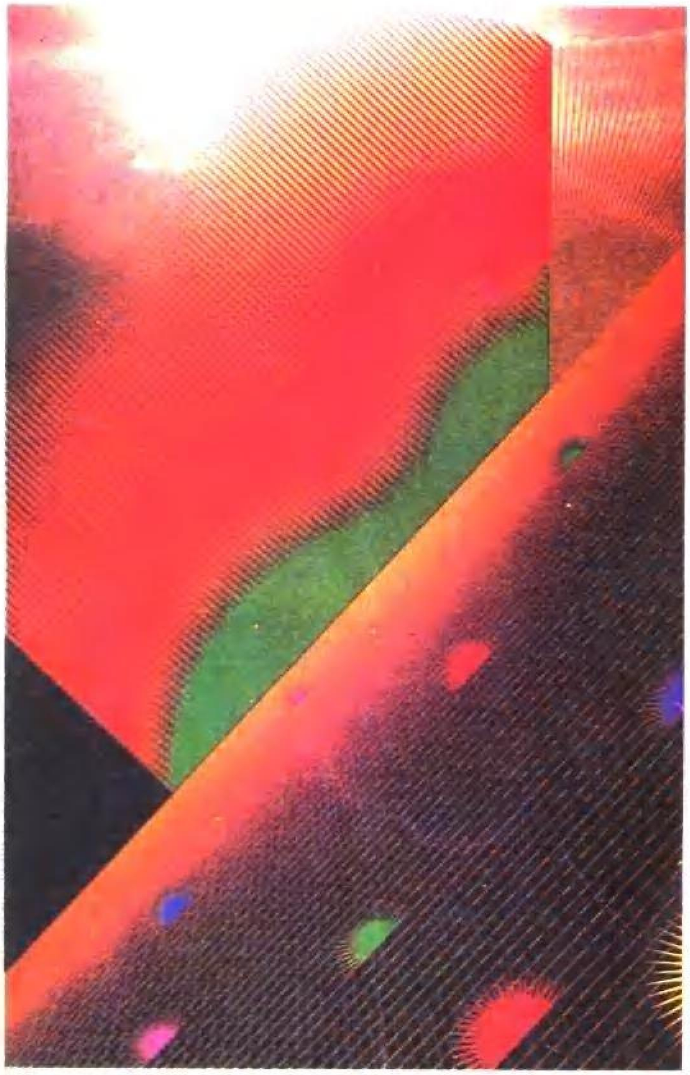
线性规划与网络流

林诒勋 编著



河南大学
出版社

线性规划与网络流

林诒勋 编著

江苏工业学院图书馆
藏书章

河南大学出版社

线性规划与网络流
林诒勋 编著
责任编辑 朱建伟

河南大学出版社出版
(开封市明伦街85号)
河南省新华书店发行
中科院开封印刷厂印刷

开本:850×1168毫米 1/32 印张:9.5 字数:238千字
1996年8月第1版 1996年8月第1次印刷
印数:1—1200 定价:11.00元

ISBN7-81041-365-1/O·104

JJ1 1176/25

序

科学思潮的泛起，总是好像收获季节到来那样不约而同. 在运筹学从草创走向发展的 50 年代，中国出现了物资调运问题的图上作业法. 它是线性规划与网络流的结合点，它兼有数值计算的迭代模式和组合数学的结构特征. 时至今日，由于它那总览全局的直观图象，一直受到使用部门的欢迎.

从历史上说，线性规划的起源也是物资调运问题（或输送问题）. 40 年代初 Hitchcock 和 Kantorovitch 等先驱建立了解输送问题的消去法和位势法. 实际上已预示着一种新的普遍方法的诞生. 50 年代初，Dantzig 奠定了线性规划的一般理论和一般方法，随即又将他的单形法应用于输送问题，得到了“表上作业法”，后来被人们称之为网络单形法. 60 年代初，Ford 和 Fulkerson 创立了网络流理论，开拓出线性最优化与组合最优化的过渡领域，成为近代图论发展的一个支柱. 但是，“网络流”的一个基本背景仍然是物资调运或资源分配.

另外一个值得注意的线索是“对偶性”. 对偶线性规划是首先由 Von Neumann 在博弈论中提出来的. 但是，对偶性的思想渊源可以追溯到线性不等式理论的 Farkas 引理以及线性算子理论中的 Fredholm 定理. 由此演变出来的线性规划对偶理论，是各种经典算法的基础. 由对偶定理建立起来的判定准则，是贯穿本书的一条主线.

80 年代初，自从 Khachian 提出线性规划的第一个多项式时间算法——椭球法之后，我们的学科转入一个急剧变革时期. 新思潮与经典方法正在进行某种竞赛，日新月异的成果还来不及一一写入我们的教科书中. 我们只用一章的短短篇幅来介绍椭球法的

基本原理，以便对这个新时期有一初步的了解.

这本书的第一稿完成后，由郑州大学作为交流教材印发.以后在教学过程中又几经修改，都曾得到一些兄弟院校的采用.这次出版之前进行了最后一次修订.在编写修改过程中，先后承许国志院士、马仲蕃教授、秦裕瑗教授、林国宁教授以及其他朋友们的指导、帮助和支持，在此谨致以衷心的感谢.同时，这部教材能够正式出版，是由于得到河南省教委的出版资助和河南大学出版社的支持，对此，也表示深切的谢意.

林诒勋

1996年6月于郑州大学

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

下篇　网络规划模型

第一章 绪　论

在这个序章中，我们先粗略地勾画出线性规划这个学科的轮廓——它的研究对象、地位和特点. 我们将通过一些实例和初等解法描述其基本思想.

§1 运筹学中的最优化问题

在社会主义建设中，调动一切积极因素，对生产进行科学的计划、组织和管理，提高劳动生产率，做到优质、高效、低耗，这是我们所追求的目标.

众所周知，提高生产效率通常有两种不同途径：一种是属于技术科学的领域，即从原料、设备和工艺等方面进行创新，如发现新的能源、合成新的材料、创造先进的机器、采用优越的工艺流程等等；另一种是在不增加人力和投资的条件下做好组织管理，充分挖掘生产潜力，最大限度地发挥现有资源和设备的作用. 举个简单的例子来说，为提高铁路运输效率，一方面可以铺设新的铁路线、采用高速机车、改进车站的设备；另一方面应对整个运输系统进行合理的调度，消除“对流”、“迂回”、“滞留”等浪费现象，提高现有设备的利用率. 一般地说，前一种途径是各种工程技术学科的研究对象. 后一种途径就不同了，它不是研究动力学、材料学和工艺学，而是考察系统的组织结构、运行方式和制约关系，以便控制其向预期的目标发展，充分发挥其效能. 这就属于系统科学，特别是运筹学的探讨范围.

运筹学的研究对象是各种大型的系统，例如交通或信息传输

系统、生产作业系统、经济决策系统等. 其具体内容包括资源设备的分配与利用，工矿企业的选址与布局，作战部队的部署与给养线的调度，电路、电网及计算机网络的设计等. 特别是，在现代化大生产和科学实验中，人们必须对各种系统进行合理的组织，使之处在最佳的运行状态. 所谓“最佳”，是指某种经济指标或技术指标达到最大限度，比如产量最高或费用最省. 这就是普遍存在的**最优化问题**.

从数学上说，最优化问题就是在一定约束条件下寻求某种函数(或泛函)的最大值或最小值. 众所周知，极值问题是历史悠久而方法繁多的，古典微分学把求 n 元函数的极值化为求梯度为零的点，条件极值情形有拉格朗日不定乘数法，变分学把求泛函极值化为解相应的微分方程，在离散问题中还有各种特殊技巧，这些方法都是大家所熟悉的. 50 年代以来出现了近代的最优化方法——数学规划论，包括线性规划、非线性规划、动态规划及整数规划等. 近代方法与古典方法的不同之处在于它强调算法的可实现性. 以上所说的微积分方法及数学规划论可称为**解析方法**(**或间接法**). 另外还有一类最优化方法称为**数值方法**(**或直接法**)，如优选法(直接搜索法)及统计试验法等.

运筹学的分支，除数学规划或最优化理论之外，还有作为研究竞争行为的对策论(博弈论)，作为研究拥挤现象中等待与服务之间关系的排队论(随机服务系统理论)，作为研究工序安排的统筹法(PERT)及时间表理论(Scheduling)；此外还有质量管理、决策论、存贮论、搜索论、模拟技术等. 运筹学并非单纯的数学学科，而是包含着许多经验和定性分析的内容，但就其数学基础理论来说，也可以看作应用数学的一支，称为运筹数学.

在一定意义上说，边缘学科或交叉学科是科学发展的生长点，它总是那样生机勃勃的. 运筹学的发展，只不过是战后 40 多年的事情，由于它有深厚的应用背景，不断受到实践的推动，所以进展

是很快的.而目前十分活跃的系统工程和管理科学实际上是与运筹学同属一个思潮的.

§2 线性规划的实际例子

2.1 物资调运与分配问题

设某种物资从 m 个发点 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 输送到 n 个收点 $B_1, B_2, \cdots, B_n$,其中发出量(供应量)分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$,收入量(需要量)分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$,并且产销平衡,即 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. 从发点 A_i 到收点 B_j 的距离(或单位运费)是已知的,记为 c_{ij};而从 A_i 到 B_j 的输送量(流量)记为 x_{ij}($1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$). 一个调运方案将由变量组 $\{x_{ij}\}$ 来描述. 问题是寻求一个调运方案,使总的运输费用达到最小.

为写出此问题的数学形式,首先看一看如下的平衡表.

发＼收	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	发量
A_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}	a_m
收量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

(表 1)

对一个调运方案 $\{x_{ij}\}$,第 i 行之和等于 a_i,第 j 列之和等于 b_j,而总运费为 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$. 因此,得到在约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{2.1}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\cdots,n), \tag{2.2}$$

及
$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n) \tag{2.3}$$

之下，求使

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{2.4}$$

达到最小值的解$\{x_{ij}\}$的极值问题.

此问题具有一定的广泛性，资源分配、工作安排或作物布局都会出现同样的数学形式. 以作物布局为例，设有 m 种作物 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 要分配到 n 种不同土质的田地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中去种植，作物 A_i 的播种公顷数为 a_i，土地 B_j 占有的公顷数为 b_j，而作物 A_i 在土地 B_j 中种植的单产为 c_{ij}. 那末，一个种植计划就由表 1 来描述，而最优的种植计划就是在约束条件(2. 1)～(2. 3)之下使式(2. 4)达到最大. 众所周知，求一个线性函数的最大值或最小值，是没有本质区别的. 今后，无论实际背景如何，我们均把这种特定的数学形式称为**输送问题**. 其中发点及收点等术语均应作广义的理解.

2. 2　资源利用(产品结构)问题

设某企业有 m 种不同的资源(各种原材料、动力资源、资金、劳力等)可以用来生产 n 种产品，制定生产计划时，应考虑如何有效地利用现有的资源条件，以便获得最大的利润. 假定

a_{ij}——生产每一单位产品 B_j 所消耗资源 A_i 的数量，

b_i——资源 A_i 的拥有量，

d_j——产品 B_j 的定额(最低限度的产量)，

c_j——产品 B_j 的单价，

x_j——产品 B_j 的生产量(待定).

将这些数据列成如下的表：

产品 / 资源	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	资源量
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
定额	d_1	d_2	$\cdots$	d_n	
单价	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	
生产量	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	

(表 2)

一个生产计划必须满足:(1)所消耗的资源不得超过其现有的总量;(2)各种产品的产量不得低于规定的定额.因此有约束条件:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = 1,2,\cdots,m), \tag{2.5}$$

及

$$x_j \geqslant d_j \quad (j=1,2,\cdots,n). \tag{2.6}$$

问题是在此条件下确定一个生产方案$\{x_j\}$,使总产值

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.7}$$

达到最大.(注:若作代换 $x_j' = x_j - d_j$,则(2.6)变为 $x_j' \geqslant 0$,与前例的(2.3)一致.)

2.3 下料问题和生产活动分析

某车间有一批长度为 180 厘米的钢管(数量充分多),今为制造零件,要截出三种不同长度的管料(毛坯):70 厘米的、52 厘米的及 35 厘米的.生产任务规定:三种料的需要量分别不少于 100 根、150 根及 100 根.我们知道,截分钢管时不免要产生"边脚料".为节约原材料,应采取怎样的截法,才能在完成任务的前提下,使总的边料达到最小限度?

分析这个问题,首先要弄清楚所有可能的截法.经简单试算,可得下表所列的八种组合方式:

规格＼截法	(一)	(二)	(三)	(四)	(五)	(六)	(七)	(八)	需要量
70	2	1	1	1	0	0	0	0	100
52	0	2	1	0	3	2	1	0	150
35	1	0	1	3	0	2	3	5	100
边料	5	6	23	5	24	6	23	5	

(表 3)

单纯选择一种截法(如(一)或(四))自然可以使边料较少，但未必能完成规定的任务. 所以必须同时采取若干种截法配合起来，在完成任务的前提下，使总的边料长度为最小. 今假定第 i 种截法的采用次数为 x_i，那么，数组 $\{x_1,x_2,\cdots,x_8\}$ 就描述了一个截分方案.

由表 3 得知，截出 70 厘米的管料的数目应为 $(2x_1+x_2+x_3+x_4)$ 根，按规定任务，它不得少于 100 根，即

$$2x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant 100.$$

类似地有

$$2x_2+x_3+3x_5+2x_6+x_7\geqslant 150,$$

$$x_1+x_3+3x_4+2x_6+3x_7+5x_8\geqslant 100.$$

此外，还有 $x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,8)$. (注：我们姑且忽略 x_j 取整数值的要求.) 由上表的最后一行可知，边料的总长度为

$$f=5x_1+6x_2+23x_3+5x_4+24x_5+6x_6+23x_7+5x_8.$$

问题归结为：在上述约束条件下，求使函数 f 达到最小值的解 $\{x_j\}$.

现在进一步考察一个生产系统，它包括 m 个相对独立的“过程”，都可以用来生产 n 种确定的产品. 所谓过程，可以理解为不同的生产部门、设备、工艺流程或作业方案(比如前述下料问题中的 8 种不同截法). 我们说一个过程的**活动水平**，是指其运转时间的长短或能力发挥的程度(如前例中截法被采用的次数). 问题是如何制定一个生产计划，即如何分配诸过程的活动水平，在完成产品

任务的前提下，使整个系统的总消耗达到最小. 下面是有关的参数：

a_{ij}—— 过程 A_i 在单位活动水平下所能生产产品 B_j 的数量；

c_j—— 产品 B_j 的定额；

b_i—— 过程 A_i 在单位活动水平下所消耗的费用；

u_i—— 过程 A_i 的活动水平(待定).

将这些数据列成如下的表：

过程＼产品	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	成本	活动水平
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1	u_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m	u_m
定额	c_1	c_2	$\cdots$	c_n		

(表 4)

这里，数组 $\{u_i\}$ 描述一个生产方案. 诸变量 u_i 的约束表现为保证完成规定的生产任务，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geqslant c_j \quad (j = 1,2,\cdots,n), \tag{2.8}$$

$$u_i \geqslant 0 \qquad (i=1,2,\cdots,m). \tag{2.9}$$

问题归结为：在约束条件(2.8)和(2.9)之下，求使系统的总消耗

$$g = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \tag{2.10}$$

达到最小值的解 $\{u_i\}$.

此例与前述的资源利用问题统称为生产活动分析问题，这都是线性规划发轫时期人们所关注的典型例子. 从表格中的矩阵 $A=(a_{ij})$ 可以看出，它是受到里昂节夫(Leontief)的投入产出模型的影响的.

2.4 机床任务分配问题

这也是历史上最早出现的例子之一. 设某车间有 m 台机床,用以加工 n 种零件. 不同的机床加工不同的零件,其效率不尽一样. 问题是如何分配各机床的任务,在零件配套的条件下,使得在一个工作单元时间内加工出最多的零件来. 假定

a_{ij}——在一个单元时间内第 i 台机床能加工出第 j 种零件的数量(表征生产效率);

x_{ij}——分配第 i 台机床加工第 j 种零件的时间(以占一个单元时间的百分比计算).

问题的约束条件首先是每台机床的作业时间为一个单元,即

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1,2,\cdots,m), \tag{2.11}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n). \tag{2.12}$$

其次,若按 $\{x_{ij}\}$ 去分配任务,则第 j 种零件的总产量为

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \quad (j = 1,2,\cdots,n).$$

为使零件配套,必须有

$$\frac{z_1}{c_1} = \frac{z_2}{c_2} = \cdots = \frac{z_n}{c_n}. \tag{2.13}$$

这里,$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为配套时零件需要量的比例系数. 最后,问题归结为:确定 $m\times n$ 个变量 x_{ij},在约束条件(2.11)~(2.13)之下,使 z_1 值达到最大.

以上所述的例子是一些理想化的模型,实际情况往往比这复杂得多. 但是,建立线性规划模型总是包括如下三个环节:(1) 引进变量以描写方案;(2) 根据生产要求写出约束条件;(3) 优劣标准用目标函数表示. 建立模型是一项艰巨的工作,提出问题往往比解决问题更重要.

§3 线性规划的数学模型

3.1 标准形式

前一节的例子都是在一组线性方程及线性不等式作为约束条件之下，使一线性函数最小化或最大化. 这一类特殊的条件极值问题，就称为**线性规划**. 虽然具体形式可能有些差异，但都可以化为如下的标准形式：在条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$

及

$$x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, \cdots, x_n\geqslant 0 \tag{3.2}$$

之下，求使函数

$$z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{3.3}$$

达到最大值的解$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

这里，(3.1)称为**约束方程组**，(3.2)称为**非负限制**，合称**约束条件**；(3.3)称为**目标函数**. 满足约束条件的$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为**可行解**，而使目标函数达到最大值的可行解$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为**最优解**. 不失一般性，假定(3.1)右端的 $b_i\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant m)$，因为必要时可在方程两端同乘以$-1$. 以后为了方便，记 $a_{i0}=b_i$.

3.2 化为标准型

若有约束条件是一线性不等式

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i, \tag{3.4}$$

则它等价于

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com