



SHUXUE TANQI

米盖尔·德·古斯曼著

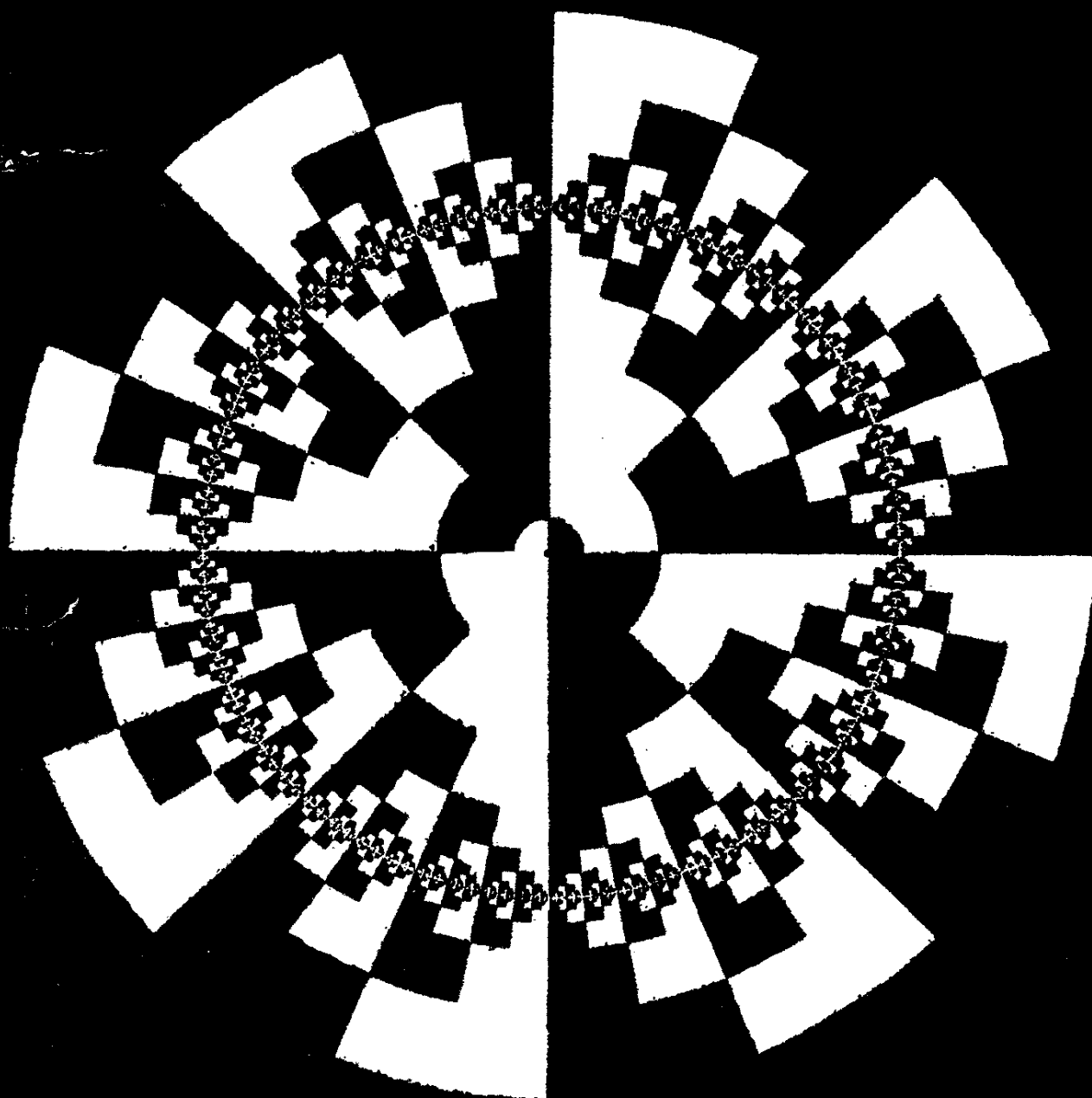
周克希译

上海教育出版社

数学探奇

数学探奇

米盖尔·德·古斯曼著 周克希译 • 上海教育出版社



AVENTURES MATHÉMATIQUES

Miguel de Guzmán

Presses polytechniques et universitaires romandes

(沪)新登字 107 号

数 学 探 奇

[西班牙]米盖尔·德·古斯曼 著

周 克 希 译

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

各地新华书店经销 江苏太仓印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 6 插页 4 字数 146,000

1993 年 11 月第 1 版 1993 年 11 月第 1 次印刷

印数: 1—1,750 本

ISBN 7-5320-3235-3/G·3147 定价: (软精)5.20 元

2011/30/09

中文版序

这本《数学探奇》译成中文出版,使我们有幸得以和许多新朋友共享我们在写作和插图时所体会到的乐趣,谨以此书向中国人民伟大的历史和文化表示崇高的敬意.当一个人怀着爱心和热情去从事数学活动时,他就能体会到其中所蕴含的深刻的美感,但愿有更多的人,不论是年青的还是年长的,都能领略到这种美感.

米盖尔·德·古斯曼父子

1993年1月于马德里

前 言

米盖尔·古斯曼是我的朋友. 1991年8月, 我把他著的《数学探奇》(法文版)介绍给上海教育出版社的冯贤女士. 现在该书的中文版问世了, 我感到十分欣慰.

数学是实用的, 又是严密的, 但是数学也可以很有趣味. 有一次, 米盖尔住在医院里养病, 他应孩子的要求讲了一系列的数学故事. 后来, 他把这些故事写成书与大家共赏. 原文是用西班牙文写的, 后来再译成法文, 现在又译成中文.

米盖尔是一位数学家. 当他很年青的时候, 便在数学分析的一个重要分支——调和与分析方面, 做了杰出的工作. 后又把他的研究成果写成几本专著出版. 现在他是西班牙科学院院士, 那是一项很高的学术荣誉.

1990年, 米盖尔被推选为新一届国际数学教育委员会的主席(1991—1994), 该委员会筹办四年一度的国际数学教育大会, 出版数学教育研究丛书, 支持亚洲以及其他地区的数学活动. 因此, 他不但在数学上, 也在数学教育上作了许多贡献.

希望这本书能给读者带来乐趣, 并进一步增加对数学的认识. 同时, 也希望本书的出版, 能够跨越国界, 克服语言障碍, 进一步促进国际间数学科学文化的交流. 上海教育出版社为此所作的努力值得赞赏, 我们也在表此谢意.

李秉彝

1993年1月20日

李秉彝(Lee Peng Yee)是新加坡国立大学教授, 两届国际数学教育委员会副主席(1987—1990, 1991—1994).

序 言

本书中汇集的游戏、谜语、故事等等,都具有一定的数学内容,我之所以挑选它们,是想要让读者看到,这种探索现实世界的方式,可以是挺有意思的,饶有兴味的,有时甚至是很激动人心的.另一方面,我们将要一起讨论的有一些问题,不仅挺有趣,而且跟整个数学学科中的某些重要内容,以及某些迄今尚未解决的课题都有相当密切的联系.

整个科学,实际上就是对众多的自然之谜进行探索的一项大工程.有时候,这些谜是很具体,很贴近我们的:例如,人脑到底是怎样工作,才使人们能够知道自己究竟知道些什么的?某种物质最终是由哪些成分组成的,它们相互间又是怎样作用的?要在一张公路地图上折出 $m \times n$ 个折痕,一共有多少种不同的折法?等等,等等.另一些时候,我们碰到的是跟我们自己创造出来的智力世界有关的一些更抽象的谜: $(11, 13)$, $(29, 31)$, $(101, 103)$, $(2381, 2383)$, $(3557, 3559)$, ……这样的差数为 2 的质数对,是否有无穷多个?在数 $11, 111, 1111, 11111, \dots$ 中间,是否存在无穷多个质数?等等,等等.因此,我们在这本书中将要碰到的数学问题,在某些时候是具体的,而在另一些时候则是比较抽象的.

我在写作本书时,有意特别考虑到让作为读者的您积极地参与进来.我要让您来当侦探,来设法弄清楚摆在面前的种种情况.对于在阅读过程中碰到的每个问题,即便我不一定每次都提醒您,您最好还是能暂时放下书,先好好想一想.有时候,一下子就能很容易地找到合适的答案,也有时候要困难一些,但无论如何,您花在思考上的时间,是决计不会白白浪费的.

在第 0 章中,就如何以比较精细的方式来着手处理数学和非

序 言

数学问题,提出了一些建议.随后,有几章就一些古典或准古典的游戏作了仔细的分析,有几章则提出了一些不同类型的问题;而在另几章中,我们力图追寻诸如费马、康托尔、布劳威尔那样的数学大家的思想的踪迹.在每章的末尾都有一些评论,以期通过叙述杰出数学家的传略,以及阐发某些理论的意义等等做法,来整理出一些重要的观念.也有一部分内容,是有关目前的数学教学法的评论,其中当然不乏谬误的一家之言,但我以为从总体上来看,这些意见将会有助于您对当前的数学有一种个人的看法,以便在各种不同的教学大纲中决定取舍.

本书的各章内容,相互之间都是彼此独立的,而且跟我的另一本书《趣味数学故事》也并没有什么直接的联系,但我在本书中有时会援引它作为参考书目.

我特别要感谢我儿子米盖尔的合作,他画的插图为我们的数学探奇增色不少.好多朋友都看过本书的初稿,由于人数太多,我无法在此一一列举,他们的意见,对于本书的修改定稿是非常有益的.谨此向他们大家表示我的谢忱.

米盖尔·德·古斯曼

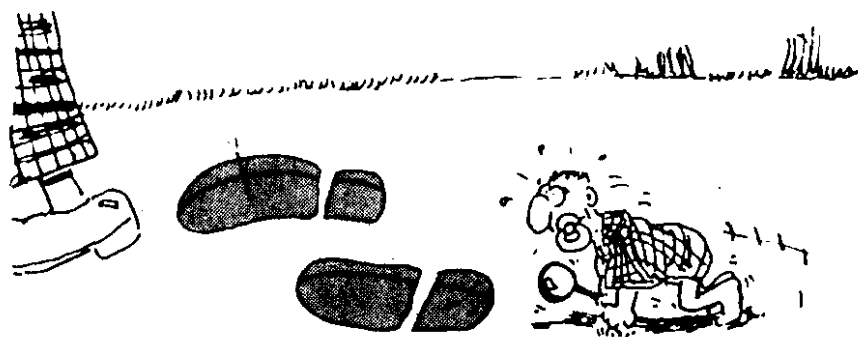
目 录

第 0 章	这一章很重要,但您不看也不妨.....	1
第 1 章	先举几个例子练习练习.....	12
第 2 章	上穷碧落下黄泉:费马的归元法	28
第 3 章	数字拼板游戏及其他.....	36
第 4 章	上穷碧落下黄泉:走向康托尔的天堂	52
第 5 章	几种平面变形.....	63
第 6 章	鸽子,鸽笼和狄利克雷原理	81
第 7 章	关于无穷.....	90
第 8 章	用箭头来旋转	102
第 9 章	关于自然数和质数	112
第 10 章	消失的区域	120
第 11 章	正方体,白蚁与其他几何题.....	132
第 12 章	一条多功能曲线	147
第 13 章	一些题意很容易看懂的难题	168
参考书目		177

第 0 章

这一章很重要,但您不看也不妨

我们要一起来看的数学故事和数学游戏,您不妨把它们看作一些侦探故事,而您就是其中的侦探.虽然有很多人都已经按他们的方式体验过这些故事里的情景,但按您的方式进行这种体验,您还是第一个人.所以,您就准备好去探险吧!看一个侦探好不好,要看他的嗅觉灵不灵.而要想嗅觉灵,自然得多闻,得把鼻子伸得长一点,得学会在区分各种各样的气味的同时,作出逻辑的推论.这么看来,要是您想成为一个好侦探,您就得下功夫练才行.这里是没有什捷径可走的.



……追寻大师的踪迹

就我而言,我在这儿所能给您的帮助,就是提供给您一套方法,这套方法是随便哪个侦探在探案时都少不了要用到的.您所积累的经验,将会使您培养起一种感觉,知道在碰到某一种情况时,采用哪一种或者哪几种方法可能是最适当的.在以后各章中,我试图通过一个个具体的例子,帮助您戴上数学大师的眼镜,用他们的放大镜去观察,这往往也就是说,让您学会使用一种我所提供的方

数学探奇

法.

您不必把这些方法都背出来!这里并不是记性好不好的问题!暂且您只要浏览一遍,稍为熟悉一下它们就够了.然后,遇到一个具体问题时,可以慢慢地再来仔细重读,以便找出最恰当的方法.通过多次的应用,渐渐地您就会以一种很自然的方式吃透它们的精神,从而真正地掌握它们.我先把它们比较详细地逐一加以说明,然后在这一章的末尾把它们列成一张简明扼要的表,让您可以一目了然.

最后还有一点要注意.不要以为您在这里学到的推理方法,只适用于解决数学问题和数学游戏.从原则上讲,只要作些必要的修改,这些方法就能适用于现实生活中大量的问题.我们应该记住:数学能让我们每个人学到审慎、合理、可靠的思想方法.

A. 先弄清题意再动手

这道理是不言而喻的,但有时候因为过于匆忙,或者迫于外界的压力,我们也会不等把问题弄明白就仓促上阵.当有人来请歇洛克·福尔摩斯侦破一桩案子的时候,这位大侦探的第一步工作就是搜集所有的报纸,踏勘可能有关的地点,以及从邻居或伦敦街头的流浪儿——他的私人眼线——那儿打听一些蛛丝马迹……然后,脑子里装着这一大堆资料,他就开始在小提琴上即兴地拉些曲调,或者一头扎进自己的实验室里做些让人觉得不可思议的化学实验.当有人把一桩案子、一种游戏、一个问题、一件棘手的事情——无论哪种情况都一样——摆在您面前的时候,您就应当确有把握知道自己已经完全弄明白游戏的规则,弄清楚所有的材料,了解每一件东西可能所处的位置以及它们相互之间是怎样联系在一起的.您要利用这些材料,熟悉整个情况的方方面面,先在其中泡上一会儿.虽然起初您会觉得这样做似乎没有接触到正题,但您以后会事半功倍的.

这一章很重要，但您不看也不妨

B. 寻找解题方法

在这一阶段，您得尽量变着各种法儿去接近那个问题，这就是说，您得拍脑袋想出许多念头来，即使它们起初仿佛是毫无意义似的。最荒诞的念头也有可能成为最妙的点子。照技术专家的说法，这就是所谓 brainstorming^①（集思广益）和数量出质量。您暂且不



Brainstorming

忙着拿这些想法来派用场，要想让它们发挥作用，必须让思维过程具有一种自发性，不要先急于对它们品头评足；这会儿根本不忙于来决定孰优孰劣。即使它们乍一看显得挺可笑，那也没关系。我们以后会看到它们究竟可笑不可笑的！当年第一个想出念头在伦敦街头用女式小阳伞遮雨的那位 gentleman^②，曾经招来众人的嗤笑，挨过他们扔的烂番茄，可是今天还有哪个英国人会认为雨伞是

① 英文，意为集思广益。但从字面上看，这个词是由 brain（脑子）和 storming（骤然发作）连缀构成的，下面的插图似即从字面意义来作调侃。

② 英文：绅士。

数学探奇

一件可笑的、娘娘腔的玩意儿呢！

为了帮助您想出许多念头来，下面有一些规则可供参考。我相信您通过实践，一定会用一些对您更有效、更实惠的内容来充实这些条款的。

B. 1 找出跟别的游戏或问题的相似之处。世界上本来就并没有什么东西截然是新的。眼前的局面有没有让您想起了什么呢？您对它是否有似曾相识的感觉呢？

B. 2 从容易的做起，化难为易。面前的问题挺复杂，也许原因就在于头绪太多。为什么不把它简化一些呢？试找出一个跟它很相像，但头绪较为简单的问题来，也许您能从中得到某些启发，再进一步去解决原先的那个更复杂的问题。

B. 3 做些实验，找出共同点和规律性的东西。实验是自然科学之母，对数学来说也同样如此。数学史上的许多重要的定理，都是大量的、多少有些匪夷所思的实验的成果。数学同样也是通过试验，错误，纠正错误再试验……的过程向前发展的。

B. 4 画一张示意图，或许……还要涂上颜色。对我们大多数人说，看着图总要比光看文字更容易思考些。一张图像，胜过千言万语。如果您也是这种情况，您就能有个好帮手了。举例来说，爱因斯坦就曾经说过，他在进行研究时，头脑里的思想从来都不是诉诸文字的，伴随着思想的是感觉的图像，甚至是机车。

B. 5 将问题作些修改，稍稍改变一下叙述的方式，看看是否能找到一条思路。这样一来，原先的问题是改变了，但这样做能为您提供一块跳板，而且您还可以再往上加新的跳板，直至您到达目的地为止。

B. 6 选用适当的表示方法。有许多问题，倘若所用的表示方法不适当的话，会显得极其繁复，但是只要取对了坐标轴，选用了合适的记号，问题就会变得非常简单。最好的表示方法，应该是一套最适合于表明对称关系，能简洁地表明它代表的对象在问题中所起作用的表示方法。我们至今还在使用的数学记号中，有很大一

这一章很重要，但您不看也不妨



……选用适当的表示方法……

部分是莱布尼兹和欧拉引进的. 这些记号由于很适合于他们所要表示的对象, 因此就能帮助他们把一些复杂的问题大为简化.

B. 7 尽可能利用对称性. 有许多数学游戏、数学问题, 都是借助于它们本身所具有的或隐或显的对称性而得以解决的. 当您考虑一个问题或做一个游戏的时候, 请别忘了考虑这种可能性.

B. 8 假设这个问题的提法不成立……; 那么会怎么样呢? 这就是所谓的间接推理法或者反证法. 这是怎样的一种方法呢? 举例来说, 考虑一个很简单的问题: 证明在国际象棋中, 一个卒子最多只能走六步. 您可以这么想: 假设这个卒子走了七步, 那么, 因为它从第二行出发, 而且每走一步就向前移一行, 所以很显然, 走到第六步时它已位于第八行上, 再走第七步, 就要走到棋盘外面去了. 这是不可能的. 因而这个卒子也就不可能走七步. 许多问题都可以依此办理. 如果要证明命题 A, 您就先假设命题不成立, 由此出发进行正确的演绎、推理, 直到最后推出矛盾. 从而您的出发点命题非 A 显然是错的. 于是命题 A 应成立.

B. 9 假设这个问题已经解决. 在有些游戏或问题里, 要找这

数学探奇

么一个元素,它得按照游戏规则跟其他一些给定的元素有一定的联系.这时候,我们的这种方法就特别管用了.当您想象问题已经解决,而且把所有已知的元素都列出来的时候,您就有可能对所求元素与这些已知元素之间的关系加以利用了.这样,您就会有可能会受到某些启示,看清究竟应该怎样从已知条件出发去考虑问题.

B.10 考虑运用一些常用的技巧:递推归纳法,归元法,对角线法,鸽笼原理……我不打算在这里啰里啰嗦地逐个说明这些方法,我只想指出,它们都是真正的数学思想的瑰宝,非常简单却又极其有效.在以后各章中,我们会对这些方法逐一进行探讨的.其中的每一种方法,都会冠以一位著名数学家的名字,因为这位数学家曾经系统地应用过这种方法来丰富科学的宝库:帕斯卡递推法则,费马归元法则,康托尔对角线法,狄利克雷鸽笼原理……我们将边学边用,逐个逐个地来慢慢熟悉这些方法.

C. 把选定的方法付诸实践

您现在已经有了步骤 B 中列举的那些解题方法,可以去着手解决问题了.我劝您不妨自己列一张表,而且别忘了把那些您乍看上去觉得荒唐出格的方法也列上去.

现在,为了让您的思想成熟起来,等待灵感的来临,您不妨像歇洛克·福尔摩斯那样,趁兴去拉一会儿小提琴或是做几个化学实验,要不干脆就像我一样,做几个烹饪学的实验——这不仅有同曲异工之妙,而且从营养学的角度讲还更胜一筹——或者,您也可以埋头去做一桩您平时最感兴趣的事情.总之,要让您的潜意识使储存在脑子里的那些思想自然而然地变得清晰起来.

然后,再回到要解决的问题上来.现在您得作出决定,在所有那些解题方法中,挑选出最有可能奏效的几种来.也有这种可能,一些先前您觉得非常荒诞的想法,这会儿恰恰似乎是最管用的.

C.1 把您在步骤 B 里的那些最好的想法,逐一地加以考察.一开始不要把它们混同起来.做这工作时要有自信,要有决断,一

这一章很重要，但您不看也不妨



……等待灵感来临……

个接一个的有条不紊地进行考察，不要慌乱。倘若在考察某一个想法的时候，脑子里突然跳出来另一个想法，它跟前一个想法毫不相干，但又可能——至少您这么觉得——对您有所帮助，那就别放过它！把它列进您的那张表里！不过，对起先的那个想法还得继续考察下去，不要半途而废。

C.2 别过早地失望，但也别死抱住一个想法不放。如果问题确实很复杂，就有可能得另辟蹊径。要是您觉得一个想法看上去不错，就别轻易放弃这条思路，但是，倘若循着这条思路深入下去，觉着这个想法其实并不怎么管用，那么就应该及时注意这一点。要是您发现这个想法的确不能解决问题，那就得另外换一条思路。请记住：试验，错误，纠正错误再试验，……

C.3 这样就行了吗？您有把握吗？把您的结论再仔细地分析一下。别在什么地方搞错了。浅尝辄止的想法和草率从事的结论都是没什么用处的。您必须拿准自己确实已经达到了目标。

数学探奇

D. 从游戏和实验中吸取教益

您已经把这个问题解决了? 祝贺您! 要不就是, 您冥思苦想了几个小时, 还是没能解决它, 您打定主意想要看一下答案了, 是不是? 同样也祝贺您! 要是您兴致挺高地动了好长时间脑筋, 然后才终于决定去看一下答案, 那么您所做过的实验可能是要比前一种情形更贵重的. 那些我们感到兴趣, 而且执著地尝试过解决……而没能解决的问题, 比起那些一眼就能看出答案的问题来, 总能让我们学到更多的东西, 得到更多的教益. 不过, 您现在先得把您考虑这个问题的整个过程好好回顾一下, 看看难点在哪儿, 到底是在哪儿钻进了死胡同, 又是什么原因, 以及今后要是碰到其他的问题或游戏, 不论是类似的还是完全不同的, 您可以采取些什么措施. 这一个步骤, 也许可以说是所有的步骤中间最要紧……但往往又是最容易被忘记的.

D. 1 仔细分析一下您的思路. 您是怎样一步步地解决这个问题的? 或者, 为什么您没能解决这个问题? 您是一开始就想到这条正确的思路吗? 您用的是步骤 B 中的某一种方法吗? 或者, 为什么您没想到用这种方法? 或者, 是什么东西使您以为您那样做是对的?

D. 2 对答案不仅要知其然, 而且要知其所以然. 千万别像头驴子那样, 碰运气在笛子上吹出个声音就沾沾自喜. 如果不严格要求自己, 在大多数情况下您都会失去机会的. 顾名思义, 运气这东西是不会一而再、再而三地让您碰上的.

D. 3 想想看, 是不是还有更简单的解法. 通常, 数学家如果还没有做到不必借助于一次又一次的三段论法, 一眼就能把一个定理中至少最关键的那些地方看清楚的话, 是不会认为自己已经弄懂这个定理的. 凡是达到这种理解水平的人, 总是会从这个结论出发, 构建起其他的更强有力的结构来的.

D. 4 仔细考察您所用的方法, 看看能不能把它用在其他的场

这一章很重要，但您不看也不妨

合. 说不定您能设想出一些更为有趣的游戏或问题, 它们也可以用同样的方法, 同样的思路来解决.

D. 5 回顾一下您的推理方式, 从中得出一些以后有用的结论. 通过反复实验, 或许您已经能这么做了. 每个人都有自己的推理方式. 您的推理方式是怎样的呢? 是直观型的还是分析型的? 您较多依靠的是文字的表达或者书写的公式吗? 您是不是习惯于把一个问题经常放在脑子里, 翻来覆去地左思右想? 或者您是喜欢一条道走到黑, 认准一个理儿就不放松的? 您是否能很自然地激发起多种多样的新奇的思想和自己的推理方式有了一个了解, 您就可以知道哪些问题是您能够解决的, 哪些问题是您不怎么有把握解决的. 您也会知道拿到问题(不一定是数学问题, 任何问题都一样)以后, 怎样用您自己的一种最容易收效的方式去着手考虑它.

-
- A. 先弄清题意再动手
 - B. 寻找解题方法
 - B. 1 找出跟别的游戏或问题的相似之处.
 - B. 2 从容易的做起, 化难为易.
 - B. 3 做些实验, 找出共同点和规律性的东西.
 - B. 4 画一张示意图, 或许……还要涂上颜色.
 - B. 5 把问题作些修改, 稍稍改变一下叙述的方式, 看看是否能找到一条思路.
 - B. 6 选用适当的表示方法.
 - B. 7 尽可能利用对称性.
 - B. 8 假设这个问题的提法不成立……; 那么会怎么样呢?
 - B. 9 假设这个问题已经解决.
 - B. 10 考虑运用一些常用的技巧: 递推归纳法, 归元法, 对角线法, 鸽笼原理……
 - C. 把选定的方法付诸实践
 - C. 1 把您在步骤 B 里的那些最好的想法, 逐一地加以考察.