黎 曼 几 何

〔日〕栗田 稔 著

王运达 任彦成 译

王有道 朱希斌 校

（研究生讲义）

东 北 工 学 院

黎曼几何

〔日〕栗田 稔 著

王运达 任彦成 译

王有道 朱希斌 校

东北工学院

1982年10月

中译本前言

17 世纪出现的解析几何与微积分两大创造，使数学为之改观。正如恩格斯所说那样，数学从此进入了变量的时期，也不妨说是从静态研究进入了动态研究。微分几何与这两大创造相伴而生，有着几乎同样悠久的历史。曲线及其在一点处的切线与曲率为解析几何与微积分的应用提供了最直观最生动的实例。事实上，它们的研究正为解析几何与微积分的诞生起了重要的推动作用。到 19 世纪 Gauss 由于地面测量的启发研究了曲面的曲率问题。创造了曲面理论。Riemann更提出了高维流形的一般理论。从此使微分几何蔚为庞大的数学领域，到现在微分几何及其核心部份黎曼几何已成为有志于现代数学者所不能不通晓的重要内容。但是要深入这一领域并不是容易的。繁复的公式推导往往使初学者望而却步。张量分析的出现可以减轻这方面的某些困难。但更有效的乃是导源于 Darboux 的工作，而在本世纪为E. Cartan 所有系统地发展起来的活动标架法。这种方法使用了并不固定在一处而是可以随处移动的坐标系统，因而不妨可以说是一种动态的解析几何坐标方法。但是，尽管这种方法在 E.Cartan 及其后继者们的倡导下取得了巨大成功，要掌握它却要付出巨大的代价。不仅是 E.Cartan 的原作甚为艰涩难明，而且也缺少浅显易懂能为初学者易于接受的入门书。栗田稔此作可以说多少弥补了这一缺陷。今幸得王运达、任彦成两同志从日文译出，以满足有志于斯道者的需要，这对国内的数学发展，也无疑是一项值得称道的有意义工作。

中国科学院系统科学研究所　吴文俊

1982 年 3 月 26 日

前　言

微分几何是使用微积分研究曲线、曲面这样图形以及空间本身的学问。研究黎曼空间的黎曼几何是微分几何的核心，不论从理论上看还是从应用上看都是重要的。本书是为具有大学基础课数学水平的读者而写的，运用活动标架法浅显易懂地说明黎曼几何的基本概念。原来，要想学习微分几何需要相当多的几何与微积分的知识，还要作复杂的数式推导，因此人们认为是不易学进去的学问。而本书明确地写了必要的预备知识，又从欧氏平面、欧氏空间、球面等具体例子出发，逐步讲到黎曼空间的本质上去。

近年来，微分几何把过去有些笼统的基本概念解释清楚了，在国外从这个立场陆续出版了一些好书，在日本也要出现这样的书。但是只有这样的书对初学者或不是专攻数学的人来讲，微分几何与黎曼几何是高不可攀的。这本书采取的方法是一开始不用那么多的预备知识，等到多少习惯以后，在后半本再用近代方法处理。

如果因为通读了本书，出现一些人熟悉黎曼几何概要又会活用，并能深入学习现代微分几何，那是著者最高兴的事。此外，著者还向劝我写这本书的穗刈四三二博士以及为出版此书而劳神的至文堂各位表示由衷的感谢。

1965 年 11 月

栗田　稔

于日本名古屋

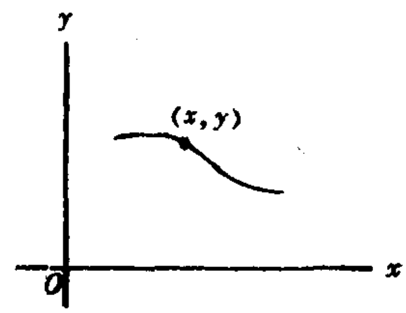
目　　录

序　　论

如果使用平面直角坐标(x, y)，则弧s的微分ds可表示为

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

如果再用极坐标(r, θ)表示之，则得

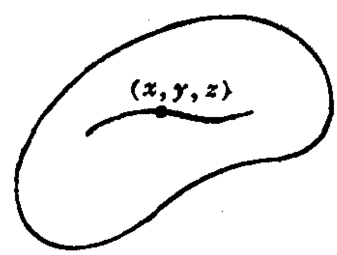


$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

当在空间里有一个曲面，因曲面具有二维的展度，故面上的点的直角坐标x，y，z可用二变数u，v表示为

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v),$$

$$z = h(u, v).$$



这时，此曲面上的弧长的微分是

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

用u，v表示之，得

$$ds^2 = a(u, v)du^2 + 2b(u, v)dudv + c(u, v)dv^2 \quad (1)$$

的形状。

现在考虑此曲面无伸缩地变形，这时ds并不变化。在这种情况下，曲面的许多性质之中有

在曲面无伸缩的变形下不变的性质。

而且这个性质只由(1)的ds而定。曲面的测地线、展开、共变微分、高斯曲率等都是这样性质。特别是，高斯曲率在这样曲面的变形下不变一事是高斯(C. F. Gauss 1777—1855)的伟大发现。

黎曼(G. F. B. Riemann 1826—1866)进一步发展了这样性质，他考虑点有n个坐标x_1，x_2，…，x_n的n维空间，在此空间中研究了弧长的微分ds由

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_idx_j \qquad (2)$$

给定的情况。后人称此空间为黎曼空间。

进入本世纪以后，爱因斯坦（A. Einstein 1879—1955）运用黎曼空间做为相对论的基础以来，即使在数学家之间对此空间的研究也极盛行，在今天仍然不断获得各种兴趣盎然的成果。

从此角度看，三维空间的曲面是二维黎曼空间。在曲面的情况下，有切平面起着重大作用。然而对于一般的黎曼空间并非预先就有象切平面这样方便的东西。因此，在 n 维黎曼空间里，用某种方法在它的各点定义所谓的切空间，并将不同点处的切空间联系起来的“联络”用（2）决定下来，由此再对黎曼空间进行研究。

在这本书中，首先在第一章里阐述必要的数学知识，在第二章里从黎曼几何的角度考察欧氏平面与欧氏空间。在第三章里将三维空间的曲面看做二维黎曼空间，以曲面的展开、高斯曲率、测地线等重要基本概念为中心加以说明。而贯穿第四、五、六章仔细解释了 n 维空间的基本问题。

在黎曼空间里有局限于其一邻域内考虑的局部（local）性质以及牵涉空间全体的整体（大范围，global）性质，现在数学家关心的是以局部性质为基础研究整体性质的整体黎曼空间论。到本书第六章没有篇幅说明这样内容，故在第七章把没有机会叙述的一些更加深入的局部性质以及整体黎曼几何研究不加证明地简单介绍一下。想要进一步了解详细情况的读者请读卷末参考文献介绍的书。

第一章　向量与微积分

§1　向　　量

向量就是有向线段，只考虑大小与方向而不究其位置。换句话说，大小与方向相同的有向线段看做是一个向量。本书规定用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, …, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, …等字母表示向量。

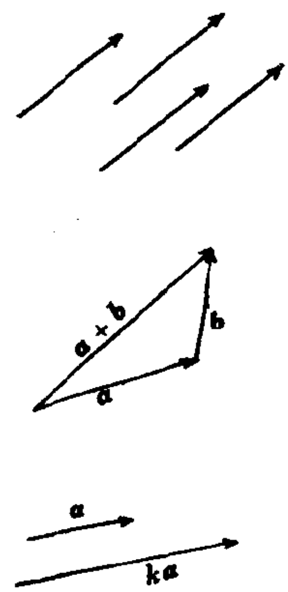
对于向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 可以考虑 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 对于实数 k 考虑 $k\boldsymbol{a}$（也记做 $\boldsymbol{a}k$），对于这些下列计算规律成立。

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

$$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b},\ (k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a},$$

$$(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$$

起点与终点是一点的有向线段，即由点而成的向量称为零向量，记做 0。又将 $(-1)\boldsymbol{a}$ 记做 $-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ 记做 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, 则

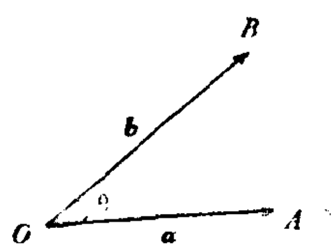


第 1.1 图

$$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$$

由这些计算规律可见，对于向量的和、差、乘以实数与普通式子一样计算即可。

其次，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不是零向量时，设表示它们的有向线段为 OA,OB, 其夹角为 θ, 定义内积$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$为



第 1.2 图

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=OA\cdot OB\cos\theta$$

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之中至少有一个是 0 时，规定内积是 0。这时令

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})}$$

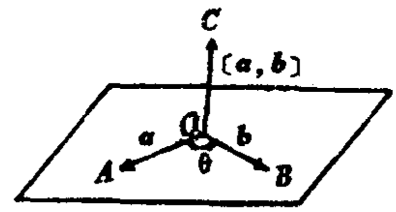
它是 OA 之长（或模）。

对于内积，下列计算规律成立。

$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a})$，$(k\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{a},\ k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$，$(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b})$

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 既不是零向量，又不平行时，外积 $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 的定义如下。设 OA，OB，OC 是表示 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的有向线段，又设$\angle AOB=\theta(0<\theta<\pi)$时



第 1.3 图

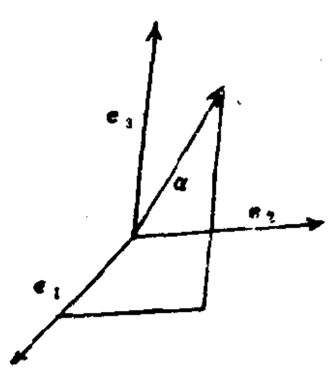
(i) OC 与平面 OAB 垂直，从 C 看，从 OA 向 OB 转 θ 角的旋转方向是正。

(ii) $OC=OA\cdot OB\sin\theta$。

又当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中至少有一个是 0，或 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行时，规定外积$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$是 0。对于外积，下列运算规律成立。

$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}]$，$[k\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=k[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$，$[\boldsymbol{a},\ k\boldsymbol{b}]=k[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$

$[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]$，$[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}]$



第 1.4 图

向量的分量 在空间里取不和同一平面平行的三个向量（称之为线性无关）记为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，则任意向量 $\boldsymbol{a}$ 可分解为

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$$

这时，$(a_1,\ a_2,\ a_3)$是以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 为基底 $\boldsymbol{a}$ 的分量。

设二向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的分量分别为 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$(b_1,\ b_2,\ b_3)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的分量是$(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$，$k\boldsymbol{a}$ 的分量是$(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$。

而内积为

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\boldsymbol{e}_i,\ \sum_{j=1}^{3}b_j\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{i,j=1}^{3}a_ib_j(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)$$

于是令

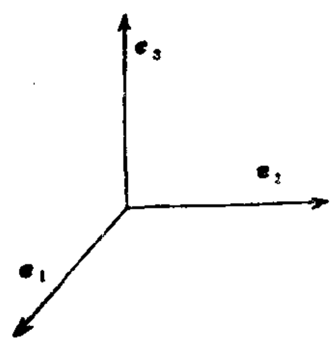
$$g_{ij}=(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)\qquad(i,\ j=1,\ 2,\ 3)\qquad(1.1)$$

则

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} a_i b_j \qquad (1.2)$$

特别是

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} a_i a_j} \qquad (1.3)$$



第 1.5 图

当 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 都是长为 1 的向量(单位向量)，而且两两垂直时，称为**标准正交基**或**正交标架**（orthogonal frame)。取标准正交基为基底时，向量的分量称为正交分量。当 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 为标准正交基时，

$$(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{当 } i = j \text{ 时}) \\ 0 & (\text{当 } i \neq j \text{ 时}) \end{cases}$$

故下列事实成立。

设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的正交分量分别为$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$(b_1,\ b_2,\ b_3)$，则

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \text{而且 } |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \qquad (1.4)$$

在标准正交基 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 下，$[\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2] = \pm \boldsymbol{e}_3$，特别当 $[\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2] = \boldsymbol{e}_3$ 时，称 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 为右手系。

关于右手系的标准正交基，设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的正交分量为(a_1, a_2, a_3)，$(b_1,\ b_2,\ b_3)$，则$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$的分量为

$$(a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

还有，对于三向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $([\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}],\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a},\ [\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}])$成立，以$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$表示之。设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 关于右手系的正交分量分别为$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$(c_1,\ c_2,\ c_3)$，则

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

相邻三边上的向量为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的平行六面体的体积等于$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},$

$\boldsymbol{c}$)的绝对值。特别是右手系的标准正交基满足

$$(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)=1$$

又因

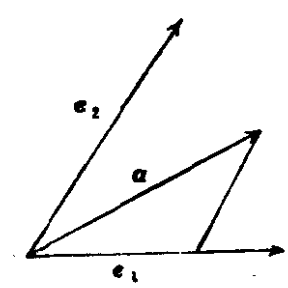
$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})^2=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})\\(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})\\(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{c})\end{vmatrix}$$

故对于基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，令 $(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j)=g_{ij}$，则

$$(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)=\pm\sqrt{g},$$

其中
$$g=\det(g_{ij})=\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13}\\g_{12} & g_{22} & g_{23}\\g_{13} & g_{23} & g_{33}\end{vmatrix}\tag{1.5}$$

二维向量 到目前为止，考虑了空间里的向量（三维向量），而平面上的向量（二维向量）可做为特殊情况处理。



第 1.6 图

在基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 中，取 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 在此平面内，则平面上的任意向量 $\boldsymbol{a}$ 可分解为

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$$

将 $(a_1,\ a_2)$ 看做 $\boldsymbol{a}$ 的分量即可。于是当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的分量为$(a_1,\ a_2)$，$(b_1,\ b_2)$时，得

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的分量是$(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$，

$k\boldsymbol{a}$ 的分量是$(ka_1,\ ka_2)$。

再令

$$g_{11}=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1),\quad g_{12}=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2),\quad g_{22}=(\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2),$$

则

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\sum_{i,j}g_{ij}a_ib_j=g_{11}a_1b_1+g_{12}(a_1b_2+a_2b_1)+g_{22}a_2b_2$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a})}=\sqrt{g_{11}a_1^2+2g_{12}a_1a_2+g_{22}a_2^2}$$

对于平面上的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ 总与此平面垂直。取右手系标准正交基 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 使 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 在此平面上，令 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的分量为

$(a_1, a_2, 0)$，$(b_1, b_2, 0)$，则$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$的分量为$(0,0,a_1b_2-a_2b_1)$，故在平面上，右手系正交分量为$(a_1, a_2)$，$(b_1, b_2)$的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，可看做

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

特别是对于基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，令$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = g_{ij}$ $(i, j=1, 2)$，则得

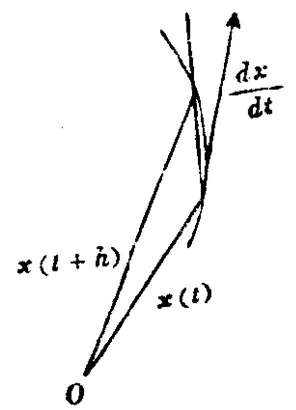
$$|[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]|^2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

故以 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为二边上的向量的平行四边形，其面积为$\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$。

向量的微分法 有变数 t，对应于 t 的值，向量 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 决定时，以

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{x}(t+h)-\boldsymbol{x}(t)}{h}$$

定义$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$。



第 1.7 图

若 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$，则

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right)$$

又当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)$时，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \boldsymbol{y}\right) + \left(\boldsymbol{x}, \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\right) \\ \frac{d}{dt}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] &= \left[\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \boldsymbol{y}\right] + \left[\boldsymbol{x}, \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}\right] \end{aligned} \tag{1.8}$$

当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)$，$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}(t)$时

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) &= \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\right) + \left(\boldsymbol{x}, \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}, \boldsymbol{z}\right) \\ &\quad + \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \frac{d\boldsymbol{z}}{dt}\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

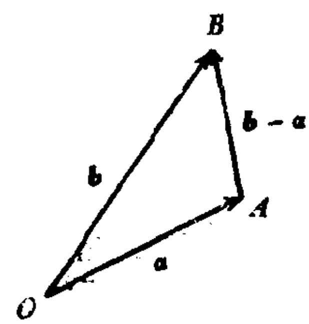
对于二变数 u, v 的向量函数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u, v)$，考虑$\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}$，$\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}$，再令

$$d\boldsymbol{x}=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}du+\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}dv$$

对于有三个以上自变数的向量函数也一样。

位置向量 在空间里，取定原点O，则对于任意的点A，决定有向线段 OA，于是就决定此向量 $\boldsymbol{a}$，称此 $\boldsymbol{a}$ 为点A的**位置向量**（**或坐标向量**），也称点A为点 $\boldsymbol{a}$。

在这种含义下，从点 $\boldsymbol{a}$ 到点 $\boldsymbol{b}$ 的有向线段为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$。



第 1.8 图

当取原点O与基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 时，点A的位置向量 $\boldsymbol{a}$ 的分量(a_1, a_2, a_3)是点A的仿射坐标，特别取标准正交基时，则(a_1, a_2, a_3)为直角坐标。

在空间中有一条曲线时，设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 是该曲线的位置向量用参数 t 的表达式．这时$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$是切向量。又此曲线在$t_0\leqslant t\leqslant t_1$间之长为

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt},\ \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)}\,dt$$

固定 t_0，令 t_1 为 t，则 s 可看做 t 的函数。于是

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt},\ \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)} \qquad (1.10)$$

在这种意义下，记

$$ds^2=(d\boldsymbol{x},\ d\boldsymbol{x})。 \qquad (1.11)$$

若重新取 s 为参变数以代替 t，则由(1.10)得

对于曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$，$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{ds}$为其单位切向量。 (1.12)

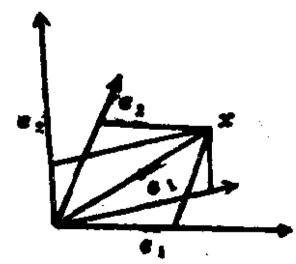
§2 张　量

在平面上取 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 为基本向量时，设向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量为 x_1，x_2，则

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 \tag{2.1}$$

若将基本向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 在变换

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{e}}_1 &= p_{11}\boldsymbol{e}_1 + p_{12}\boldsymbol{e}_2 \\ \overline{\boldsymbol{e}}_2 &= p_{21}\boldsymbol{e}_1 + p_{22}\boldsymbol{e}_2\end{aligned}\left(\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22}\end{vmatrix} \neq 0\right) \tag{2.2}$$



第 1.9 图

下变为 $\overline{\boldsymbol{e}}_1$，$\overline{\boldsymbol{e}}_2$ 时，设 $\boldsymbol{x}$ 的分量变为 $\overline{x}_1$，$\overline{x}_2$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \overline{x}_1\overline{\boldsymbol{e}}_1 + \overline{x}_2\overline{\boldsymbol{e}}_2 = \overline{x}_1(p_{11}\boldsymbol{e}_1 + p_{12}\boldsymbol{e}_2) + \overline{x}_2(p_{21}\boldsymbol{e}_1 + p_{22}\boldsymbol{e}_2) \\ &= (p_{11}\overline{x}_1 + p_{21}\overline{x}_2)\boldsymbol{e}_1 + (p_{12}\overline{x}_1 + p_{22}\overline{x}_2)\boldsymbol{e}_2\end{aligned}$$

此式与(2.1)比较之得

$$\begin{aligned}x_1 &= p_{11}\overline{x}_1 + p_{21}\overline{x}_2 \\ x_2 &= p_{12}\overline{x}_1 + p_{22}\overline{x}_2\end{aligned} \tag{2.3}$$

总之，在基底变换(2.2)下，向量的分量按(2.3)变化。

一般地说，有一量 u，关于基本向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的分量为 u_1，u_2，设在基本向量的变换（2.2）下得到 $\overline{\boldsymbol{e}}_1$，$\overline{\boldsymbol{e}}_2$，分量 $\overline{u}_1$，$\overline{u}_2$，受到相同的变换，即

$$\begin{aligned}\overline{u}_1 &= p_{11}u_1 + p_{12}u_3 \\ \overline{u}_2 &= p_{21}u_1 + p_{22}u_2\end{aligned} \tag{2.4}$$

时，则 u 称为**共变向量**（covariant vector）。

又有一量 v，关于基本向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 的分量是 v_1，v_2，设在基本向量的变换（2.2）下得到 $\overline{\boldsymbol{e}}_1$，$\overline{\boldsymbol{e}}_2$，分量受到与（2.3）相同的变换时，即

$$\begin{aligned}v_1 &= p_{11}\overline{v}_1 + p_{21}\overline{v}_2 \\ v_2 &= p_{12}\overline{v}_1 + p_{22}\overline{v}_2\end{aligned} \tag{2.5}$$

时，则称 $\boldsymbol{v}$ 为**反变向量**（contravariant vector）。

例　向量 $\boldsymbol{x}$ 的分量 x_1，x_2 当然是反变向量的分量。即在这样含义下，$\boldsymbol{x}$ 是反变向量。再者对于此向量 $\boldsymbol{x}$，有一实数

$$a_1x_1+a_2x_2 \qquad (a_1,\ a_2\ \text{是常数}) \qquad (2.6)$$

与之对应，并规定这个对应与基本向量的选法无关，则关于新基本向量，$\overline{a}_1\overline{x}_1+\overline{a}_2\overline{x}_2$ 与以前的 $a_1x_1+a_2x_2$ 相等，即

$$\overline{a}_1\overline{x}_1+\overline{a}_2\overline{x}_2=a_1x_1+a_2x_2$$

将(2.3)代入此式，因 $\overline{x}_1$，$\overline{x}_2$，是任意的，故得

$$\overline{a}_1=p_{11}a_1+p_{12}a_2$$
$$\overline{a}_2=p_{21}a_1+p_{22}a_2$$

与(2.4)比较之可见，$\boldsymbol{x}$ 与实数相对应的定义式(2.6)中的 a_1，a_2 看做分量时是共变向量的分量。

其次，使用矩阵记号来表达共变向量，反变向量的变换。令

$$P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},\ \overline{U}=\begin{pmatrix}\overline{u}_1\\ \overline{u}_2\end{pmatrix},\ V=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix},\ \overline{V}=\begin{pmatrix}\overline{v}_1\\ \overline{v}_2\end{pmatrix}$$

则(2.4)是

$$\overline{U}=PU$$

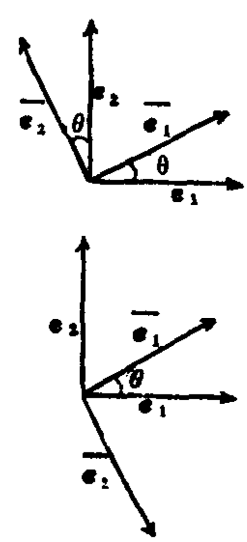
(2.5) 是 $V={}^tP\overline{V}$，故

$$\overline{V}={}^t(P^{-1})V$$

总之，共变向量的变换是 $\overline{U}=PU$

　　反变向量的变换是 $\overline{V}={}^t(P^{-1})V$

式中 ${}^t(P^{-1})$是 P^{-1} 的转置矩阵。



第 1.10 图

取基本向量为标准正交基时，基底的变换是

$$\begin{cases}\overline{\boldsymbol{e}}_1=\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\cdot\boldsymbol{e}_2\\ \overline{\boldsymbol{e}}_2=-\sin\theta\cdot\boldsymbol{e}_1+\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}_2\end{cases} \qquad (2.7)$$

或

$$\begin{cases}\overline{\boldsymbol{e}}_1=\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}_1+\sin\theta\cdot\boldsymbol{e}_2\\ \overline{\boldsymbol{e}}_2=\sin\theta\cdot\boldsymbol{e}_1-\cos\theta\cdot\boldsymbol{e}_2\end{cases} \qquad (2.8)$$