

函数论与泛函 分析初步 上册

[苏] A.H.柯尔莫果洛夫 C.B.佛明 著

郑洪深 郭思旭 段虞荣 译

高等教育出版社

函数论与泛函分析初步

上册

[苏] A. H. 柯尔莫果洛夫 C. B. 佛明 著

郭思旭 郑洪深 段虞荣 译

高等教育出版社

(京) 112号

内 容 提 要

本书译自苏联科学出版社 1976 年出版的《Элементы теории функций и Функционального анализа》，上册内容包括集论初步；度量空间与拓扑空间；赋范线性空间与线性拓扑空间；线性泛函与线性算子；测度，可测函数，积分等五章，可供高等学校数学系师生参考。

函数论与泛函分析初步

[苏] A. H. 柯尔莫果洛夫 C. B. 佛明 著

郑洪深 郭思旭 段虞荣 译

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行

民族印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.25 字数 270 000

1992 年 5 月第 1 版 1992 年 5 月第 1 次印刷

印数 0001—2 090

ISBN7-04-000708-8/O·111

定价 6.90 元

第四版序

这一版问世以后 C. B. 佛明已不在人间。但是，他还是赶上了改进本书的所有主要工作，主要修改了第十章。在这一章中补充了关于隐函数定理的一节并且修改了“极值问题”的一节。这些变化使得有必要修改第四章(汉恩-巴拿赫定理及关于逆算子的巴拿赫定理的推论)。

本书全文经由 B. M. 亚历克赛也夫与 B. M. 季霍米洛夫审阅，在此我向他们表示衷心的感谢。

A. H. 柯尔莫果洛夫

第二版序

《函数论与泛函分析初步》的第一版分别在 1954 年和 1960 年以两卷本出版。这两卷本的出现是与 40 年代末在莫斯科大学数学力学系教学大纲内包含了“分析 III”教程有关的，分析 III 包含了测度论与函数论初步、积分方程、泛函分析的内容，稍晚些又包括了变分法。本教程起先由 A. H. 柯尔莫果洛夫，以后又有其他讲授者，其中包括 C. B. 佛明，在莫斯科大学讲授过。后来其他大学的教学计划中也采用了这本书。

当时，在莫斯科大学用统一的教程“分析 III”代替实变函数论、积分方程及变分法的各门课程引起了较大的争论。本教程面临培养学生具备双重视野：一方面，注意集合论，度量空间与拓扑空间连续映射的一般理论，线性空间以及在其上的泛函与算子，一般“测度空间”中的纯测度论与积分法等的发展的内部逻辑；另一方面，不忽略被这些更为抽象的数学领域所服务的古典分析学甚至应用分析学的问题。

在解决这个任务的时候，我们在本书的编写计划中偏重于教程结构的抽象方面。从集的一般理论（第一章）可以转到度量空间、拓扑空间以及它们的连续映射（第二章），或直接转到测度（没有拓扑）的空间及该空间的积分法（第五章）。在第三与第四章中研究线性空间以及其中的线性泛函与线性算子。从这两章可以直接转到第十章（非线性微分算子与非线性泛函）。在第七章中研究可和函数线性空间。就实质上说，我们仅在第六章与第八章中把注意力集中在实变函数上。尽管本书把函数论与泛函分析的一般概念的研究放在首位，但读者可以观察到在几乎所有各章，我们都注意

将上述概念与古典问题联系起来。在本版中增加了第六章(微分论),第八章(三角级数及傅里叶积分)与第九章(线性积分方程),使得现在这本书(除变分法以外)包括了莫斯科大学中所用的“分析 III”教程的整个教学大纲。本书没有加入变分法这一部分内容,仅限于在第十章中叙述了非线性泛函分析的最重要概念。

如同旧版一样,在新版中,测度的一般理论占有相当的地位。近来不利用测度论工具而根据丹尼尔(Daniell)概型出现了相当多积分理论的叙述。但是,我们认为测度理论很重要,并且测度论本身不依赖于积分概念的引入,因而值得加到大学教程中去。

新增加的各章明显扩充了本书的内容。旧的各章也作了本质的修改并在其中加入新的节段(例如,序型与超限数,拓扑空间,广义函数等等)。

然而,在修改本书并增加新的篇幅时,我们努力保持了第一版中看来是比较成熟的初等叙述风格。我们期望本书与其他教程,特别是与Г.Е.希洛夫的书“数学分析专门教程”一样,在大学教学中得到其应有的地位。在希洛夫的教程中更强调问题的解析方面,而对度量空间与拓扑空间、测度等内容的兴趣不大,以较少的篇幅作为独立的内容来介绍。

A. H. 柯尔莫果洛夫

C. B. 佛明

第三版序

在新版准备过程中，我们保留了本书总的计划并力求不增加内容。此外，本书全部内容都经过重新审阅与修订。在这个工作中 $\Phi. B.$ 希罗柯夫给予我们莫大的帮助。据我们的意见，在第一章与第四章中作出一些简单的变动和修改，从比较简单的概念过渡到比较复杂的概念（例如，从巴拿赫空间过渡到第四章中更一般的空间）。测度论（第五章）的叙述作了十分重要的修改。

近年来，“分析III”教程往往包含巴拿赫代数论与谱分析初步。因此，我们把 $B. M.$ 季霍米洛夫所写有关上述两个问题作为附录是适宜的。

A. H. 柯尔莫果洛夫

C. B. 佛明

目 录

| | |
|---|----|
| 第四版序 | 1 |
| 第二版序 | 2 |
| 第三版序 | 4 |
| 第一章 集论初步 | 1 |
| § 1. 集的概念, 集上的运算 | 1 |
| 1. 基本定义(1), 2. 集上的运算(1), | |
| § 2. 映射, 分类 | 5 |
| 1. 集的映射, 函数的一般概念(5), 2. 分类, 等价关系(7), | |
| § 3. 集的对等性, 集的势的概念 | 10 |
| 1. 有限集与无限集(10), 2. 可数集(12), 3. 集的对等性(14), | |
| 4. 实数集的不可数性(16), 5. 康托尔-伯恩斯坦(Cantor-Bernstein)定理(18), 6. 集的势的概念(18), | |
| § 4. 有序集, 超限数 | 21 |
| 1. 偏序集(22), 2. 保序映射(23), 3. 序型, 有序集(23), 4. 有序集的有序和(24), 5. 良序集, 超限数(25), 6. 序数的比较(27), 7. 选择公理, 策墨罗定理及与其等价的其他命题(29), 8. 超限归纳法(31), | |
| § 5. 集族 | 32 |
| 1. 集环(32), 2. 集半环(34), 3. 半环生成的环(36), 4. σ -代数(37), 5. 集族与映射(38), | |
| 第二章 度量空间与拓扑空间 | 40 |
| § 1. 度量空间的概念 | 40 |
| 1. 定义与基本例子(40), 2. 度量空间的连续映射, 等距(48), | |
| § 2. 收敛性, 开集与闭集 | 50 |
| 1. 极限点, 闭包(50), 2. 收敛性(52), 3. 稠密子集(53), 4. 开集与闭集(54), 5. 直线上的开集与闭集(56), | |
| § 3. 完备度量空间 | 61 |

| | |
|---|------------|
| 1. 完备度量空间的定义与例子(61), 2. 球套定理(64), 3. 贝尔(Baire)定理(66), 4. 空间的完备化(66). | |
| § 4. 压缩映射原理及其应用..... | 70 |
| 1. 压缩映射原理(70), 2. 压缩映射原理最简单的一些应用(71), 3. 微分方程的存在性与唯一性定理(75), 4. 压缩映射原理应用于积分方程(78). | |
| § 5. 拓扑空间..... | 81 |
| 1. 拓扑空间的定义与例子(81), 2. 拓扑的比较(83), 3. 确定邻域族, 基, 可数性公理(84), 4. T 中的收敛序列(88), 5. 连续映射, 同胚(89), 6. 分离性公理(92), 7. 在空间中给定拓扑的不同方法, 可度量性(95). | |
| § 6. 紧性..... | 97 |
| 1. 紧性概念(97), 2. 紧空间的连续映射(99), 3. 在紧空间上的连续函数与半连续函数(100), 4. 可数紧性(103), 5. 准紧集(105). | |
| § 7. 度量空间的紧性..... | 106 |
| 1. 完全有界性(106), 2. 紧性与完全有界性(108), 3. 度量空间中的准紧子集(109), 4. 阿尔采拉(Arzelà)定理(110), 5. 皮亚诺(Peano)定理(112), 6. 一致连续性, 度量紧统的连续映射(114), 7. 拓广的阿尔采拉定理(115). | |
| § 8. 度量空间中的连续曲线..... | 117 |
| 第三章 赋范线性空间与线性拓扑空间..... | 123 |
| § 1. 线性空间..... | 123 |
| 1. 线性空间的定义及例子(123), 2. 线性相关性(125), 3. 子空间(126) 4. 商空间(127), 5. 线性泛函(128), 6. 线性泛函的几何意义(130). | |
| § 2. 凸集与凸泛函, 汉恩-巴拿赫(Hahn-Banach)定理..... | 132 |
| 1. 凸集与凸体(132), 2. 齐次凸泛函(135), 3. 闵可夫斯基泛函(136), 4. 汉恩-巴拿赫定理(139), 5. 线性空间中凸集的可分离性(143). | |
| § 3. 赋范空间..... | 144 |
| 1. 赋范空间的定义与例子(144), 2. 赋范空间的子空间(146), 3. 赋范空间的商空间(147). | |

| | |
|--|------------|
| § 4. 欧几里得空间 | 149 |
| 1. 欧几里得空间的定义(149), 2. 例子(151), 3. 正交基的存在性, 正交化(153), 4. 贝塞耳(Bessel)不等式, 封闭正交系(156), 5. 完备的欧几里得空间, 黎茨-费歇尔(Riesz-Fisher)定理(160), 6. 希耳伯特空间, 同构定理(163), 7. 子空间, 正交补, 直和(166), 8. 欧几里得空间的特性(170), 9. 复欧几里得空间(173), | |
| § 5. 线性拓扑空间 | 176 |
| 1. 定义与例子(176), 2. 局部凸性(179), 3. 可数赋范空间(180), | |
| 第四章 线性泛函与线性算子 | 184 |
| § 1. 线性连续泛函 | 184 |
| 1. 线性拓扑空间中的线性连续泛函(184), 2. 赋范空间上的线性泛函(186), 3. 赋范空间中的汉恩-巴拿赫定理(189), 4. 在可数赋范空间中的线性泛函(192), | |
| § 2. 共轭空间 | 192 |
| 1. 共轭空间的定义(192), 2. 共轭空间中的强拓扑(193), 3. 共轭空间的例子(196), 4. 二次共轭空间(202), | |
| § 3. 弱拓扑与弱收敛 | 205 |
| 1. 在线性拓扑空间中的弱拓扑与弱收敛(205), 2. 赋范空间中的弱收敛(206), 3. 共轭空间中的弱拓扑与弱收敛(210), 4. 共轭空间中的有界集(212), | |
| § 4. 广义函数 | 216 |
| 1. 函数概念的推广(216), 2. 基本函数空间(217), 3. 广义函数(218), 4. 广义函数的运算(220), 5. 基本函数范围的充足性(223), 6. 按导数求函数, 广义函数类中的微分方程(224), 7. 某些推广(227), | |
| § 5. 线性算子 | 231 |
| 1. 线性算子的定义与例(231), 2. 连续性与有界性(235), 3. 算子的和与积(237), 4. 逆算子, 可逆性(239), 5. 共轭算子(246), 6. 欧几里得空间中的共轭算子, 自共轭算子(248), 7. 算子的谱, 预解式(250), | |
| § 6. 紧算子 | 253 |
| 1. 紧算子的定义与例(253), 2. 紧算子的基本性质(258), 3. 紧 | |

算子的特征值(261). 4. 希耳伯特空间中的紧算子 (262). 5. H 中的自共轭紧算子(263).

第五章 测度, 可测函数, 积分..... 268

§ 1. 平面集的测度..... 268

1. 初等集的测度(268). 2. 平面集的勒格贝(Lebesgue)测度(273). 3. 若干补充与推广(281).

§ 2. 一般测度概念. 测度从半环到环上的扩张. 加性和 σ -加性... 284

1. 测度的定义(284). 2. 从半环到其所生成的环的测度扩张(284).
3. σ -加性(287).

§ 3. 测度的勒贝格扩张..... 291

1. 给定在一个含有单位集的半环上的测度的勒贝格扩张(291). 2. 给定在不含单位集的半环上的测度扩张(295). 3. 在 σ -有限测度的情形下可测性概念的扩充(298). 4. 按约当(Jordan)意义的测度扩张(301). 5. 测度扩张的单值性(304).

§ 4. 可测函数..... 305

1. 可测函数的定义及其基本性质(305). 2. 可测函数的运算(307).
3. 等价性(310). 4. 几乎处处收敛性(311). 5. 叶果洛夫(Егоров)定理(311). 6. 按测度收敛(313). 7. 鲁金(Лузин)定理. C 性质(316).

§ 5. 勒贝格积分..... 317

1. 简单函数(318). 2. 简单函数的勒贝格积分(318). 3. 具有有限测度的集上的勒贝格积分的一般定义(321). 4. σ -加性和勒贝格积分的绝对连续性(324). 5. 勒贝格积分号下取极限(329).
6. 无穷测度集上的勒贝格积分(333). 7. 勒贝格积分同黎曼积分之比较(335).

§ 6. 集族及其测度的直积. 富比尼(Fubini)定理..... 337

1. 集族的乘积(338). 2. 测度积(340). 3. 用截线的线性测度之积分表示平面测度之表达式. 勒贝格积分的几何意义(342). 4. 富比尼定理(345).

第一章 集论初步

§1. 集的概念. 集上的运算

1. 基本定义 在数学中碰到各种各样的集. 我们可以谈论多面体的面的集, 直线上的点集, 自然数集等等. 集的概念是如此一般, 以至很难给它下一个不归结为其同义语的定义, 这些同义语无非是元素的总体, 元素的全体等.

集的概念在近代数学中所起的作用, 不仅取决于集论本身在目前已经成为一门非常广阔而内容丰富的学科, 并且主要还取决于在上一世纪末出现的集论对整个数学已经产生而且还在产生全面的影响. 本书不准备较为完全地阐述这个理论, 这里只引进基本符号以及后面要用到的集论的基本概念.

我们用大写字母 A, B, \dots 表示集, 而它们的元素用小写字母 a, b, \dots 来表示. 我们把论断“元素 a 属于 A ”用符号 $a \in A$ (或 $A \ni a$) 记之; 记号 $a \notin A$ (或 $A \not\ni a$) 表示元素 a 不属于 A . 如果组成 A 的一切元素都属于 B (并且不排除 $A=B$ 的情形), 这时我们就称 A 为集 B 的子集, 并记作 $A \subset B$. 例如, 整数在一切实数的集中构成一个子集.

有时我们预先并不知道某集 (例如, 给定方程的根的集) 是否至少含有一个元素. 因此; 引进空集, 即一个元素也不包含的集的概念是合理的. 我们用符号 \emptyset 表示这个集. 任何集都包含 \emptyset 作为它的子集. 既异于某集本身又异于 \emptyset 的子集称为真子集.

2. 集上的运算 设 A 与 B 为两个任意集. 由至少属于集 A

与 B 中之一的一切元素组成的集 $C=A \cup B$ 称为 A 与 B 的和或并 (图1).

类似地可定义任意(有限或无限)个集的和. 如果 A_α 是任意一组集, 那么它们的和 $\bigcup_{\alpha} A_\alpha$ 就是由至少属于集 A_α 中之一的元素的全体组成的集.

由既属于 A 又属于 B 的一切元素组成的集 $C=A \cap B$ 叫做集 A 与 B 的交(图 2). 例如, 一切偶数集与一切被 3 整除的整数集的交是由一切被 6 整除的整数组成的. 属于每一 A_α 的元素的全体 $\bigcap_{\alpha} A_\alpha$ 叫做任意(有限或无限)个集 A_α 的交.

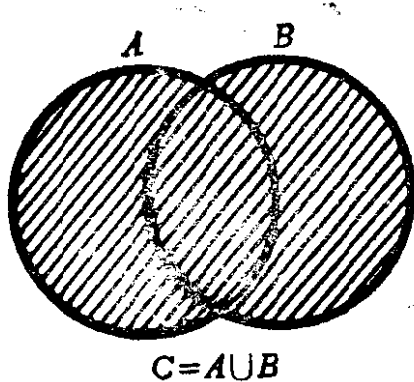


图 1

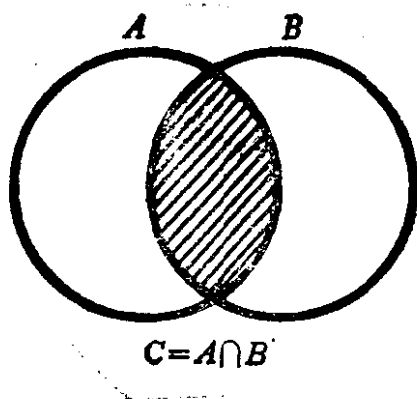


图 2

集加法与乘法运算, 按照集本身的定义是可交换且可结合的, 即

$$A \cup B = B \cup A, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

此外, 它们相互间还是可分配的:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (1)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \quad (2)$$

事实上,我们来验证,例如,上述等式中的第一个^①. 设元素 x 属于等式(1)左端的集,即 $x \in (A \cup B) \cap C$,这意味着 $x \in C$,此外, x 还至少属于集 A 或 B 两者之一. 这时 x 至少属于集 $A \cap C$ 或 $B \cap C$ 中的一个,即 x 属于等式(1)右端的集. 反之,设 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$,这时 $x \in A \cap C$ 或 $x \in B \cap C$. 因而 $x \in C$,此外, x 属于 A 或 B ,即 $x \in A \cup B$,这样, $x \in (A \cup B) \cap C$. 等式(1)证毕. 类似地可验证等式(2).

下面我们定义集的减法运算. 我们把不属于 B 的 A 中元素的全体 $C = A \setminus B$ 叫做集 A 与 B 的差(图 3). 同时,一般说来,并不假定 $A \supset B$. 有时也把 $A \setminus B$ 写作 $A - B$.

有时(例如,在测度论中)需要研究所谓两个集 A 与 B 的对称差,它是由差 $A \setminus B$ 与 $B \setminus A$ 的和来定义的(图 4). 我们将以符号

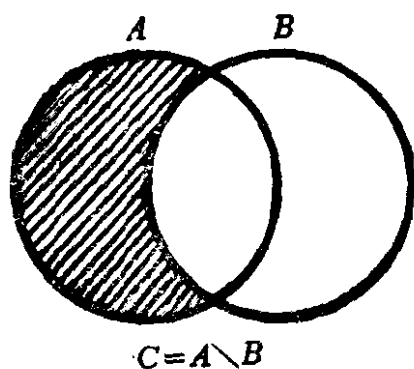


图 3

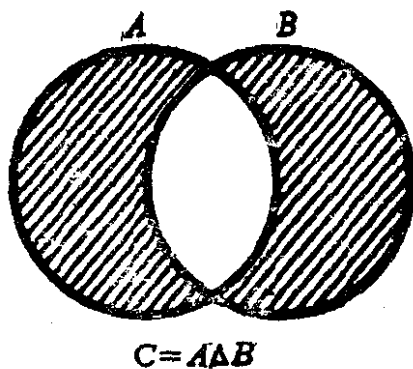


图 4

$A \Delta B$ 记集 A 与 B 的对称差 C . 于是,按定义,

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

习题 证明 $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

^① 两个集的等式 $A = B$ 可理解为恒等式,即它表示集 A 的每一元素属于 B ;反之,集 B 的每一个元素属于 A . 换句话说,等式 $A = B$ 等价于这样的两个包含式 $A \subset B$ 及 $B \subset A$ 同时成立.

我们常常需要研究这样或那样的一组集，这组集是某一基本集 S 的子集。例如，数轴上的各种点集。在这种情况下，差 $S \setminus A$ 叫做集 A 的余集，并记作 $C A$ 或 A' 。

在集合论及其应用，基于以下两个关系的所谓对偶原理起着极重要的作用：

1. 和集的余集等于余集的交集

$$S \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (S \setminus A_{\alpha}). \quad (3)$$

2. 交集的余集等于余集的和集

$$S \setminus \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (S \setminus A_{\alpha}). \quad (4)$$

对偶原理是从与某一固定集 S 的子集族有关的任一等式出发，用代换的方法，把所考察的一切集换成它的余集，和集换成交集，交集换成和集，这样就能够完全自动地得到另一个对偶的等式。作为一个例子，从第二章 §2 定理 3 利用这个原理就可以推出定理 3'。

下面我们给出关系式(3)的证明。

设 $x \in S \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ ，这意味着 x 不属于并集 $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ ，即不属于 A_{α} 中的任何一个集。于是， x 属于余集 $S \setminus A_{\alpha}$ 中的每一个集，所以 $x \in \bigcap_{\alpha} (S \setminus A_{\alpha})$ 。反之，设 $x \in \bigcap_{\alpha} (S \setminus A_{\alpha})$ ，即 x 属于每一个 $S \setminus A_{\alpha}$ ，这时 x 不属于 A_{α} 中的任何一个集，即不属于它们的和 $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ 。于是 $x \in S \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ 。等式(3)证毕。关系式(4)也可类似地证明（请读者自行证明）。

* 对于运算 $A \Delta B$ 叫做“对称差”是不很合适的。这种运算与

取和集 $A \cup B$ 的运算有许多类似之处. 事实上, $A \cup B$ 意味着我们把以下两个论断“元素属于 A ”及“元素属于 B ”用非排斥的“或”联结起来; 而 $A \Delta B$ 意味着把同样的两个论断用排斥的“或”联结起来: “元素 x 属于 $A \Delta B$, 当且仅当 x 或仅属于 A , 或仅属于 B ”. 我们可以把集 $A \Delta B$ 叫做集 A 与 B “按模 2 的和” (亦即取这两个集的并, 但同时把两个集相同的元素除掉).

§2. 映射. 分类

1. 集的映射. 函数的一般概念 在分析学中, 函数的概念可以用以下的方式引进. 设 X 是数轴上的某一个集. 如果对于每一个数 $x \in X$, 有一个确定的数 $y = f(x)$ 与之对应, 则说在集 X 上定义了一个函数 f . 这时, X 叫做给定函数的定义域, 而 Y 是该函数取得一切值的总体, 叫做函数的值域.

如果考虑以任何一个不管具有什么属性的集来代替数集, 那么我们就得到最一般的函数概念. 设 M 与 N 是两个任意集. 如果对于每一个元素 $x \in M$, 有 N 中一个且仅仅一个元素 y 与之对应, 则说在 M 上定义了 N 中取值的函数 f . 对于具有任意属性的集合 (其实, 正如数集的情形一样), 我们常常用术语“映射”来代替术语“函数”, 并且说, 一个集到另一个集内的映射. 对于具有特殊属性的集 M 与 N 就产生特殊类型的函数, 这些函数都有特殊的名称, 如“向量函数”, “测度”, “泛函”, “算子”等等. 下面我们将要见到这些函数.

为了表示从 M 到 N 内的函数 (映射), 我们常常使用记号

$$f: M \rightarrow N.$$

如果 a 是 M 中的元素, 那么 N 中对应于它的元素 $b = f(a)$ 叫做 (在映射 f 下) a 的象. 我们把 M 中其象为给定元 $b \in N$ 的一

切元素 a 的总和叫做元素 b 的原象(或确切地说全原象), 并记作 $f^{-1}(b)$.

设 A 是 M 中某一个集, 形如 $f(a) (a \in A)$ 的一切元素 $\{f(a) : a \in A\}$ 叫做 A 的象, 并记作 $f(A)$. 同样地, 对于 N 中每一个集 B 可定义它的(全)原象 $f^{-1}(B)$, 即 $f^{-1}(B)$ 是 M 中其象属于 B 的一切元素的总和. 可能出现下面的情况: B 中任一元素 b 都没有非空的原象, 于是原象 $f^{-1}(B)$ 也是空集.

这里, 我们仅研究映射最一般的性质.

下面引进某些术语. 如果 $f(M) = N$, 则说 f 是集 M 到 N “上”的映射, 这种映射亦称为满射. 在一般情况下, 即当 $f(M) \subset N$ 时, 则说 f 是 M 到 N “内”的映射.

如果对于 M 中任意两个互异的元素 x_1 与 x_2 , 它们的象 $y_1 = f(x_1)$ 与 $y_2 = f(x_2)$ 也各异, 则 f 称为单射. 既是满射又是单射的映射 $f: M \rightarrow N$ 就叫做双射, 或者称 M 与 N 之间一一对应.

现在我们建立映射的基本性质.

定理 1 两个集的和的原象等于它们的原象的和:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

证明 设元素 x 属于集 $f^{-1}(A \cup B)$. 这意味着 $f(x) \in A \cup B$, 即 $f(x) \in A$ 或 $f(x) \in B$. 于是, x 至少属于集 $f^{-1}(A)$ 或 $f^{-1}(B)$ 之一, 即 $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. 反之, 如果 $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, 那么 x 至少属于集 $f^{-1}(A)$ 或 $f^{-1}(B)$ 中的一个, 即 $f(x)$ 至少属于集 A 或 B 中之一. 因而 $f(x) \in A \cup B$. 于是 $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

定理 2 两个集的交的原象等于它们的原象的交:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

证明 如果 $x \in f^{-1}(A \cap B)$, 那么 $f(x) \in A \cap B$, 即 $f(x) \in A$ 且 $f(x) \in B$. 因此, $x \in f^{-1}(A)$ 且 $x \in f^{-1}(B)$, 即 $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

反之, 如果 $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, 即 $x \in f^{-1}(A)$ 且 $x \in f^{-1}(B)$, 那