函数论与泛函分析初步 上册

〔苏〕A.H.柯尔莫果洛夫 C.B.佛明 著
郑洪深 郭思旭 段虞荣 译

高等教育出版社

函数论与泛函分析初步

上　册

[苏] A. H. 柯尔莫果洛夫　C. B. 佛明　著
郭思旭　郑洪深　段虞荣　译

高等教育出版社

（京）112号

内容提要

本书译自苏联科学出版社1976年出版的《Элементы теории функций и Функционального анализа》，上册内容包括集论初步；度量空间与拓扑空间；赋范线性空间与线性拓扑空间；线性泛函与线性算子；测度，可测函数，积分等五章，可供高等学校数学系师生参考.

函数论与泛函分析初步

［苏］A.H.柯尔莫果洛夫　C.B.佛明　著

郑洪深　郭思旭　段虞荣　译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

民族印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 11.25　字数 270 000

1992 年5月第1版　1992 年5月第1次印刷

印数 0001—2 090

ISBN7-04-000708-8/O·111

定价6.90元

第四版序

这一版问世以后C.B.佛明已不在人间．但是，他还是赶上了改进本书的所有主要工作，主要修改了第十章．在这一章中补充了关于隐函数定理的一节并且修改了“极值问题”的一节．这些变化使得有必要修改第四章(汉恩-巴拿赫定理及关于逆算子的巴拿赫定理的推论)．

本书全文经由B.M.亚历克赛也夫与B.M.季霍米洛夫审阅，在此我向他们表示衷心的感谢．

A.H.柯尔莫果洛夫

第二版序

《函数论与泛函分析初步》的第一版分别在1954年和1960年以两卷本出版．这两卷本的出现是与40年代末在莫斯科大学数学力学系教学大纲内包含了“分析III”教程有关的，分析III包含了测度论与函数论初步、积分方程、泛函分析的内容，稍晚些又包括了变分法．本教程起先由A.H.柯尔莫果洛夫，以后又有其他讲授者，其中包括C.B.佛明，在莫斯科大学讲授过．后来其他大学的教学计划中也采用了这本书．

当时，在莫斯科大学用统一的教程“分析III”代替实变函数论、积分方程及变分法的各门课程引起了较大的争论．本教程面临培养学生具备双重视野：一方面，注意集合论，度量空间与拓扑空间连续映射的一般理论，线性空间以及在其上的泛函与算子，一般“测度空间”中的纯测度论与积分法等的发展的内部逻辑；另一方面，不忽略被这些更为抽象的数学领域所服务的古典分析学甚至应用分析学的问题．

在解决这个任务的时候，我们在本书的编写计划中偏重于教程结构的抽象方面．从集的一般理论（第一章）可以转到度量空间、拓扑空间以及它们的连续映射（第二章），或直接转到测度（没有拓扑）的空间及该空间的积分法（第五章）．在第三与第四章中研究线性空间以及其中的线性泛函与线性算子．从这两章可以直接转到第十章（非线性微分算子与非线性泛函）．在第七章中研究可和函数线性空间．就实质上说，我们仅在第六章与第八章中把注意力集中在实变函数上．尽管本书把函数论与泛函分析的一般概念的研究放在首位，但读者可以观察到在几乎所有各章，我们都注意

将上述概念与古典问题联系起来．在本版中增加了第六章（微分论），第八章（三角级数及傅里叶积分）与第九章（线性积分方程），使得现在这本书（除变分法以外）包括了莫斯科大学中所用的“分析 III”教程的整个教学大纲．本书没有加入变分法这一部分内容，仅限于在第十章中叙述了非线性泛函分析的最重要概念．

如同旧版一样，在新版中，测度的一般理论占有相当的地位．近来不利用测度论工具而根据丹尼尔(Daniell)概型出现了相当多积分理论的叙述．但是，我们认为测度理论很重要，并且测度论本身不依赖于积分概念的引入，因而值得加到大学教程中去．

新增加的各章明显扩充了本书的内容．旧的各章也作了本质的修改并在其中加入新的节段（例如，序型与超限数，拓扑空间，广义函数等等）．

然而，在修改本书并增加新的篇幅时，我们努力保持了第一版中看来是比较成熟的初等叙述风格．我们期望本书与其他教程，特别是与Γ.Е.希洛夫的书“数学分析专门教程”一样，在大学教学中得到其应有的地位．在希洛夫的教程中更强调问题的解析方面，而对度量空间与拓扑空间、测度等内容的兴趣不大，以较少的篇幅作为独立的内容来介绍．

A.H.柯尔莫果洛夫

C.B.佛明

第 三 版 序

在新版准备过程中，我们保留了本书总的计划并力求不增加内容. 此外，本书全部内容都经过重新审阅与修订. 在这个工作中Φ. B. 希罗柯夫给予我们莫大的帮助. 据我们的意见，在第一章与第四章中作出一些简单的变动和修改，从比较简单的概念过渡到比较复杂的概念(例如，从巴拿赫空间过渡到第四章中更一般的空间). 测度论(第五章)的叙述作了十分重要的修改.

近年来，"分析III"教程往往包含巴拿赫代数论与谱分析初步. 因此，我们把B. M. 季霍米洛夫所写有关上述两个问题作为附录是适宜的.

A. H. 柯尔莫果洛夫

C. B. 佛明

目　录

第一章 集论初步

§1. 集的概念. 集上的运算

1. 基本定义 在数学中碰到各种各样的集. 我们可以谈论多面体的面的集,直线上的点集,自然数集等等. 集的概念是如此一般,以至很难给它下一个不归结为其同义语的定义,这些同义语无非是元素的总体,元素的全体等.

集的概念在近代数学中所起的作用,不仅取决于集论本身在目前已经成为一门非常广阔而内容丰富的学科,并且主要还取决于在上一世纪末出现的集论对整个数学已经产生而且还在产生全面的影响. 本书不准备较为完全地阐述这个理论,这里只引进基本符号以及后面要用到的集论的基本概念.

我们用大写字母 $A, B, \cdots$ 表示集,而它们的元素用小写字母 $a, b, \cdots$ 来表示. 我们把论断"元素 a 属于 A"用符号 $a \in A$(或 $A \ni a$)记之;记号 $a \notin A$(或 $A \not\ni a$)表示元素 a 不属于 A. 如果组成 A 的一切元素都属于 B(并且不排除 $A=B$ 的情形),这时我们就称 A 为集 B 的子集,并记作 $A \subset B$. 例如,整数在一切实数的集中构成一个子集.

有时我们预先并不知道某集(例如,给定方程的根的集)是否至少含有一个元素. 因此,引进空集,即一个元素也不包含的集的概念是合理的. 我们用符号 $\varnothing$ 表示这个集. 任何集都包含 $\varnothing$ 作为它的子集. 既异于某集本身又异于 $\varnothing$ 的子集称为真子集.

2. 集上的运算 设 A 与 B 为两个任意集. 由至少属于集 A

与 B 中之一的一切元素组成的集 $C=A\cup B$ 称为 A 与 B 的和或并(图1).

类似地可定义任意(有限或无限)个集的和. 如果 A_α 是任意一组集，那么它们的和 $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ 就是由至少属于集 A_α 中之一的元素的全体组成的集.

由既属于 A 又属于 B 的一切元素组成的集 $C=A\cap B$ 叫做集 A 与 B 的交(图 2). 例如，一切偶数集与一切被 3 整除的整数集的交是由一切被 6 整除的整数组成的. 属于每一 A_α 的元素的全体 $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ 叫做任意(有限或无限)个集 A_α 的交.

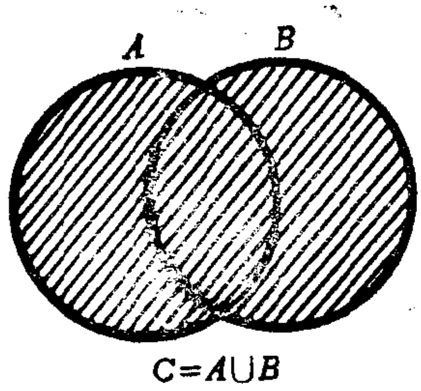

图 1

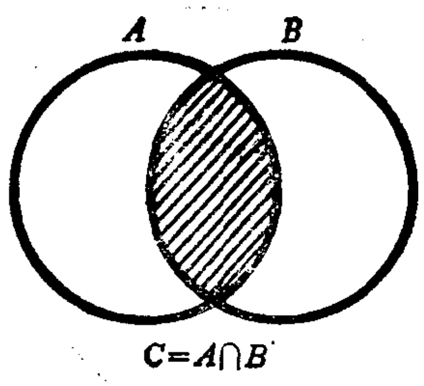

图 2

集的加法与乘法运算，按照集本身的定义是可交换且可结合的，即

$$A\cup B=B\cup A,\qquad (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$A\cap B=B\cap A,\qquad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

此外，它们相互间还是可分配的：

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), \tag{1}$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C). \tag{2}$$

事实上，我们来验证，例如，上述等式中的第一个①. 设元素 x 属于等式(1) 左端的集，即 $x\in(A\cup B)\cap C$，这意味着 $x\in C$，此外，x 还至少属于集 A 或 B 两者之一. 这时 x 至少属于集 $A\cap C$ 或 $B\cap C$ 中的一个，即 x 属于等式(1)右端的集. 反之，设 $x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$，这时 $x\in A\cap C$ 或 $x\in B\cap C$. 因而 $x\in C$，此外，x 属于 A 或 B，即 $x\in A\cup B$. 这样，$x\in(A\cup B)\cap C$. 等式(1)证毕. 类似地可验证等式(2).

下面我们定义集的减法运算. 我们把不属于 B 的 A 中元素的全体 $C=A\setminus B$ 叫做集 A 与 B 的差(图 3). 同时，一般说来，并不假定 $A\supset B$. 有时也把 $A\setminus B$ 写作 $A-B$.

有时(例如，在测度论中)需要研究所谓两个集 A 与 B 的对称差，它是由差 $A\setminus B$ 与 $B\setminus A$ 的和来定义的 (图 4). 我们将以符号

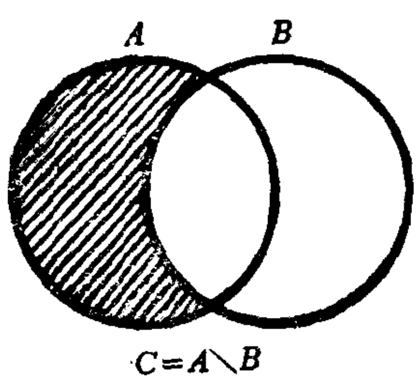

图 3

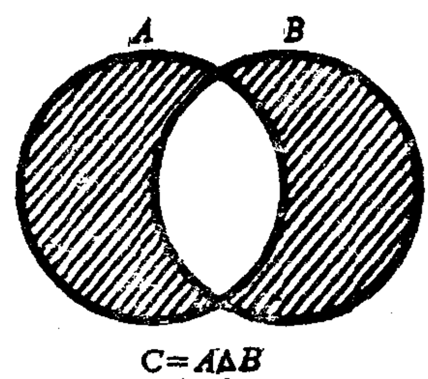

图 4

$A\triangle B$ 记集 A 与 B 的对称差 C. 于是，按定义，

$$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

习题 证明 $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

---

① 两个集的等式 $A=B$ 可理解为恒等式，即它表示集 A 的每一元素属于 B；反之，集 B 的每一个元素属于 A. 换句话说，等式 $A=B$ 等价于这样的两个包含式 $A\subset B$ 及 $B\subset A$ 同时成立.

我们常常需要研究这样或那样的一组集，这组集是某一基本集 S 的子集. 例如，数轴上的各种点集. 在这种情况下，差 $S\setminus A$ 叫做集 A 的余集,并记作 CA 或 A'.

在集合论及其应用中，基于以下两个关系的所谓对偶原理起着极重要的作用:

1. 和集的余集等于余集的交集

$$S\setminus\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}=\bigcap_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha}). \tag{3}$$

2. 交集的余集等于余集的和集

$$S\setminus\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}=\bigcup_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha}). \tag{4}$$

对偶原理是从与某一固定集 S 的子集族有关的任一等式出发,用代换的方法，把所考察的一切集换成它的余集,和集换成交集，交集换成和集，这样就能够完全自动地得到另一个对偶的等式. 作为一个例子,从第二章 §2 定理 3 利用这个原理就可以推出定理 3′.

下面我们给出关系式(3)的证明.

设 $x\in S\setminus\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$,这意味着 x 不属于并集 $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$,即不属于 A_{α} 中的任何一个集. 于是，x 属于余集 $S\setminus A_{\alpha}$ 中的每一个集，所以 $x\in\bigcap_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha})$. 反之,设 $x\in\bigcap_{\alpha}(S\setminus A_{\alpha})$，即 x 属于每一个 $S\setminus A_{\alpha}$，这时 x 不属于 A_{α} 中的任何一个集,即不属于它们的和 $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$. 于是 $x\in S\setminus\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$. 等式(3)证毕. 关系式(4)也可类似地证明（请读者自行证明).

* 对于运算 $A\triangle B$ 叫做“对称差”是不很合适的. 这种运算与

取和集 $A\cup B$ 的运算有许多类似之处. 事实上, $A\cup B$ 意味着我们把以下两个论断"元素属于 A"及"元素属于 B"用非排斥的"或"联结起来; 而 $A\triangle B$ 意味着把同样的两个论断用排斥的"或"联结起来:"元素 x 属于 $A\triangle B$,当且仅当 x 或仅属于 A, 或仅属于 B". 我们可以把集 $A\triangle B$ 叫做集 A 与 B"按模 2 的和"(亦即取这两个集的并,但同时把两个集相同的元素除掉).

§2. 映射. 分类

1. 集的映射. 函数的一般概念 在分析学中, 函数的概念可以用以下的方式引进. 设 X 是数轴上的某一个集. 如果对于每一个数 $x\in X$,有一个确定的数 $y=f(x)$ 与之对应, 则说在集 X 上定义了一个函数 f. 这时,X 叫做给定函数的定义域,而 Y 是该函数取得一切值的总体,叫做函数的值域.

如果考虑以任何一个不管具有什么属性的集来代替数集, 那么我们就得到最一般的函数概念. 设 M 与 N 是两个任意集. 如果对于每一个元素 $x\in M$, 有 N 中一个且仅仅一个元素 y 与之对应,则说在 M 上定义了 N 中取值的函数 f. 对于具有任意属性的集合(其实,正如数集的情形一样),我们常常用术语"映射"来代替术语"函数",并且说,一个集到另一个集内的映射. 对于具有特殊属性的集 M 与 N 就产生特殊类型的函数,这些函数都有特殊的名称,如"向量函数","测度","泛函","算子"等等. 下面我们将要见到这些函数.

为了表示从 M 到 N 内的函数(映射), 我们常常使用记号

$$f: M\to N.$$

如果 a 是 M 中的元素, 那么 N 中对应于它的元素 $b=f(a)$ 叫做(在映射 f 下)a 的象. 我们把 M 中其象为给定元 $b\in N$ 的一

切元素 a 的总和叫做元素 b 的原象(或确切地说全原象)，并记作 $f^{-1}(b)$.

设 A 是 M 中某一个集，形如 $f(a)(a\in A)$ 的一切元素 $\{f(a):a\in A\}$ 叫做 A 的象，并记作 $f(A)$. 同样地，对于 N 中每一个集 B 可定义它的(全)原象 $f^{-1}(B)$，即 $f^{-1}(B)$ 是 M 中其象属于 B 的一切元素的总和. 可能出现下面的情况: B 中任一元素 b 都没有非空的原象，于是原象 $f^{-1}(B)$ 也是空集.

这里，我们仅研究映射最一般的性质.

下面引进某些术语. 如果 $f(M)=N$，则说 f 是集 M 到 N "上"的映射，这种映射亦称为满射. 在一般情况下，即当 $f(M)\subset N$ 时，则说 f 是 M 到 N"内"的映射.

如果对于 M 中任意两个互异的元素 x_1 与 x_2，它们的象 $y_1=f(x_1)$ 与 $y_2=f(x_2)$ 也各异，则 f 称为单射. 既是满射又是单射的映射 $f: M\to N$ 就叫做双射，或者称 M 与 N 之间一一对应.

现在我们建立映射的基本性质.

定理 1 两个集的和的原象等于它们的原象的和:

$$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B).$$

证明 设元素 x 属于集 $f^{-1}(A\cup B)$. 这意味着 $f(x)\in A\cup B$，即 $f(x)\in A$ 或 $f(x)\in B$. 于是，x 至少属于集 $f^{-1}(A)$ 或 $f^{-1}(B)$ 之一，即 $x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$. 反之，如果 $x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$，那么 x 至少属于集 $f^{-1}(A)$ 或 $f^{-1}(B)$ 中的一个，即 $f(x)$ 至少属于集 A 或 B 中之一. 因而 $f(x)\in A\cup B$. 于是 $x\in f^{-1}(A\cup B)$.

定理 2 两个集的交的原象等于它们的原象的交:

$$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B).$$

证明 如果 $x\in f^{-1}(A\cap B)$，那么 $f(x)\in A\cap B$，即 $f(x)\in A$ 且 $f(x)\in B$. 因此，$x\in f^{-1}(A)$ 且 $x\in f^{-1}(B)$，即 $x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.

反之，如果 $x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$，即 $x\in f^{-1}(A)$ 且 $x\in f^{-1}(B)$，那