，等于第三条边的平方，这个三角形一定是直角三角形．他们利用这个原理，创造了一个画直角的方法：在绳上打十二个距离相等的结，把它绷成一个三角形，使三边长之比为3:4:5，那么3与4两边夹角一定是直角．

* 参看许莼舫：《中国几何故事》中国青年出版社，1965．

毕达哥拉斯的证明方法后来失传了，希腊大数学家欧几里德对勾股定理另作了证明，欧氏的这一出色证明方法，成为近两千年来《几何学》教科书中通用的证法。

〔**欧几里德证明**〕如图2，在直角三角形ABC各边上向外作正方形$ABED$，$BCGK$，$CAFH$。连CD，FB。

$\because\ AC=AF,\ AB=AD,\ \angle FAB=\angle CAD,$

$\therefore\ \triangle FAB\cong\triangle CAD$。

作$CL\parallel AD$。

$\because\ S_{\triangle FAB}=\frac{1}{2}FA\cdot AC$　（AC为FA边上的高），

而$S_{\square CAFH}=FA\cdot AC$，

$\therefore\ S_{\square CAFH}=2S_{\triangle FAB}$。

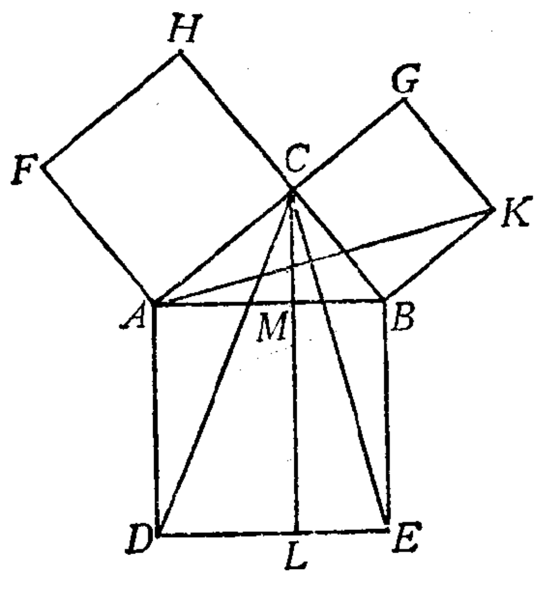

图2

又$\because\ S_{\triangle CAD}=\frac{1}{2}AD\cdot DL$　（DL为AD边上的高），

而$S_{\square ADLM}=AD\cdot DL$，

$\therefore\ S_{\square ADLM}=2S_{\triangle CAD}$。

$\therefore\ S_{\square CAFH}=S_{\square ADLM}$。

同理可证$S_{\square BCGK}=S_{\square BELM}$。

故　$S_{\square ABED}=S_{\square ADLM}+S_{\square BELM}$

$=S_{\square CAFH}+S_{\square BCGK}$。

即　$AB^2 = AC^2 + BC^2$，$c^2 = b^2 + a^2$。

这就证明了勾股定理。

有不少数学家对于勾股定理的证明都是别具一格的有趣的。英国数学家辛卜松（*Simpson*，1710—1761）的证明便是其中一例。

〔**辛卜松证明**〕把边长为$a+b$的正方形$ABCD$划分如图3，则正方形$ABCD$面积＝$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$。

又把$ABCD$划分如图4，则正方形$ABCD$面积＝$(a+b)^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2$。

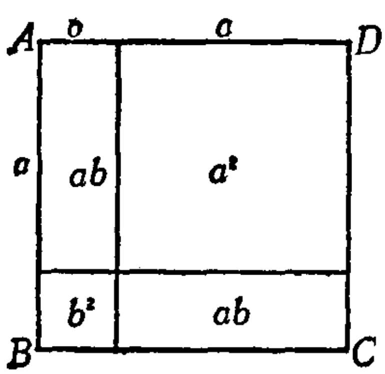

图 3

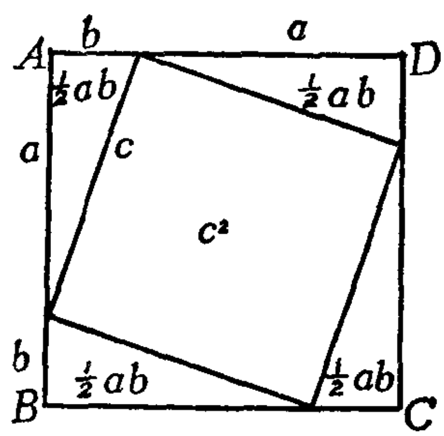

图 4

$\therefore$　$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$。

故　$a^2 + b^2 = c^2$。

以上介绍的几种证法，应用的都是等积原理。我们还可以根据相似原理来予以证明。

〔**相似法证明**〕如图 5，作直角三角形斜边上的高CH，