



自然科学知识丛书



数海钩沉

——世界数学名题选辑

自然科学知识丛书

数 海 钩 沉

——世界数学名题选辑

高 希 尧 编

陕西科学技术出版社

自然科学知识丛书

数海钩沉

——世界数学名题选辑

高希尧 编

陕西科学技术出版社出版

(西安北大街131号)

陕西省新华书店发行 西安新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7.5 字数 153,000

1982年3月第1版 1982年6月第1次印刷

印数 1—52,000

统一书号: 13202·29 定价: 0.63元

出版说明

实现四个现代化是我国现阶段的中心任务。广大工农兵、青年、干部，迫切需要自然科学方面的普及读物。为满足这种需要，我们编辑一套《自然科学知识丛书》，陆续出版。

这套丛书，力求用辩证唯物主义和历史唯物主义观点，通俗地介绍数学、物理、化学、天文、地理、生物等方面的基础知识。由于我们水平有限，经验不足，难免有些缺点、错误，希望广大读者批评指正。

序 言

陕西省数学会理事长 魏庚人
陕西师范大学教授

数学是一门基础科学，是理解自然和征服自然的有力武器，任何一门自然科学和工程技术都离不开数学作为支柱。

数学的产生和发展经过了萌芽时期（公元五世纪以前）、初等数学即常量数学时期（公元五世纪至十七世纪）、变量数学即数学分析的出现和发展时期（公元十七世纪至十九世纪）和现代数学时期。在这漫长的历史过程中，世界各国人民都对数学科学的发展作出了自己的贡献。数学科学是世界各国人民集体智慧的结晶。

数学是中华民族所擅长的科学。在我国历史上，不仅出现过象刘徽、祖冲之、张燧（一行）、沈括、贾宪、秦九韶、朱世杰、李冶和程大位等著名数学家，还出现过象《周髀算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《张邱建算经》《缀术》等举世闻名的数学著作。我国最早应用了十进位制的记数法，这比世界所见最早的印度十进位制数码早了约一千年。我国的《九章算术》成书于纪元时期，是世界上最早的系统论述分数运算、提出联立一次方程解法、引用负数概念的著作。其中有关分数的运算，比印度要早六、七百年；有关联立一次方程的解法，比法国数学家布丢早了一千五百年；有关负数概念的引用，比印度早了六百多年，比欧洲早

出一千五、六百年。我国伟大的数学家祖冲之，最早计算出准确到小数点后六位的圆周率。这一高度准确的纪录一直保持了近千年，只是到了公元十五世纪才由中亚细亚数学家阿尔·卡西所打破。祖冲之用分数 $\frac{355}{113}$ 表示圆周率的密率，更

是世界数学史上最卓越的成就之一，它比通称为“安托尼兹率”的荷兰数学家安托尼兹的相同结果，要早千年以上。到了宋代，中国数学发展到了最高峰，成为中世纪世界数学史上最丰富多彩的一页，在许多重要的数学学科上都处于遥遥领先的地位。十一世纪中叶的数学家贾宪，最早创立了“增乘开方法”，比西方所谓“霍纳法”早了七百七十年。贾宪的“开方作法本源”图（杨辉三角），比法国数学家巴斯卡采用的相同的图（巴斯卡三角）早出五、六百年。我国伟大数学家秦九韶在《数书九章》中，最早提出了高次方程的数值解法，较欧洲相同的解法（霍纳方法）早了八百多年；他提出的联立同余式解法，比世界著名数学家欧拉和高斯的同类结果，早了五百余年。

希腊人在数学发展史上也取得了辉煌成就，作出了卓越的贡献。

公元前七世纪至公元后六世纪，是数学史上著名的希腊时期。公元前三世纪，希腊相继出现了伟大的数学家欧几里德、阿基米德和阿波罗尼，使希腊数学发展到了全盛时期。欧几里德的《几何原本》成为两千多年间几何教科书的楷模，仅从印刷术发明以来，就先后出现过一千多种版本。

希腊人还研究了圆锥曲线，证明了某些属于射影几何的一些定理，建立了球面几何学，制出了最初的一些正弦表，

发现了一系列复杂几何图形的面积和体积计算方法。在算术和代数方面，他们奠定了数论的基础，如他们对素数的研究（欧几里德关于素数个数无限的定理、埃拉托色尼筛法等），对不定方程的研究（刁番都方程）都是属于这方面的。希腊人还发现了无理数。

在萌芽时期和初等数学时期，对数学发展作出重要贡献的，除中国和希腊人外，还有埃及人、巴比伦人和印度人。埃及人和巴比伦人的贡献主要在数学发展的早期。印度人的主要贡献是对现代计数法和代数方程的研究。在印度，曾出现过婆罗笈多（七世纪）、拜斯卡拉（十二世纪）等著名数学家。

十七世纪，数学发展到一个新时期——变量数学时期。在这个时期，不少新的数学分支相继出现，杰出的数学家层出不穷。牛顿、莱布尼兹、笛卡儿、欧拉、高斯等成为这个时期的代表人物。变量数学建立过程中第一个决定性步骤是笛卡儿1637年创立解析几何学。牛顿和莱布尼兹在十七世纪后半叶建立微积分学，这是变量数学发展的第二步。在这同时，还出现了级数理论、微分方程、微分几何。在十九世纪，复变函数论产生，概率论也得到了发展。十九世纪后期，数学发展进入现代数学时期。

在数学发展的历史长河中，有许多名题象颗颗珍珠闪耀着人类智慧的光彩，千百年来为各国人民所珍爱。不少名题，由于其构思巧妙，深刻地反映了某种数学思想和数学方法，而被编入各种教科书，承前启后，世代传授；不少名题，由于内容的精彩有趣，成了锻炼人们智巧的数学游戏，在民间广为流传；更有一些似易而实难的题目，在长达千年

的时间里，磨炼着无数数学爱好者的毅力和才华，在探求过程中，开了某些数学新分支的先声，产生了不可估量的影响。这些题目，有的产生于相异的国度而内容几无差别；有的经历过不同的时代而解法争奇斗胜；有的以构图的奇巧见长，有的以朗朗上口的诗歌体赢人。真是千奇百巧，琳琅满目。我相信，学习研究这些名题，将会使广大青少年的数学学习增益不少。

这些名题，散见于多种中外数学书报。高希尧同志在学习和研究数学史的过程中，对它们进行了初步发掘，附以史料介绍，加上个人的见地和评断，整理成册子，名曰《数海钩沉》。古往今来，有多少金银珠宝因翻船而沉没在浩淼的大海之中，要重睹它们的奇光异彩，非得把它们打捞出来不可。目前，世界上有不少国家正在做这件工作。名题有如金银珠宝，要将它们从深邃的数海中采撷出来，也是要下一番功夫的。以作者的勤苦、忠实，我以为这本小册子虽然还有不足之处，但广大青少年读者是一定会从中吸取不少有益的东西的。

一九八〇年十二月于西安

目 录

序 言	陕西省数学会理事长 陕西师范大学教授 魏庚人	(1)
1. 勾股定理 (中国、希腊)		(1)
2. 池中之葭 (中 国)		(6)
3. 折竹问题 (中 国)		(10)
4. 锯木求径 (中 国)		(11)
5. 勾股容圆 (中 国)		(13)
6. 邑方几何 (中 国)		(15)
7. 四表望远 (中 国)		(16)
8. 换油调漆 (中 国)		(17)
9. “方程” (中 国)		(19)
10. 五家共井 (中 国)		(22)
11. 测望海岛 (中 国)		(24)
12. 鸡兔同笼 (中 国)		(27)
13. 韩信点兵 (中 国)		(29)
14. 百鸡问题 (中 国)		(31)
15. 有女善织 (中 国)		(34)
16. 出门望九堤 (中 国)		(36)
17. 圆周率 π (中 国)		(38)
18. 牟合方盖 (中 国)		(42)

19. 隙积术 (中 国)	(45)
20. 圆城求径 (中 国)	(48)
21. 百羊问题 (中 国)	(50)
22. 田忌赛马和丁谓施工 (中 国)	(52)
23. 分银子 (巴比伦)	(55)
24. 两个正方形 (巴比伦)	(57)
25. 分大麦 (埃 及)	(59)
26. 无理数的发现 (希 腊)	(61)
27. 毕达哥拉斯数 (希 腊)	(62)
28. 埃拉托色尼的筛子 (希 腊)	(65)
29. 立方倍积问题 (希 腊)	(67)
30. 三等分角问题 (希 腊)	(71)
31. 化圆为方问题 (希 腊)	(73)
32. 月形定理 (希 腊)	(75)
33. 黄金分割 (希 腊)	(77)
34. 素数的个数 (希 腊)	(79)
35. 阿波罗尼问题 (希 腊)	(82)
36. 鞋匠皮刀形 (希 腊)	(84)
37. 圆柱容球 (希 腊)	(86)
38. 阿基米德数列 (希 腊)	(87)
39. 正七边形 (希 腊)	(90)
40. 阿基里斯和乌龟赛跑 (希 腊)	(94)
41. 海伦公式 (希 腊)	(96)
42. 海伦三角形 (希 腊)	(98)
43. 奇数列的分组 (希 腊)	(100)
44. 波托雷梅定理 (希 腊)	(102)

45. 梅涅劳定理 (希 腊)	(104)
46. 刁番都问题 (希 腊)	(106)
47. 刁番都方程 (希 腊)	(108)
48. 帕普斯问题 (希 腊)	(110)
49. 帕普斯定理 (希 腊)	(111)
50. 爱神的烦恼 (希 腊)	(113)
51. 刁番都的墓志铭 (希 腊)	(114)
52. 三角数 (印 度)	(115)
53. 莲花问题 (印 度)	(118)
54. 拜斯卡拉等式 (印 度)	(120)
55. 拜斯卡拉方程 (印 度)	(121)
56. 国际象棋发明人的报酬 (印 度)	(124)
57. “世界末日”问题 (印 度)	(126)
58. 阿尔·卡西恒等式 (中亚细亚)	(127)
59. 兔子问题 (意大利)	(130)
60. 塔尔塔里雅公式 (意大利)	(133)
61. 卡尔丹问题 (意大利)	(137)
62. 伽利略问题 (意大利)	(138)
63. 塞瓦定理 (意大利)	(140)
64. 三角形中的巧合点 (意大利)	(143)
65. 遗产问题 (瑞 士)	(146)
66. 卖鸡蛋 (瑞 士)	(148)
67. 欧拉线 (瑞 士)	(149)
68. 九点圆 (瑞士、英国)	(151)
69. 凸多面体的欧拉定理 (瑞 士)	(152)
70. 七座桥的故事 (瑞 士)	(154)

71. 史坦纳—乃毛司定理 (瑞 士)	(158)
72. 斯图姆问题 (瑞 士)	(160)
73. 拿破仑三角形 (法 国)	(163)
74. 笛卡儿方程 (法 国)	(167)
75. 帕斯卡直线 (法 国)	(169)
76. 三角形内角和问题 (法 国)	(172)
77. 波瓦松问题 (法 国)	(174)
78. 柯西不等式 (法 国)	(175)
79. 约瑟问题 (法 国)	(180)
80. 心算 (法 国)	(181)
81. 航船相遇 (法 国)	(182)
82. 辛姆生线 (英 国)	(184)
83. 斯蒂瓦特定理 (英国)	(187)
84. 瓦里斯和费尔玛问题 (英、法)	(188)
85. 地图着色问题 (英、美)	(191)
86. 莫勒定理 (英 国)	(193)
87. 圆内接四边形之面积 (德 国)	(197)
88. 开普勒问题 (德 国)	(199)
89. 莱布尼兹问题 (德 国)	(200)
90. 哥德巴赫问题 (德 国)	(202)
91. 哥德巴赫猜想 (德 国)	(204)
92. 正十七边形问题 (德 国)	(206)
93. 谁的点多? (德 国)	(209)
94. 爱因斯坦的问题 (德 国)	(212)
95. 卡达拉问题 (比利时)	(215)
96. 割草 (俄 国)	(216)

97. 蜘蛛和苍蝇 (俄 国)	(220)
98. 蝴蝶定理 (美、英)	(221)
99. 水手、猴子和椰子 (美 国)	(223)
100. 弗兰克林的遗嘱 (美 国)	(226)

1. 勾股定理 (中国、希腊)

对于一个定理，从不同的角度给出各种不同的证明方法，这在数学史上本是司空见惯的事，但是，如果有人告诉你，一个定理有数百种证明方法，你大概会感到难以置信，然而这毕竟是事实，国外曾出版过一本数学小册子 (*E. E. S. Loomis, The Pythagorean Proposition, Edwards Brothers, Ann Arbor, Michigan, 1940*)，专门搜集了勾股定理的证明方法，就有365种之多。

勾股定理，亦称商高定理或毕达哥拉斯 (*Pythagoras*, 古希腊数学家) 定理。其内容如下：

在直角三角形中，斜边 (弦) 的平方等于两直角边 (长者叫股，短者叫勾) 平方的和。

对于勾股定理的研究，中国古代数学家作出了巨大的贡献，据我国现存最古的一部数学典籍《周髀算经》记载，公元前一千一百多年数学家商高在与周公的谈话中，就明确地提出了“勾三股四弦五”这一重要关系。书中还通过介绍测量太阳的高度和远近的方法，实质上给出了普遍的勾股定理。原书对勾股定理没有加以证明，后来赵爽 (君卿) (公元三至四世纪人) 对该书作注时，利用“弦图”，将几何图形互相移补凑合，分段加以朱、青、黄诸色，以“出入相补，各从其类”，由此得出各形间的关系，从而给出了我国关于勾股定理最早的一个证明。

〔赵爽证明〕如图 1，其中每一个直角三角形称为“朱实”，中间的一个小正方形叫“中黄实”，以弦为边的正方

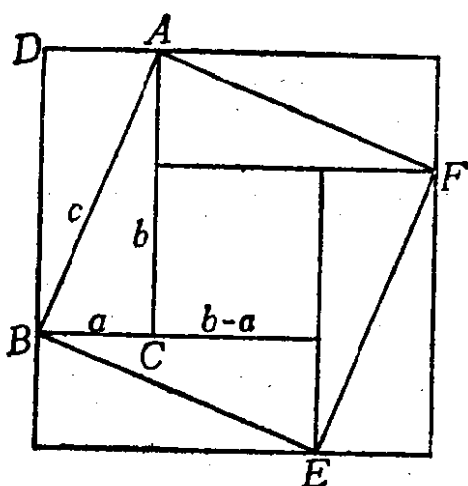


图 1

形 $ABEF$ 叫“弦实”。四个朱实加上一个黄实就等于弦实。

写成代数式，就是

$$4 \times \frac{1}{2}ab + (b-a)^2 = c^2.$$

化简即得

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

自赵爽以后，我国古代数学家梅文鼎、李锐、项名达、华蘅芳等还创造了多种证法*。

在勾股定理的研究方面作出了巨大贡献的除中国古代数学家而外，还有许多别的国家和民族的数学家，特别是古希腊、埃及、印度的数学家。古希腊数学家毕达哥拉斯是西方第一个严格证明了勾股定理的人。相传在公元前六世纪，当他找到了证明勾股定理的方法以后，欣喜若狂，杀了一百头牛来祭神，以示庆贺。故西方亦有人称勾股定理为“百牛定理”。

古埃及人也早就知道了勾股定理。不但知道直角三角形的两条直角边的平方和，一定等于斜边的平方；而且还知道，如果一个三角形两边的平方和，等于第三条边的平方，这个三角形一定是直角三角形。他们利用这个原理，创造了一个画直角的方法：在绳上打十二个距离相等的结，把它绷成一个三角形，使三边长之比为3:4:5，那么3与4两边夹角一定是直角。

* 参看许莼舫：《中国几何故事》中国青年出版社，1965。

毕达哥拉斯的证明方法后来失传了，希腊大数学家欧几里德对勾股定理另作了证明，欧氏的这一出色证明方法，成为近两千年来《几何学》教科书中通用的证法。

〔欧几里德证明〕如图2，在直角三角形 ABC 各边上向外作正方形 $ABED$ ， $BCGK$ ， $CAFH$ 。连 CD ， FB 。

$$\because AC = AF, AB = AD, \angle FAB = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle FAB \cong \triangle CAD.$$

作 $CL \parallel AD$ 。

$$\therefore S_{\triangle FAB} = \frac{1}{2} FA \cdot AC \quad (AC \text{ 为 } FA \text{ 边上的高}),$$

$$\text{而 } S_{\square CAFH} = FA \cdot AC,$$

$$\therefore S_{\square CAFH} = 2 S_{\triangle FAB}.$$

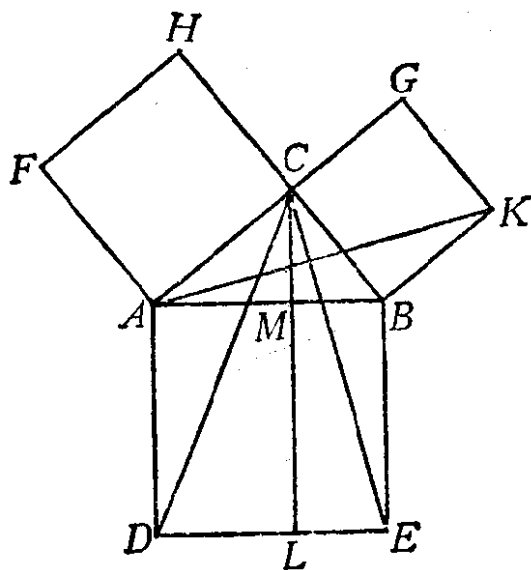


图2

$$\text{又 } \because S_{\triangle CAD} =$$

$$\frac{1}{2} AD \cdot DL \quad (DL \text{ 为 } AD$$

边上的高),

$$\text{而 } S_{\square ADLM} =$$

$$AD \cdot DL,$$

$$\therefore S_{\square ADLM} =$$

$$2 S_{\triangle CAD}.$$

$$\therefore S_{\square CAFH} =$$

$$S_{\square ADLM}.$$

同理可证 $S_{\square BCGK} =$

$$S_{\square BELM}.$$

$$\text{故 } S_{\square ABED} = S_{\square ADLM} + S_{\square BELM}$$

$$= S_{\square CAFH} + S_{\square BCGK}.$$

即 $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $c^2 = b^2 + a^2$.

这就证明了勾股定理。

有不少数学家对于勾股定理的证明都是别具一格的有趣的。英国数学家辛卜松 (Simpson, 1710—1761) 的证明便是其中一例。

〔辛卜松证明〕把边长为 $a+b$ 的正方形 $ABCD$ 划分如图3, 则正方形 $ABCD$ 面积 = $(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

又把 $ABCD$ 划分如图4, 则正方形 $ABCD$ 面积 = $(a+b)^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2$.

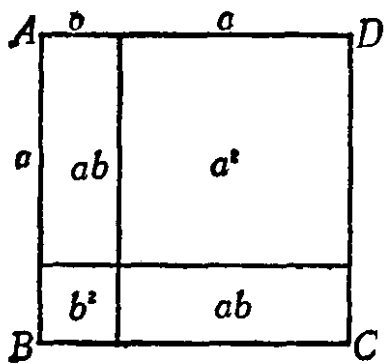


图 3

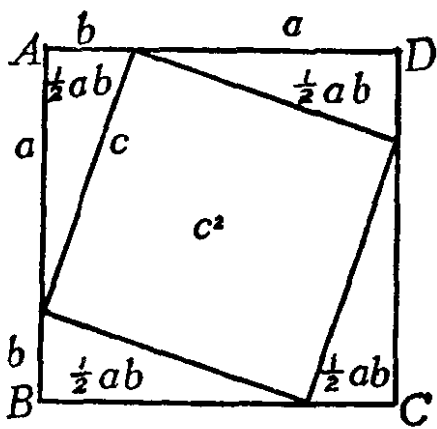


图 4

$$\therefore a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2.$$

$$\text{故 } a^2 + b^2 = c^2.$$

以上介绍的几种证法, 应用的都是等积原理。我们还可以根据相似原理来予以证明。

〔相似法证明〕如图5, 作直角三角形斜边上的高 CH ,