高等学校教学用书

数学物理方程

(供物理类用)

王永成 编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

数学物理方程

（供物理类用）

王永成 编

责任编辑 李桂福

●

北京师范大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

河北省大厂县印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：11.875 字数 290千

1991年4月第1版 1991年4月第1次印刷

印数：1—2 200

ISBN7-303-01069-6/O·140

定价：3.90 元

内 容 简 介

数学物理方程是理科物理类专业及工科某些专业的基础课．本书共五章，即数学物理方程的导出和定解问题；分离变量法；勒让德多项式和球函数；贝塞耳函数；付里叶变换与初值问题．本书的内容是根据有关专业的需要确定的，全书以本征值问题为核心，讲解详尽贴切，例题丰富，学习要求明确，每一节附有思考题，每一章有小结及自我检查题．由于采取了这样一系列措施，使得本书更符合有关专业的教学需要，更便于读者自学．凡具有一定高等数学及普通物理基础的读者，都可独立地学好本书．

本书特别适于做师范院校及成人教育的教材，适于读者自学．也可供有关专业的教师与学生参考．

前　言

本书是编者为北京师范大学物理类专业函授本科生及部分在校本科生所编讲义的基础上，参考先期出版的有关著作，修改而成的。

为了满足教学需要，为了便于初学者自学，本书采取了如下一些措旋。

1．根据有关专业对本书的要求确定内容。

本书删去了那些与有关专业后继课关系不大的内容。而且讲述方式、学习要求等也都是考虑到后继课的需要确定的。

2．全书以本征值问题为核心。

与高等数学、理论物理等课程相比，数学物理方程系统性不够强，重点不够突出，没有明确的核心。为了克服这一缺点，本书以本征值问题为核心组织全部内容。这样做是可能的，因为本书的重点内容第二至第四章都与本征值问题密切相关。这样做也是必要的，因为，本征值、本征函数、按本征函数展开等知识有着广泛应用，只有牢固地掌握有关知识才能学好以后的课程。

3．讲解详细贴切。

本书不仅仅讲述处理问题的方法，而且对于其中的道理做了尽可能详细贴切的解释，对于那些较深入的理论问题也做了适当交待，这就使得任何具有一定高等数学及普通物理基础的读者，不必借助其它参考书都可以自己看懂本书，独立完成各项学习要求。

4．学习要求适当。

书中每一部分都提出了明确的适当的学习要求，读者根据这些要求去学习，就可以抓住重点，而不致于陷于枝节问题中去。

5．例题、作业题、自我检查题互相配合。

本书例题丰富。每一节的作业题及每一章的自我检查题中所

涉及的题目类型、解题技巧，例题中都包括了，因此，只要掌握了例题，读者自然可独立地完成作业，独立完成自我检查题。本书的作业题都是一些灵活性不大的题目，体现了对读者的基本要求。在我们的教学过程中，要求学生独立完成全部作业题。独立完成全部作业题是学好本书的基本保证。

书中还列出了一些补充练习题。这些题目并不比作业题难解，只是为有兴趣的读者提供更多的练习机会。

为了更好地帮助读者掌握所学知识，每一节附有思考题，每一章有小结。每一章的小结就是全章的提纲，读者可通过小结掌握一章的线索与重点。

我们的教学实践表明，上述措施是行之有效的，现在我们把本书奉献给读者，希望读者从中受益。

本书的习题答案是由任翠娥老师（一、二章）与陈湘湘老师（三、四、五章）提供的，最后由任翠娥老师整理定稿。在此向两位老师表示感谢。

本书编写过程中，编者曾就某些问题求教于喀兴林教授，得到他热心指导，在这里向他表示衷心谢意。在多年教学实践过程中，唐伟国、陈湘湘、任翠娥、田晓岑、曹文湘、田强等老师及许多同学对原讲义提出了很多修改意见与建议，在这里一并向他们表示感谢。

本书的出版得到了北师大校方、物理系及出版社有关负责同志的关怀与支持，仅向他们表示感谢。

由于编者水平所限，本书难免存在缺陷甚至谬误，恳请读者、同行及专家们批评指正。

编　者

1990年元月

J41/27/15

目　录

第一章　数学物理方程的导出和定解问题……………………（1）
§1　振动方程……………………（1）
§2　热传导方程……………………（12）
§3　拉普拉斯方程……………………（20）
§4　二阶线性齐次偏微分方程和迭加原理……………………（22）
§5　定解条件……………………（24）
§6　δ函数及其在定解问题中的应用……………………（37）
§7　数学物理方程的分类……………………（52）
本章内容小结……………………（63）
自我检查题……………………（68）
第二章　分离变量法……………………（70）
§1　傅里叶级数……………………（70）
§2　齐次方程齐次边条件的定解问题……………………（86）
§3　齐次方程非齐次边条件的定解问题……………………（117）
§4　本征函数系展开法……………………（127）
§5　圆形域内的调和函数……………………（142）
§6　斯特姆-刘维本征值问题……………………（158）
本章内容小结……………………（182）
自我检查题……………………（189）
第三章　勒让德多项式和球函数……………………（191）
§1　勒让德方程和连带勒让德方程……………………（191）
§2　勒让德多项式……………………（201）
§3　勒让德多项式的性质……………………（217）
§4　勒让德多项式的应用……………………（233）
§5　连带勒让德函数与球函数……………………（247）
本章内容小结……………………（265）
自我检查题……………………（272）
第四章　贝塞耳函数……………………（273）
§1　贝塞耳方程……………………（273）

§ 2　贝塞耳函数 …………………………………………………… (277)
§ 3　贝塞耳函数的性质 ……………………………………………… (287)
§ 4　整数阶贝塞耳方程的本征值问题 ……………………………… (293)
本章内容小结 ………………………………………………………… (309)
自我检查题 …………………………………………………………… (312)
第五章　傅里叶变换与初值问题……………………………………… (313)
§ 1　傅里叶积分 ……………………………………………………… (313)
§ 2　傅里叶变换 ……………………………………………………… (325)
§ 3　用傅里叶变换法解初值问题 …………………………………… (337)
本章内容小结 ………………………………………………………… (352)
自我检查题 …………………………………………………………… (356)
作业、补充练习题及自我检查题答案………………………………… (357)

第一章 数学物理方程的导出和定解问题

我们这里所讲的数学物理方程指的是从物理问题导出的二阶线性偏微分方程．从广义讲，数学物理方程还包括高阶线性偏微分方程，非线性偏微分方程，积分方程……，本书将不涉及这些内容．二阶线性偏微分方程包括振动方程（或称波动方程）；热传导方程（或称扩散方程）及拉普拉斯方程三种类型，这些方程在物理学中及其它自然科学、工程技术领域中有着广泛应用，是我们进一步学习不可缺少的数学基础．

完整地处理一个数学物理方程问题包括三个方面，（1）把物理问题化为数学上的定解问题；（2）解定解问题；（3）对所得到的解作物理解释．其中，第（2）方面是本书的中心内容，除第一章外，其它各章都是围绕这个中心的．第（3）方面不是本书的重点，我们将只对个别解给予物理解释．第（1）方面就是本章要讨论的内容．

第一章前5节都是围绕定解问题的．这部分涉及知识面较宽，为了使读者易于看懂，我们不得不做较详细的解释，因此显得内容多一些．但只要认真学习是不难看懂的．并且这部分的学习要求很基本，希望读者紧紧根据每节的学习要求学习，注意不要陷入枝节问题中去．第6节介绍δ函数及其在定解问题中的应用，由于δ函数应用广泛，所以有关知识要很好掌握．第7节介绍数理方程分类，这一节帮助我们理解三类数理方程在数学上的地位，而且帮助我们复习偏导数运算，掌握这一节并不难．

§1 振动方程

本节以弦的横向振动和杆的纵向振动来建立振动方程．

一、弦的横向振动

1．物理问题

问题：一条长为 l 质量密度为 ρ 的柔软弦，当把它绷紧并且两端固定时，求其横向自由微小振动的方程．

下边对这个问题所涉及的概念做一些解释．

质量密度ρ：单位长度的弦所具有的质量．

柔软弦，这意味着当弦在放松的情况下，我们可将其弯曲成任何形状它都静止，即弦没有抵抗弯曲的力．但弦有弹性，在绷紧的情况下，弦中相邻部分相互有拉力，这种相互之间的拉力称张力，张力的方向沿弦的切线方向．

横向：垂直于弦的方向．

自由：没有外力的作用．通常，自由也意味着不考虑弦本身的重力．

微小：振动的幅度小，并且振动时弦的切线与弦处于平衡时所成的直线之间的夹角小．微小的更确切含意，请看第 3 部分近似处理．

2．建立坐标系

长为 l 绷紧的两端固的弦，当不振动时，是一条直线段，称弦处于平衡状态．弦处于平衡状态时，弦上各点所处的位置称为平衡位置．弦在振动过程中，弦上各点围绕平衡位置来回振动．我们以通过这条弦平衡位置的直线为x轴，取弦的左端为坐标零点，

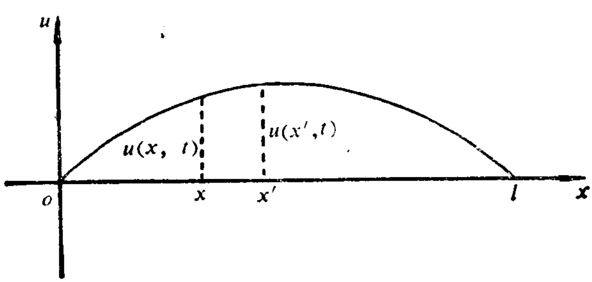

图 1-1

右端坐标为l(参见图1-1)。这样弦上任意一点都有一个坐标值。

设弦上某点的坐标为x，当弦振动时，在某时刻t，点x沿垂直于x轴方向（即横向）位移为$u(x, t)$，则我们可用垂直于x轴的u轴标示横向位移（参见图1-1）。于是在弦的振动平面上建立了xou坐标系。

所谓求弦的振动方程就是求$u(x, t)$所满足的方程。

3．近似处理

设弦振动过程中，在某时刻t，弦上一点x的横向位移为$u(x, t)$。通过(x, u)点作弦的切线，设切线与x轴夹角为α，称为倾角（参见图1-2）。

根据前述知，弦振动是微小的条件意味着$u(x, t)$很小，倾角α也很小。

由于α很小，α的任意函数作泰勒展开时α^2以上的项可以略去，只保留常数项及α的一次项，于是有

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\cdots\approx\alpha \tag{1.1}$$

$$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\cdots\approx 1 \tag{1.2}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\alpha+\frac{\alpha^3}{3}+\frac{2}{15}\alpha^5+\cdots\approx\alpha \tag{1.3}$$

根据导数的几何意义，我们有（参见图1-2）

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{tg}\,\alpha\approx\alpha\approx\sin\alpha \tag{1.4}$$

在上述小角度近似下，我们有如下两个结论。

（1）弦的伸长可以略去。

取弦上任意相邻二点x与$x+\mathrm{d}x$（参见图1-3）。x与$x+\mathrm{d}x$位移之差为$\mathrm{d}u=u(x+\mathrm{d}x, t)-u(x, t)$。设$\mathrm{d}s$为$x$与$x+\mathrm{d}x$之间的弦长，由图1-2易知，当$\mathrm{d}x$充分小时，$\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}x$与$\mathrm{d}u$三者构成直角三角形，考虑到(1.4)式，于是我们有

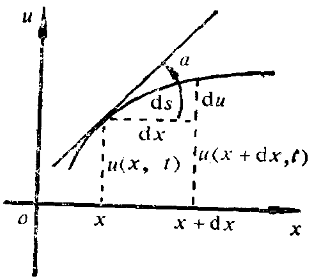

图 1-2

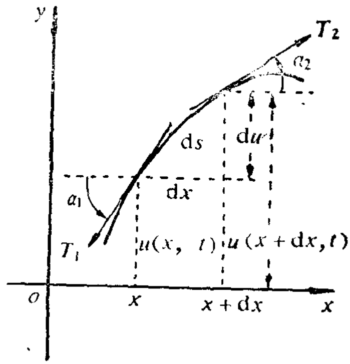

图 1-3

$$
\begin{aligned}
ds &= [(dx)^2+(du)^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= dx\left[1+\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= dx\,[1+(\mathrm{tg}\alpha)^2]^{\frac{1}{2}} \\
&\approx dx[1+\alpha^2]^{\frac{1}{2}} \\
&= dx\left[1+\frac{1}{2}\alpha^2+\cdots\right] \\
&\approx dx
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

（1.5）式表明，在微小振动条件下，弦长 ds 与处于平衡时的弦长 dx 近似相等，即振动时弦的长度变化可以忽略.

（2）张力是常数.

考虑一小段弦 dx（参见图1-3）. 由于弦处于自由振动状态，除了弦中的张力之外没有其它力的作用，所以对于 ds 来讲，外力就是 ds 的相邻部分对它作用的张力 T_1 与 T_2. 设沿 x 方向的水平力为正，反向为负，则 dx 所受两个张力的水平分力为 $-T_1\cos\alpha_1$ 与 $T_2\cos\alpha_2$, ds 在水平方向所受合力为 $T_2\sin\alpha_2-T_1\sin\alpha_1$. 由于 ds 只作横向振动，而没有沿水平方向的运动，所以 ds 在水平方向所受

合力必等于零，即

$$T_2\cos\alpha_2-T_1\cos\alpha_1=0$$

在小角度近似下我们有 $\cos\alpha_1\approx\cos\alpha_2\approx1$，将这个关系代入上式得：

$$T_1=T_2=T \tag{1.6}$$

（1.6）式表明，在任何时候 ds 两端张力的大小相等。又由于ds在弦中的位置是任意的，所以弦中任何时刻任意点的张力都等于确定值T，即弦中的张力是常数。

4．弦的横向自由振动方程

考查两端坐标为（x, $x+dx$）一小段弦的横向运动（参见图1-3）. 设某时刻这小段弦的横向位移为u，横向加速度为 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$。这个加速度是由什么力产生的？由前边分析知，这小段弦只受到弦力T_1与T_2 的作用。设向上的横向力为正，向下的横向力为负，则张力T_1与T_2的横向分力分别为$-T_1\sin\alpha_1$与$T_2\sin\alpha_2$。考虑到弦中张力为常数T，于是这小段弦在横向所受合力为

$$T_2\sin\alpha_2-T_1\sin\alpha_1=T(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)$$

这小段弦的质量为 ρdx，于是根据牛顿（Newton）第二定律我们有

$$T(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)=\rho dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.7}$$

考虑到（1.4）式，（1.7）式左边可写为

$$\begin{aligned}T(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)&\approx T(\mathrm{tg}\alpha_2-\mathrm{tg}\alpha_1)\\&=T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+dx}-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x}\right)\\&=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\end{aligned} \tag{1.8}$$

其中最后一步利用了微分定义。将（1.8）式代入（1.7）中得：

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx=\rho dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.9}$$

$u_{tt}=$

$$\frac{T}{\rho}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.10}$$

其中

$$a=\sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{1.11}$$

如果把偏导数写成$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=u_{tt}$， $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u_{xx}$，则方程（1.8）可简写为

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \tag{1.12}$$

方程（1.10）或（1.12）就是弦的横向自由振动方程。这个方程给出了，一条弦做横向自由振动时，其横向位移随时间空间变化的普遍规律。

这里需指出，弦振动问题的通常提法是：

一条长为 l 的弦两端固定，其自由振动方程为$u_{tt}=a^2u_{xx}$。其中弦是柔软的、绷紧的、微小的，横振动等条件不提，认为是自明的。并且把张力T与质量密度 ρ 看成是已知常数，即认为 a 是已知常数。

5．当弦受到外力作用时的振动方程

除弦的张力外，设单位长度的弦还受到横向外力 $F(x, t)$ 的作用．于是，坐标为$(x, x+\mathrm{d}x)$小段弦除受两端的张力外，还受到横向外力 $F(x, t)\mathrm{d}x$。考虑到这个外力，根据牛顿第二定律得到的（1.7）式就应改写成

$$T(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)+F(x, t)\mathrm{d}x=\rho\mathrm{d}x\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.13}$$

根据由（1.7）推导出（1.9）式的过程，我们可完全类似地由（1.13）式推导出下式

$$T\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \mathrm{d}x+F(x, t)\mathrm{d}x=\rho\mathrm{d}x\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{F(x, t)}{\rho} \tag{1.14}$$

其中 a 是由（1.11）式定义的．令

$$f(x, t)=\frac{F(x, t)}{\rho} \tag{1.15}$$

并引入偏导数的简写符号，方程（1.14）可写为

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x, t) \tag{1.16}$$

方程（1.16）就是受到外力作用时弦的振动方程．

二、杆的纵振动方程

1．物理问题

问题：一根长为l质量密度为ρ的均匀细杆，求其自由微小纵振动方程．

下边对这个问题所涉及的概念做一些解释．

质量密度ρ：杆的单位体积所具有的质量．

均匀杆：杆由一种材料制成，处处密度相同材料性质相同．并且杆的任一横截面形状相同，面积相等．

杆的纵振动：一根杆，当其中任一小段有纵向运动时，必使与其两端相连的邻段受到压缩或拉伸．邻段的压缩或拉伸又使它们自己的邻段受压缩或拉伸……，这样，任意一小段的纵向运动就会传播到整根杆．这就是杆的纵振动．

自由振动：杆在振动过程中不受任何外力的作用，称自由振动。

微小振动：即振幅小．

2．建立坐标系

把长为 l 的杆放在坐标轴x上，一端放在坐标原点，另一端放在 l 点．当杆静止时，杆上任意一点的坐标 x 就是这一点的平衡位置，而且我们用平衡位置坐标来标记杆上的点．

杆在振动过程中，杆上任意一点 x 就围绕其平衡位置来回振动．在时刻 t，设点 x 相对平衡位置的位移为 u（参见图1-4），则 u 为 x 与 t 的函数$u(x, t)$．

所谓求杆的纵振动方程就是$u(x, t)$所满足的方程．

3．近似处理

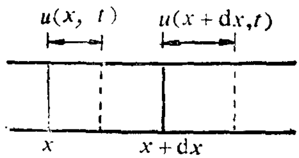

图 1-4

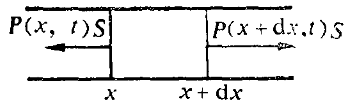

图 1-5

由于我们讨论杆的微小振动，是在杆的弹性限度之内，所以可应用胡克（Hooke）定律

$$P = Y\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.17}$$

式中P为应力，Y为杨氏（Young）弹性模量。

4．杆的纵向自由振动方程

取坐标为（x, $x+\mathrm{d}x$）的一小段杆$\mathrm{d}x$（参见图1-5），把这小段杆做为一个整体，研究它的运动。设这小段杆的纵向位移为u，加速度为$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$。我们取$u$与$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$的正向沿$x$的正方向。这个加速度是如何产生的？由于杆不受外力作用，所以$\mathrm{d}x$小段杆只受到杆的相邻部分的应力$P(x, t)$的作用。设杆的横截面积为S，则$\mathrm{d}x$小段杆在x端受力为$P(x, t)S$，在$x+\mathrm{d}x$端受力为$P(x+\mathrm{d}x, t)S$。我们注意到应力的正向为外法线方向，因此$P(x, t)$的正向为负x方向，$P(x+\mathrm{d}x, t)$的正向为正x方向（参见图1-5）。由于加速度的正向为正x方向，所以$\mathrm{d}x$小段杆所受合力的正向也应取为正x方向。于是$\mathrm{d}x$小段杆所受合力为

$$P(x+\mathrm{d}x, t)S - P(x, t)S \tag{1.18}$$

$\mathrm{d}x$小段杆的质量为$\rho S\mathrm{d}x$，根据牛顿第二定律有：

$$[P(x+\mathrm{d}x, t) - P(x, t)]S = \rho S\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.19}$$

将（1.17）代入（1.19）得：

$$\left[\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right]YS = \rho S\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.20}$$

根据微分定义，可把（1.20）式写为

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} YS\mathrm{d}x=\rho S\mathrm{d}x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{1.21}$$

两边同除$PS\mathrm{d}x$得：

$$\frac{Y}{\rho}\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \tag{1.22}$$

令

$$a^2=\frac{Y}{\rho} \tag{1.23}$$

则（1.22）式可写为

$$u_{tt}=a^2 u_{xx} \tag{1.24}$$

方程（1.24）就是杆的纵向自由振动方程。我们看到，杆振动方程与弦振动方程（1.10）或（1.12）在形式上完全相同。

杆振动问题的通常提法是：

一条长为 l 的均匀杆，其自由振动方程为$u_{tt}=a^2u_{xx}$。其中，质量密度是均匀的，微小纵振动等一般不再提，而认为是自明的。

5．当杆受到外力作用时的振动方程

除杆的应力外，设单位长度的杆还受到纵向外力 $F(x, t)$ 的作用。于是，坐标为$(x, x+\mathrm{d}x)$小段杆除受两端的应力外，还受到纵向外力 $F(x,t)\mathrm{d}x$。考虑到这个外力，根据牛顿第二定律得到的（1.19）式就应改写为

$$[P(x+\mathrm{d}x,t)-P(x,t)]S+\mathrm{d}xF(x,t)=\rho S\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.25}$$

根据由（1.19）推导出（1.22）的过程，我们可完全类似地由（1.25）推导出下式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{Y}{\rho}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{F(x,t)}{S\rho} \tag{1.26}$$

令

$$f(x,t)=\frac{F(x,t)}{S\rho} \tag{1.27}$$

则（1.26）可简写为