大学数学丛书

古典几何学

项武义　王申怀　潘养廉　编著

复旦大学出版社

大学数学丛书

古典几何学

项武义　王申怀　潘养廉　编著

复旦大学出版社

古典几何学

复旦大学出版社出版
新华书店上海发行所发行
复旦大学印刷厂印刷
字数 184 千　开本 787×1092　1/32　印张7.375
1986 年 8 月第一版　　1986 年 8 月第一次印刷
印数：1——10.000

书号：13253·046　　定价：1.30元

内 容 简 介

本书采用近代观点系统介绍了古典几何学的基础知识（其中包括欧氏几何、非欧几何、解析几何、球面几何与三角、射影几何等），并着重对各种古典几何体系进行比较分析和全局探讨，突出它们的几何思想和在方法论上的创见。本书可作为大学和师范院校的几何学教材或教学参考书，也可供中学数学教师进修和教学时参考。

引　言

几何学是研究“**空间**”的学科．概括地讲，空间之中最原始、最基本的概念是“**位置**”；而空间本身也就是由所有可能的位置组成的总体．在几何学的讨论中，我们用“**点**”标记位置，换句话说，空间就是位置的抽象化．再者，“**线**”就是“通路”的抽象化，连结两点 A、B 的“**直线段**” AB，则是 A、B 两点之间的唯一最短通路的抽象化．它们是空间中最简单、最基本的几何图形；它们提供了空间这个集的基本结构．

举目四望，你就可以看到各种各样的形体．对于那些较为简单、基本的几何形体作一番观察、分析，也就不难认识许多几何量与几何性质．自古以来，世界各古代文明古国，如中国、埃及、巴比伦、玛雅等，都经过实验观察与分析综合，掌握了一套可观的空间知识．例如我国古代，很早就发现了重要的勾股定理，并且建立了一套简易测量的知识．在西方文明中，几何学的研究起源于古埃及与巴比伦，而在古希腊获得长足的进步．欧几里得所著的“Elements”，流传至今，可以说是希腊几何学的一部集大成的代表作．此书于明代由传教士带到中国，徐光启将它译成中文，取名为《几何原理》，这也是中文里《几何学》这个名词的起源．

几何学是一门源远流长、多彩多姿的学科，在人类的理性文明中，它是当之无愧的老大哥；数千年来，不论是在思想领域的突破上，还是在科学方法论的创建上，几何学总扮演着“开路

先锋”的角色，从古典的欧氏几何、解析几何、球面几何、非欧几何、射影几何一直到近代的黎曼几何、代数几何、复几何、辛(sympletic)几何、代数拓扑学、微分拓扑学等等都是这样．直到现在，几何学仍然是一门方兴未艾、蓬勃发展的学科，依然保有它那种“少壮派”的冲劲与活力．在整个数学体系中，几何一直是个重要的主角．在大学数学课程中，几何学当然也是一组主要的基础课．

一九八三年五月在上海复旦大学工作访问，能有机会和国内三、四十位大学几何教研室同人共聚一堂，就我国大学几何学教学的革新工作，多次商讨，大家都觉得在大学的数学课程中，设置一门精简而且采用近代观点的“古典几何学”是十分必要的．我受大家的委托，试编这样的一本《古典几何学》，以供我国某些大学及早试教之用．古典几何学的历史悠久、题材丰富，如欧氏几何、解析几何、射影几何、非欧几何等在知识上、思想上和方法论上都各有精到的建树与特色，而且也都是整个近代数学一个不可缺少的基础与活力泉源．我觉得在大学里的一门“古典几何学”课程，其要点在于突出它们的几何思想和在方法论上的创见，而且应该采取近代观点，对于各种古典几何体系进行比较分析与全局探讨．基于上述想法，我于一九八三年在国内工作访问期间编写了本书的初稿，并由复旦大学铅印成讲义，王申怀、潘养廉两同志曾以此为教材分别在北京大学和复旦大学数学系多次试教过．现在出版的这本书就是在这样的基础上，经过重新修改并增补了一些习题而写成的．虽然如此，书中粗糙、错漏之处，例题、习题之短缺仍在所难免，一切有赖于试教中由师生多所改错指正、逐步完善它吧．

项　武　义

一九八五年八月

目　录

第一章　实验几何学

任何一门科学都离不开实验，都不外乎实事求是地去认识和反映现实世界的本质并且用来解决问题. 几何学这门源远流长、多彩多姿的学科在它的胚胎时期就与人类的生产实践活动有着密切的联系，这一段时期的几何学我们称为**实验几何学**. 它的中心课题是：通过对现实世界（空间）的各种物体（几何图形）的形状、性质以及它们之间的相互关系（位置）的实验观察、分析综合，确立空间的基本概念，把握空间的基本性质. 它也是后面几章要讲到的推理几何学中用来推理、研究其他空间性质和解决各种几何问题的依据与基础. 从方法论的观点来看，实验几何学就是从一些直觉直观的现象中通过实验分析发现事物内在的本质和联系，发现几何问题，提炼出几何思想，从而去解决问题. 这种治学方法在几何学（乃至各种科学）发展的不同层次上都有着其重要的作用，即使在人类文化高度发达的今天依然是科学研究中一个不可缺少的法宝.

由于本章的许多知识都是读者在初等几何中熟知的，因此我们的叙述并不追求通常教科书式的系统和顺序，即使对某些概念、定义作比较详细的研讨也只是为了遵循历史的线索，剖析实验几何学方法论上的特点和意义.

第一节　点、直线与平面的相互关系

点、直线与平面是空间中最简单、最常见的基本图象，它们

可以说是空间各种图象的组成单元. 本节将对它们的直观内容和相互关联加以分析，从而确定几何学中点、直线、平面这三个基本概念，并且总结关于点、直线、平面之间相互关联的空间基本性质.

一、点与直线

现实空间中万物都有各自的位置，各得其所. “位置”是空间中最原始也是最基本的单元，空间乃是所有位置的总和。在几何学中，我们换一种说法：一个位置就是一个“点”. 所以从概念上来说：点就是位置的抽象化，而空间就是点的集合. 例如在一张地图上，我们以一个个小黑点来标记各地的位置。

再者，在日常生活中，我们经常要从一个地方走到另一个地方；抽象地说，就是一个“动点”从一个点的位置移动到另一个点的位置. 这个动点所经过的路径叫做它的轨迹. 所以，空间中第二个最原始的基本概念就要算“**路径**”了. 在几何学中，我们用一条“线段”(通常是曲线段)来表示路径. 如下图所示，设 P、Q 两点分别表示空间相异的两个点；则连结于 P、Q 两点之间的各种可能路径有很多很多：

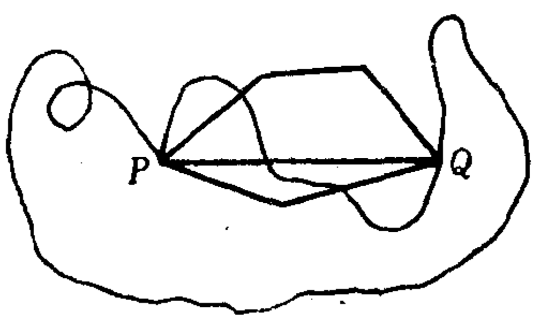

图 1-1

话虽如此，在实际生活中，我们都希望走“捷径”，也就是走最短的路径. 经验告诉我们这条捷径就是连接这两点 P、Q 的“直线段”. 所以，直线段又是路径中最简单常用、最基本的一种. 光线的存在明显地启示了连接相异两点 P、Q 的直线段的唯一存在性.

连结 P、Q 两点的直线段用 PQ 表示。设 S 为其上任意一点，PQ 可以看成是直线段 PS (或 QS) 离开 P (或 Q) 点延伸

的结果(图 1-2). 经验告诉我们,这种延伸可以无休止地继续,宇宙之大,永无尽头. 也就是说,对于空间相异两点 P、Q,不但有一条唯一的最短路径

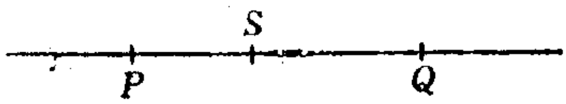

图 1-2

——"直线段 PQ",而且也唯一地确定了一条可以向两端无限延伸的整条"直线". 这就是现实空间的一个基本性质.

基本性质 1 空间相异两点唯一决定一条直线,直线可以无限延伸.

在描述现实世界的各种不同的空间模式中,两个相异点之间的最短路径的存在唯一性仍是需要考虑的最基本问题之一. 这个时候的最短路径叫做"**测地线**". 例如,在二维球面 S^2 这个空间模式中,两点之间的最短路径就是连结这两点的大圆劣弧. 关于这一点,我们将在第六章中详述.

二、长度的度量

直线段 PQ 是连接空间中两相异点 P、Q 的所有路径之最短者,换言之,一个人以同样的速度沿不同的路径从 P 走到 Q 所花的时间以沿直线段 PQ 走所花的时间为最少. 所以,一条路径的长和短可以用数量来刻划,这个数量就是"**长度**".

比较两地的远近,自然只要比较它们相应的直线段长度. 所以比较路径长短中最基本者是比较直线段的长度. 而这种比较可以简便地用一条直线段去"量"另一条直线段的方法来实现. 当许多条线段要加以比较时,方便的办法是人为地选定一个线段作为"单位长",例如"米"就是现今世界各国所约定通用的单位长度. 然后,要度量一条直线段的长度也就是去求出它和单位长之间的"比值". 例如比值是 365, 则称该线段的长度为 365 米.

长度是一个常用的基本几何量．直线段 PQ 的长度叫做 P、Q 两点之间的**距离**，常记为 $|PQ|$．显然，它具有可加性，即若 S 点在直线段 PQ 上，则成立 $|PS|+|SQ|=|PQ|$．

在任何实际的度量过程中，人们总是在规定"误差"的允许范围内求得一条直线段的长度的，其意义并不是绝对准确到没有一点误差（这是办不到的）；而是相对地把误差控制在某种足够小的范围（叫做精确度）之内．所以说，从实用的观点来看长度的度量，则其要点在于把所要度量的长度量得足够准确．

通常我们习惯于用十进位的小数来表达所量得的长度，例如 1.23 米，它精确到小数点后第二位，即上述长度的度量准确到误差小于 10^{-2} 米的范围之内．

于是在实用上，任何两条线段的长度之间的比值都将是一个分数！远在公元前五、六世纪，古希腊的毕达哥拉斯学派就以此作为几何学的一个基本假设加以接受，从而发展了推理几何学．

然而，从理论的观点来看，这个结论依然是值得怀疑的，也就是说，有下述长度度量的基本问题：任给两条直线段 a、b，它们的长度的比值是否总是一个分数？换句话说，对于任何给定的两个线段 a、b，是否总是有一个适当的直线段 u，使得 a、b 恰好都是 u 的整数倍（亦即 $a=mu$, $b=nu$, $a:b=m/n$）？这种直线段 u，如果存在的话，就叫做 a、b 的一个"公尺度"，而 a、b 叫做"可公度"的．上述基本问题的另一个说法是，是否任何两个线段都是可公度的？

这个问题，在人类文明高度发达的今天看来是十分自然的，在人类理性文明的早期却是了不起的想法．它可以说是人类文明史上第一个纯理论性的问题：因为它只有在绝对没有误差的设想之下才有意义，而任何实际的度量（由于总有误差）都不能

得出否定的结论，因此它也是一个只能用纯理论的方法解决的问题.

在毕达哥拉斯死后不久，其弟子希伯斯证明了下述数学史上的重大发现：

一个正五边形的边长和对角线长之间的比值不可能是个分数！而且一个正四方形的边长和对角线长之间的比值也不可能是个分数！

我们将在第二章中再详细说明这一段重要的发现史并且讨论它在整个数学发展史上的深远意义.

三、直线与平面

在各种线段中，以**直线段**为最简单也最基本. 同样地，空间在二维层次(各种“面”)上最简单最基本的图形就是“**平面**”. 它的直观形象是常见的，例如一面墙壁，一块黑板，一张桌面都是平面的一部分. 检验一个面是否为平面的常用方法是：“拿一根直尺在所要检验的面上各处比放，看一看是否总可以密合？”换言之，平面就是一个到处平直的面. 把上述常用的检验法加以抽象化，那么平面就是具有下列基本性质的二维图形：

基本性质 2 当平面包含相异两点 P、Q 时，则它必包含整条直线 PQ.

由于直线无限可延伸，平面自然是可以向四方无限延长的. 常见和常用的“平面”都是上述几何学的平面的一部分，亦即是上述平面的局部的具体化.

基本性质 3 不共线三点定一平面.

从经验我们知道基本性质 3 是真的，下面让我们来具体地描述一下空间给定的不共线三点怎样唯一决定一个平面：

设 A、B、C 是空间中不共线（即不在同一直线上）的三点.

如图 1-3 所示，连结直线 AB、BC、CA 就得出三条相异的直线.

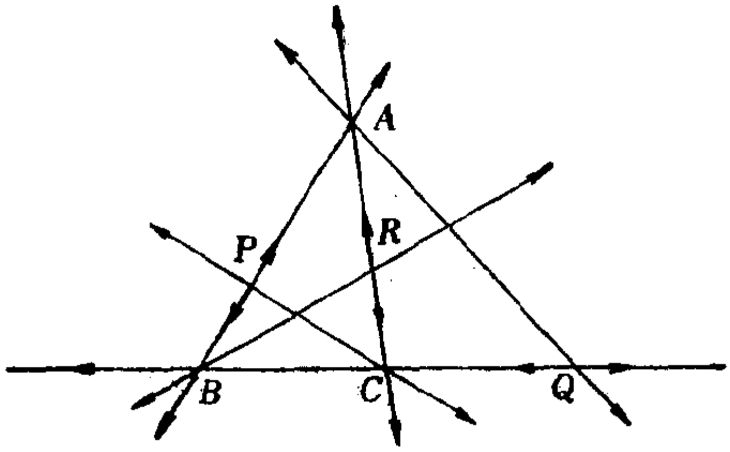

图 1-3

设 P、Q、R 分别是直线 AB、BC、CA 上的任意点. 连结 C、P；A、Q；B、R，即得直线 CP、AQ、BR. 再设想 P、Q、R 分别在直线 AB、BC、CA 上滑动，则上述三条直线分别绕着 C、A、B 点横扫地编织出一个平面. 这就说明了如何由空间中任给的不共线三点 A、B、C 出发，用二点定一直线的基本作图法作出三系无穷多的直线系，它们编织出一个同时包含 A、B、C 的平面. 反之，设 π 是一个同时包含 A、B、C 的平面，则不难由基本性质 2 看出 π 一定也完全包含上述作图中所得到的三条直线，而且可以由它们编织而成. 这也就描述了同时包含 A、B、C 三点的平面的唯一存在性，即空间不共线三点定一平面.

基本性质 4　空间中任何两个相交的(相异)平面 π_1、π_2，其交界是一条直线.

基本性质 4 在直观上是明显的，它说明空间中两个相异的平面若含有一个公共点则必含有一条公共直线.

一张纸(平面)沿着一条折痕(直线)用刀裁开就分成两部分，一条绳子(直线)用刀割断(割口是一个点)就分成两段，这些

实例反映了点、直线、平面的另一个关联性质，即

基本性质 5 (*a*) 一条直线 l 上的一点 P 把它分成两侧，其中任一侧叫做以 P 为起点的**射线**. (*b*) 一个平面 π 上的一条直线 l 把它分成两侧，每一侧叫做一个**半平面**. (*c*) 空间中的一个平面 π 把全空间分成两侧，每一侧叫做一个**半空间**.

综上所述，点、直线、平面是空间中最简单最基本的几何形象，也称基本对象. 由它们可以构成空间中较复杂的几何图形，例如各种直线形、多面体等等，用它们又可研究许多复杂图形的性质，例如用割线去研究曲线，用切平面去研究曲面等等. 所以，它们在几何学中是很重要而又基本的概念. 这些基本对象是从无数直观实例中抽象出来的基本概念，是一些立足于直观理解的原始概念；而且它们是相互关联的，也就是说，它们要受到被无数直观实例所验明的一些关联性质的制约，其中最本质的就是上面例举的基本性质 1—5. 这些性质反映了空间基本性质的一个重要方面. 这些性质再加上后面各节中叙述的其他基本性质的确立，就使人们得以用推理论证的方法替代实验验证的手段，从而开始从实验几何学迈向推理几何学.

第二节　方向、角度与平行

一、方向、角度与旋转

设想你要从一片平坦的操场(平面)上的 A 点走到 B 点(如图 1-4). 经验告诉你最短路径(直线段)的走法是："由 A 点向 B 点一直走去". 换句话说，先看准了由 A 射向 B 的"方向"，然后保持方向不变一直走. 这里，方向是十分重要的. 所谓"失之毫厘、差之千里"正是概括了方向的重要性.

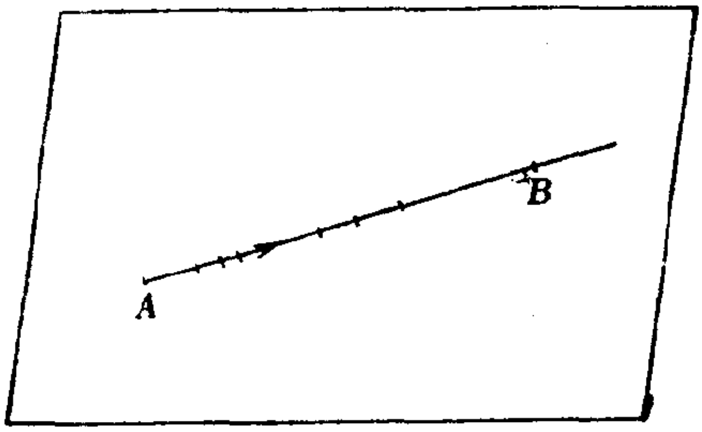

图 1-4

让我们分析一下上述说法的几何意义. A、B 两点决定了一条以 A 为起点的射线(见节 1),用$\overrightarrow{AB}$表示,如果用射线 $\overrightarrow{AB}$ 表示所取的方向,那么"保持方向不变一直走"的意思就是说你的每一步都要落在射线$\overrightarrow{AB}$ 上,所以从 A 点出发的一条射线$\overrightarrow{AB}$就表示了 A 点处的一个方向,若 C 落在射线 $\overrightarrow{AB}$ 上,则射线$\overrightarrow{AC}$表示的方向与$\overrightarrow{AB}$表示的方向相同. 反之,给定 A 点处的一个方向,就唯一决定了从 A 出发的表示这个方向的一条射线. 简言之,由一点出发的射线与方向是一一对应的. 所以在几何学中,我们以一条射线来表示一个方向.

一条以 A 点为起点的射线,可以由起始的任何一小段所唯一确定(因为整条射线只是那一小段沿着那个方向的无限延伸). 所以自 A 点出发的一个方向,其实可以用它所对应的那条射线的开头的任何一小段来表达. 这就表明:"方向"在本质上是一个"局部性"的概念。

平面 π 中以同一点 A 出发的两条射线 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 为界的区域(如图 1-5 所示)叫做一个**角**, A 是它的顶点, $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 是它的两条角边,常记做 $\angle BAC$, 或简记为 $\angle A$. 它可以被想象成射线$\overrightarrow{AB}$沿着平面 π 绕 A 点旋转到射线 $\overrightarrow{AC}$ 的位置所扫过的区域, 这个区域叫做角区或角的内部。所以 $\angle BAC$ 的直

观内含是很明确的，它刻划了射线 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 所表示的两个方向之间的差异。

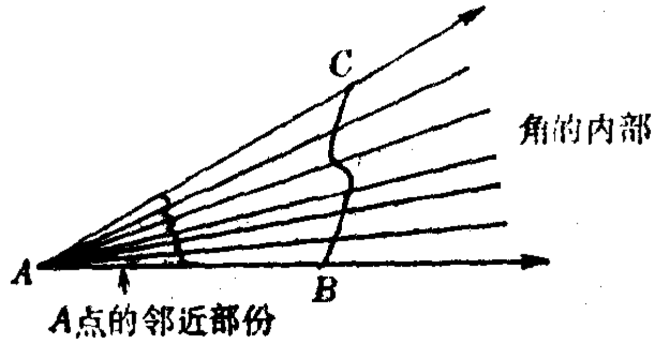

图 1-5

因为方向是一种局部性质，所以角也是一种局部性质．换句话说，一个以 A 为顶点的角已经由它在 A 点邻近的那一小部分完全确定，如图 1-5 所示．

再者，角反映了两个方向的差异，那么又怎样来比较这种差异的大小？如图 1-6 所示，$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 分别是以 A 和 A' 为顶点的两个角．我们如何去比较这两者之间的大小呢？由经验熟知的方法是：将 $\angle B'A'C'$ 移动（例如用一张透明的塑胶片将 $\angle B'A'C'$ 复印下来，然后移动塑胶片）到 $\angle BAC$ 上，使得顶点 A' 和 A 相重合，成为同样大小的角 $\angle B''AC''$，然后绕 A 点适当旋转，使 $\overrightarrow{AB''}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 重合，这时两者之间有下列三种可能性，即：

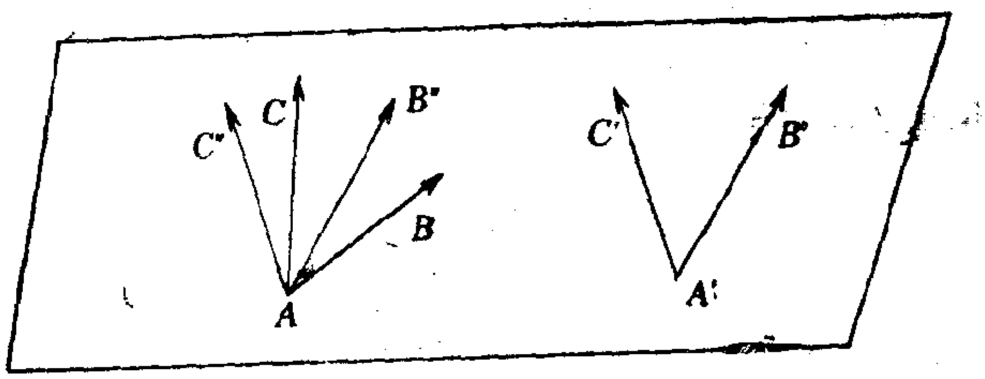

图 1-6

1) $\overrightarrow{AC''}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 重合，则两角相等；

2) $\overrightarrow{AC''}$ 落在 $\angle BAC$ 的内部，则 $\angle BAC>\angle B'A'C'$；