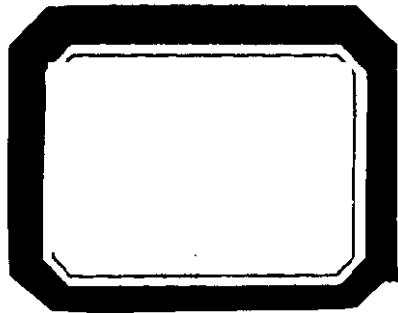


# 近代量子光学导论

彭金生 李高翔 著



科学出版社



# 近代量子光学导论

彭金生 李高翔 著

科学出版社

1996

(京)新登字 092 号

## 内 容 简 介

本书以激光场和原子相互作用系统为中心,根据量子力学、量子电动力学以及量子统计理论,对近代量子光学的主要内容,特别是辐射场与原子行为的量子特性作了专门的论述。全书共分三篇。第一篇论述光与原子相互作用理论,第二篇讨论光场的量子特性,第三篇研究激光场作用下原子行为的量子特性。此书不仅理论体系独特,而且内容新颖,概述了近代量子光学发展的主要内容。

本书结合了作者多年来从事量子光学教学的体会,以及在相应研究方面的一系列成果,论述简明,有利于读者学习。

本书可作为高等学校物理专业、光学专业高年级学生和研究生教学用书,也可作为教师和研究工作者的参考用书。

### 图书在版编目(CIP)数据

近代量子光学导论/彭金生,李高翔著. —北京:科学出版社,1996

ISBN 7-03-005016-9

I. 近… I. ①彭… ②李… II. 量子光学 IV. O431

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 16162 号

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

北京科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1996 年 10 月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1996 年 10 月第一次印刷 印张:18

印数:11 300 字数:470 000

定 价: 36.00 元

## 前 言

量子光学是近代物理学中一个十分重要的分支. 众所周知, 量子光学作为一门学科应该说是近 30 年的事. 虽然, 光的量子理论的诞生要归功于本世纪初期普朗克的量子理论和爱因斯坦的光的量子理论, 但是应用量子理论全面而系统地研究光的量子特性以及光和物质(原子、分子等)的相互作用效应, 并能从实验上加以探讨则是 60 年代产生激光器以后的事. 许多光学新效应由于有了激光而能够从量子层次上揭示出来, 形成量子光学研究的不同课题, 而且随着实验技术的提高, 新的光学效应将被进一步揭示出来, 从而不断充实量子光学的内容, 促进量子光学理论的进一步深化和完善, 并不断拓展它的内涵.

全面探讨激光场和原子的相互作用效应是当代量子光学研究的中心内容. 在原子(单原子或多原子系统)和激光场(单模光场或多模光场)相互作用系统中, 辐射场和原子都将具有量子特性, 而这些特性在经典物理范畴内是不能揭示出来的. 近代量子光学的研究表明, 应用量子理论, 并通过近代光学实验手段, 人们能够从量子层次上揭示辐射场和原子行为的许多量子特性. 它们表明量子光学理论的精确性, 并显示其重要的实际价值和广阔的应用前景.

作者认为, 近代量子光学理论的发展表明, 有必要以激光场与原子相互作用系统的量子特性为中心, 对量子光学的基本内容作一系统而专门的论述, 因此, 作者根据自己在研究生的“量子光学”课程教学中的体会, 以及近期的一系列研究成果, 并结合当代量子光学的一些前沿成果, 以新颖的体系写成了这本“近代量子光学导论”.

全书共分三篇. 第一篇光与原子相互作用理论所包含的五章

内容,是量子光学中的基本理论,在此我们首先结合一些实例集中论述,以利读者掌握.同时,此篇所述内容也是后两篇研究的理论基础.第一章概述了量子力学的三种绘景;第二章则讨论二能级原子与光学布洛赫(Bloch)方程;第三章在关于光场的量子描述中,不仅概述了光场的量子化,而且也专门论述了描述光场的三种态函数;第四章则系统介绍描述光场与原子相互作用的狄克(Dicke)模式和 J-C 模型,它们是处理光场与原子相互作用的典型理论模型,其理论应用很广,具有普遍性;第五章介绍了小系统与库耦合的量子理论,除介绍朗之万(Langevin)方程和福克尔-普朗克(Fokker-Planck)方程以外,还具体讨论了量子谐振子和二能级原子所满足的主方程,这一章也是量子光学中描述系统与库耦合系统的量子统计性质的基础理论.第二篇则集中讨论光场的量子特性,首先简要介绍光场的相干理论,然后在第二章中系统论述近年来量子光学中广为探讨的光场的压缩理论.第三至五章分别论述了量子光学中的三个重要分支,即共振荧光、超荧光和光学双稳态,有关这三个课题的研究无论在理论方面还是在实验方面都比较成熟,我们在论述时力求简明而新颖.此篇的最后一章论述虚光场效应,从理论的观点看,深入探明虚光场对辐射场的影响是十分必要的,这里将结合我们近期的研究成果加以论述.本书的第三篇集中论述在激光场作用下原子的量子动力学特性,首先系统介绍在激光场作用下原子的周期崩塌与回复效应,然后在第二章中讨论原子算符的压缩效应.对于近期研究很多的关于原子的相干捕获则集中在第三章中论述.第四章讨论与光场作用的双原子系统的量子特性,在这里对双原子间的耦合效应也给予了详细的说明.第五章介绍激光场作用下原子的自电离问题.对于激光场作用下原子的运动,特别是驻波场中原子的衍射和偏离以及辐射场对运动原子的作用力等问题则在第六章中系统讨论.第七章讨论激光致冷这样一个十分有应用前景的课题,介绍了激光致冷的量子理论描述及与其应用有关的一些问题.

虽然近代量子光学研究的发展日新月异,但我们相信,本书论

述的基本理论和方法是普遍适用的. 本书的体系独特, 内容丰富新颖, 论述简明严谨. 读者将从中得知简明的物理思路、近代的科学理论和普遍的研究方法.

此书的完成, 得到国家自然科学基金委员会的长期支持, 还得到意大利国际理论物理中心和 A. Salam 教授的支持, 以及华中师范大学的支持, 在此一并表示感谢. 作者还要对 F. Persico 教授、M. U. Palam 教授、C. Leonardi 教授的支持和许多有益的讨论表示感谢. 作者特别要对黄柏秀副教授的鼓励、支持和许多帮助表示感谢, 她为本书绘制了全部插图. 作者感谢颜宁江的全力支持, 感谢周鹏博士的支持和有益讨论. 我们还要感谢刘连寿、刘武、郭光灿、李再光、姚凯伦等教授对我们工作的支持. 最后, 我们特别感谢中国科学院科学出版基金为本书提供的出版资助.

彭金生 李高翔

1994 年 6 月于华中师范大学

# 目 录

<b>第一篇 光与原子相互作用的基本理论</b> .....	(1)
引言.....	(1)
<b>第一章 量子力学描述的三种绘景</b> .....	(2)
第一节 薛定谔绘景 .....	(2)
第二节 海森伯绘景 .....	(6)
第三节 相互作用绘景 .....	(10)
一、相互作用绘景中的运动方程 .....	(10)
二、用微扰法求解态函数 $ \Psi_1(t)\rangle$ .....	(12)
第四节 密度算符 .....	(15)
一、密度算符及其特性 .....	(15)
二、密度算符方程的解 .....	(20)
<b>第二章 二能级原子与光学布洛赫方程</b> .....	(25)
第一节 二能级原子 .....	(25)
第二节 二能级原子与电磁场相互作用的哈密顿量 .....	(26)
第三节 光学布洛赫方程 .....	(28)
第四节 二能级原子动力学行为的密度矩阵描述 .....	(32)
一、不计及衰变时描述二能级原子的密度矩阵方程 .....	(32)
二、计及衰变效应时的密度矩阵方程 .....	(35)
<b>第三章 光场的量子描述</b> .....	(38)
第一节 真空中电磁场的经典描述 .....	(38)
第二节 辐射场的量子化 .....	(43)
一、辐射场的量子化 .....	(43)
二、光子的动量和自旋 .....	(46)
第三节 描述光场的态函数 .....	(50)
一、光场的粒子数态 .....	(50)
二、光场的相干态 .....	(53)
三、相位算符和相位态 .....	(62)
四、光场的混沌态 .....	(76)

第四章 狄克(Dicke)模式与 Jaynes-Cummings(J-C)模型	(81)
第一节 原子与辐射场相互作用的狄克模式	(81)
第二节 受激原子的自发发射	(86)
第三节 J-C 模型	(92)
第五章 小系统与库耦合行为的量子理论	(98)
第一节 经典朗之万方程和福克尔-普朗克方程	(98)
一、朗之万方程	(99)
二、福克尔-普朗克方程	(103)
第二节 量子谐振子和二能级原子满足的主方程	(112)
一、量子谐振子满足的主方程	(113)
二、描述与库场作用的二能级原子的主方程	(122)
第三节 量子谐振子的特征函数与准概率分布函数	(124)
一、正规排列顺序	(125)
二、反正规排列顺序	(129)
三、对称排列顺序	(132)
<b>第二篇 光场的量子特性</b>	<b>(141)</b>
引言	(141)
第一章 光场的相干性	(143)
第一节 光场的经典相干性	(143)
一、光场的时间相干性	(143)
二、光场的空间相干性	(144)
三、一阶相关函数	(146)
四、光场的高阶相关函数	(150)
第二节 光场相干性的量子理论	(152)
一、量子关联函数	(153)
二、光场的聚束与反聚束效应	(156)
三、双模光场的模间相关性	(163)
第二章 光场的压缩态	(165)
第一节 单模光场的压缩态	(166)
一、压缩相干态	(166)
二、压缩真空态	(184)
第二节 双模光场的压缩态	(185)



第三节	辐射场的高阶压缩和振幅平方压缩 .....	(193)
一、	辐射场的高阶压缩 .....	(193)
二、	振幅平方压缩 .....	(196)
三、	光场各种压缩定义的独立性 .....	(197)
第四节	J-C 模型中光场的压缩效应 .....	(198)
第三章	共振荧光 .....	(206)
第一节	单个二能级原子的共振荧光分布理论 .....	(208)
一、	修饰规范变换 .....	(208)
二、	单原子共振荧光频谱分布 .....	(213)
三、	三峰带荧光谱线的线宽 .....	(215)
四、	荧光谱线的强度分布 .....	(220)
第二节	三能级原子的共振荧光频谱分布 .....	(229)
一、	描述在双模光场作用下三能级原子系统的哈密顿量 .....	(229)
二、	与一强单色场和一弱单色场作用的三能级原子的共振荧光 频谱分布 .....	(231)
三、	在双强单色场作用下三能级原子的共振荧光频谱分布 .....	(237)
第三节	单原子共振荧光的密度矩阵描述 .....	(244)
第四章	超荧光 .....	(255)
第一节	超荧光的基本特征 .....	(255)
第二节	超荧光的准经典理论 .....	(259)
第三节	超荧光的全量子理论 .....	(266)
一、	描述系统的海森伯方程 .....	(266)
二、	超荧光的狄克模式 .....	(271)
三、	超荧光的量子统计特性 .....	(276)
第四节	超荧光拍 .....	(285)
一、	超荧光拍的基本特征 .....	(285)
二、	狄克模式的超荧光拍 .....	(287)
第五章	光学双稳态 .....	(295)
第一节	光学双稳态的基本性质和它的产生机理 .....	(295)
第二节	色散型光学双稳态的量子理论描述 .....	(302)
一、	描述光学双稳系统的哈密顿量 .....	(302)
二、	系统的光学双稳性质 .....	(305)
第六章	虚光场效应 .....	(309)
第一节	氢原子的兰姆位移与虚光场效应 .....	(310)

第二节	虚光场对光场相位涨落的影响 .....	(316)
一、	旋波近似下光场的相位随时间的演化 .....	(316)
二、	非旋波近似下光场的相位随时间的演化 .....	(321)
第三节	虚光子过程对光场压缩效应的影响 .....	(326)
一、	旋波近似下光场的压缩效应 .....	(327)
二、	虚光子过程对光场压缩效应的影响 .....	(330)
<b>第三篇</b>	<b>与光场作用的原子行为的量子特性 .....</b>	<b>(337)</b>
引言	.....	(337)
第一章	原子布居的周期崩塌与回复效应 .....	(338)
第一节	与经典电磁场作用的二能级原子算符的时间演化 .....	(338)
第二节	原子布居的周期崩塌与回复效应 .....	(341)
一、	在粒子数态光场作用下原子算符的时间演化 .....	(342)
二、	在相干光场作用下,原子布居的周期崩塌与回复效应 .....	(343)
第三节	双光子 J-C 模型中原子布居的周期崩塌与回复效应 .....	(352)
第四节	三能级原子系统中原子算符的时间演化特征 .....	(356)
一、	系统态矢随时间的演化 .....	(357)
二、	原子粒子布居数的周期崩塌与回复现象 .....	(359)
第二章	原子算符的压缩效应 .....	(366)
第一节	原子算符压缩的定义 .....	(366)
第二节	双光子 J-C 模型中原子算符的压缩效应 .....	(370)
一、	真空态光场作用下原子算符的压缩 .....	(372)
二、	叠加态光场作用下原子算符的压缩 .....	(378)
三、	相干光场作用下原子算符的压缩 .....	(382)
第三节	单原子共振荧光系统中原子算符的压缩效应 .....	(384)
第三章	原子的相干捕获 .....	(388)
第一节	与双模光场作用的三能级原子系统的态矢随时间的演化 .....	(388)
第二节	光场的相位随时间的演化 .....	(391)
第三节	原子的相干捕获 .....	(395)
第四章	与光场作用的双原子系统的量子特性 .....	(402)
第一节	有偶极-偶极相互作用的双原子系统的哈密顿量 .....	(402)
一、	原子间的电偶极相互作用能 .....	(402)

二、真空起伏诱导的偶极-偶极相互作用 .....	(404)
第二节 与弱光场作用的有耦合双原子系统的量子特性··	(410)
一、有耦合双原子系统粒子布居差随时间的演化 .....	(411)
二、耦合效应对原子算符压缩的影响 .....	(417)
第三节 相干光场作用下,双原子系统中粒子布居数的周期 崩塌与回复效应及原子的相干捕获现象 .....	(423)
一、有耦合双原子系统粒子布居数的周期崩塌与回复 .....	(426)
二、有耦合双原子系统中原子的相干捕获 .....	(433)
第五章 激光场作用下原子的自电离·····	(440)
第一节 弱激光场作用下原子的自电离 .....	(441)
第二节 强激光场作用下原子的自电离 .....	(451)
第三节 强激光场作用下原子的阈上离化 .....	(459)
一、二阶离化过程对低能光电子谱的影响 .....	(465)
二、高能光电子谱及峰开关效应 .....	(467)
第六章 激光场中原子的运动·····	(470)
第一节 驻波场中原子的偏离和衍射 .....	(470)
一、与驻波场相互作用的原子系统的态函数 .....	(470)
二、原子的衍射 .....	(477)
三、原子的偏离 .....	(486)
第二节 辐射场对原子的作用力 .....	(488)
一、辐射力的准经典理论 .....	(490)
二、修饰态方法对辐射偶极力的描述 .....	(499)
第七章 激光致冷·····	(518)
第一节 激光减速原子束 .....	(518)
第二节 激光冷却原子的量子理论描述 .....	(520)
一、偏振激光场与准二能级原子相互作用系统的哈密顿量··	(520)
二、原子内态密度矩阵元的演化方程 .....	(526)
三、激光场作用下原子所受的辐射力 .....	(533)
四、激光场冷却原子的物理机制 .....	(538)
第三节 关于激光致冷的极限温度 .....	(543)
一、激光场作用下原子动量的扩散 .....	(543)
二、激光冷却原子的热平衡温度 .....	(550)
三、利用速度选择相干态布居捕获实现原子冷却的极限温度 ···	(552)
索引·····	(556)

# 第一篇

## 光与原子相互作用的基本理论

~~~~~

### 引 言

我们假定读者均熟悉量子力学的基本理论,所以本篇第一章只概述量子力学描述的三种绘景,对量子力学的基本原理也只作简要回顾,主要希望通过这一章的学习,明确采用不同绘景描述量子系统有其不同的目的和特征.此外,由于密度矩阵理论在量子光学中应用极为普遍,所以,在这里我们对这一基本量子理论也作了简要的阐明.为了展开对光与原子相互作用理论的研究,我们在第二章中引进了二能级原子的概念,它虽是实际原子的理想模型,然而却是被广泛采用的典型的理论模型.所以关于二能级原子的量子描述以及它和辐射场相互作用的运动方程——光学布洛赫方程——均有十分重要的理论意义,在第二章中对此作了较为详细的论述.量子理论中如何表示光场的问题是一个必须从概念上明确的问题,在第三章中,我们首先概述了真空中电磁场的经典描述,然后通过辐射场的量子化引入了描述光场的力学量和算符,接着又集中介绍了描述光场的几种态函数,它们可以从不同侧面展现光场的物理性质.由于在现代量子光学理论中,描述光场与原子相互作用系统最常用的理论模型有狄克模式和 Jaynes-Cummings (J-C)模型,所以我们在第四章中对这两种典型理论模型作了专门介绍,读者将会发现,它们在理论上有着极为广泛的应用.本篇的最后一章我们以小系统与库耦合的量子系统为典型,论述量子光学中量子统计的基本理论.这一章除了介绍郎之万理论和福克尔-普朗克方程以外,还对量子谐振子满足的主方程以及量子谐振子的特征函数与准概率分布等等都作了专门论述.

# 第一章 量子力学描述的三种绘景

在量子力学中,对同一量子系统的描述,可以采用三种不同的绘景,即薛定谔绘景、海森伯绘景和相互作用绘景.这同对经典质点的描述可以采用坐标基矢不变而态矢随时间改变的描述方式、也可采用态矢不变而坐标基矢随时间改变的描述方式相似,显然这两种描述方式的数学表示是不同的,但它们所描述质点的客观运动规律是相同的.量子力学中,对于系统采用三种不同的绘景,意味着三种不相同的描述方式.当三者描述同一客体时,其反映的微观客体运动规律应是同一的.因此三种绘景具有严格的对应关系,可以互相转化.究竟采用何种绘景描述量子系统,要根据系统的特征,选取最易揭示其物理特性,最方便求解的绘景来描述.下面,我们对三种绘景作一简单的概述.

## 第一节 薛定谔绘景

在量子力学中,对一个系统(例如一个原子,或一个与单模光场相互作用的原子,或两个原子与双模光场相互作用等等)进行描述时,通常假设系统的状态可以用态函数 $|\Psi(t)\rangle$ 来表示.如果系统是单个微观粒子,它可以用态函数 $|\Psi(\mathbf{r},t)\rangle$ 描述,其中 $\mathbf{r}$ 表示系统(微观粒子)的空间坐标, $t$ 为时间坐标.当知道系统态函数的确切表示以后,就可以知道系统的时间演化状态,例如可以知道时刻 $t$ 在点 $\mathbf{r}$ 处发现该微观粒子的概率,其定义为 $\langle\Psi(\mathbf{r},t)|\Psi(\mathbf{r},t)\rangle$ .因此,在 $\mathbf{r}$ 处在体元 $d^3\mathbf{r}=dx dy dz$ 中于 $t$ 时刻发现该粒子的概率是 $\langle\Psi(\mathbf{r},t)|\Psi(\mathbf{r},t)\rangle d^3\mathbf{r}$ .由于粒子在整个空间区域被发现的概率应等于1,所以态函数应满足归一化条件,即

$$\int \langle \Psi(\mathbf{r}, t) | \Psi(\mathbf{r}, t) \rangle d^3\mathbf{r} = 1 \quad (1.1.1)$$

量子力学的另一个基本假定是：系统的物理量  $A$  由算符表示，如坐标、动量、角动量、自旋等等。物理量的可观测性要求算符是本征值为实数的线性算符，即厄米算符。任一厄米算符  $A$  都满足相应的本征值方程

$$A|u_n\rangle = \lambda_n|u_n\rangle \quad (1.1.2)$$

其中， $|u_n\rangle$  为厄米算符  $A$  的本征函数， $\lambda_n$  为相应的本征值。厄米算符具有三个重要的性质：(1) 厄米算符的本征值  $\lambda_n$  都是实数；(2) 厄米算符的属于不同本征值的两个本征态矢  $|u_n\rangle$  和  $|u_m\rangle$  ( $n \neq m$ ) 相互正交；(3) 厄米算符的本征态矢构成一个完备集  $\{|u_n\rangle\}$ ，这一性质使系统的任意态矢  $|\Psi\rangle$  都可以按这一本征态矢集展开：

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n |u_n\rangle \langle u_n | \Psi(t) \rangle = \sum_n C_n(t) |u_n\rangle \quad (1.1.3a)$$

其中

$$C_n(t) = \langle u_n | \Psi(t) \rangle \quad (1.1.3b)$$

表示系统在  $|\Psi(t)\rangle$  时处于本征态  $|u_n\rangle$  的概率幅。这样，我们就可以利用物理量算符  $A$  的本征态矢集  $\{|u_n\rangle\}$  的线性叠加来表述一个量子系统的态矢。

描述一个微观体系(如单个氢原子等)需要多个物理量，如坐标、动量、角动量、能量、自旋等，那么这些物理量算符之间有什么关系呢？物理量之间的具体关系是由系统的物理属性(物理规律)决定的。从理论的观点来看，任意算符之间的关系可分为两类。如果两个物理量  $A, B$  具有共同的本征函数集，那么这两个算符  $A$  和  $B$  满足乘法交换律，我们就说算符  $A$  和  $B$  是对易的，记作

$$[A, B] = AB - BA = 0 \quad (1.1.4a)$$

如果算符  $A$  和  $B$  分别具有不同的本征函数集，此时不满足(1.1.4a)式，我们就称算符  $A, B$  之间是不对易的。此时，算符  $A, B$

之间满足如下一般的对易关系:

$$[A, B] = iC \quad (1.1.4b)$$

其中  $C$  为一常数或另一厄米算符. 对易关系(1.1.4)式表征物理量  $A$  和  $B$  之间遵循的相应的物理关联或物理规律.

如何确定系统的动力学行为, 是量子力学处理的基本问题. 量子力学假定, 系统的态矢  $|\Psi(t)\rangle$  的时间演化由薛定谔方程决定, 写作

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle \quad (1.1.5)$$

其中算符  $H$  是表征系统能量的物理量, 称为系统的哈密顿量. 原则上说, 对于任一给定的系统, 都具有确定的  $H$ , 那么根据方程(1.1.5)式和初始条件, 就可以确定态函数  $|\Psi(t)\rangle$ , 从而得知系统的时间演化规律.

研究系统的动力学行为, 选择适当的绘景是十分重要的, 量子力学中最常采用的是薛定谔绘景. 这种绘景的主要特点是通过态函数  $|\Psi(t)\rangle$  的时间演化来表征系统的变化, 而系统的物理量算符  $A$  (如  $H, p, r$  等) 则不随时间而改变. 为区别其它绘景, 常用下标(或上标)  $S$  来表明薛定谔绘景中的态函数和物理量, 例如  $|\Psi_S(t)\rangle, H_S, q_S, p_S$  等. 一般情况下, 若未注明绘景下标(或上标), 则说明是在薛定谔绘景中讨论的量. 由于在薛定谔绘景中物理量  $A_S$  不随时间而改变, 因而, 物理量  $A_S$  的本征态矢  $|A_S\rangle$  也不随时间而改变. 因此, 在薛定谔绘景中, 任一物理量的本征态矢集可以构成描述系统的态及其它物理量的固定的本征基. 可见, 薛定谔绘景中本征基矢是静态的, 而描述系统的态函数  $|\Psi(t)\rangle$  则是动态的. 依据方程(1.1.5)式和初始条件  $|\Psi_S(t_0)\rangle$ , 可以求解出  $t$  时刻的态矢  $|\Psi_S(t)\rangle$ :

$$|\Psi_S(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi_S(t_0)\rangle \quad (1.1.6)$$

式中,  $U(t, t_0)$  称为时间演化算符, 它由系统的哈密顿量决定. 将

(1.1.6)式代入(1.1.5)式,得

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\Psi_S(t_0)\rangle = H_S U(t, t_0) |\Psi_S(t_0)\rangle \quad (1.1.7)$$

由于 $|\Psi_S(t_0)\rangle$ 是完全任意的,所以时间演化算符 $U(t, t_0)$ 满足如下方程:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_S U(t, t_0) \quad (1.1.8)$$

积分上式,得知

$$U(t, t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H_S(t') dt'\right] \quad (1.1.9)$$

显然, $U(t, t_0)$ 为一么正变换算符.如果系统的哈密顿量 $H_S$ 不显含时间 $t$ ,则(1.1.9)式简化为

$$U(t, t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H_S(t-t_0)\right] \quad (1.1.10)$$

将(1.1.9)式或(1.1.10)式代回(1.1.6)式,就可确定 $t$ 时刻系统的态矢.这时,系统于 $t$ 时刻处于某一物理量的本征态 $|u_m\rangle$ 的概率为

$$|\langle u_m | \Psi_S(t) \rangle|^2 = |\langle u_m | U(t, t_0) | \Psi_S(t_0) \rangle|^2 \quad (1.1.11)$$

系统的任一物理量 $A_S$ 在 $t$ 时刻的期望值为

$$\langle A \rangle_S = \langle \Psi_S(t) | A_S | \Psi_S(t) \rangle \quad (1.1.12)$$

这里还要指出一点,在量子系统中,如果表示物理量的两个厄米算符 $A, B$ 是不可对易的,它们满足关系(1.1.4b)式,也就是说,它们没有共同的本征函数集,因而不能同时确定,那么算符 $A, B$ 的均方涨落 $(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ ,  $(\Delta B)^2 = \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2$ 将满足不等式:

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle C \rangle|^2 \quad (1.1.13)$$



式中

$$\langle C \rangle = \langle \Psi(t) | C | \Psi(t) \rangle \quad (1.1.14)$$

$$(\Delta A)^2 = \langle \Psi(t) | A^2 | \Psi(t) \rangle - (\langle \Psi(t) | A | \Psi(t) \rangle)^2 \quad (1.1.15)$$

(1.1.13)式称为海森伯不确定度关系,它是量子系统中非对易算符间满足的一个基本关系.如果 $\langle C \rangle = 0$ ,也就是 $C = 0$ ,那么此时 $A$ 和 $B$ 是对易的,因而两物理量 $A$ 和 $B$ 可以同时精确测定.如果令算符 $A$ 为坐标算符 $q$ , $B$ 为动量算符 $p$ ,由于它们之间满足对易关系:

$$[q, p] = i\hbar \quad (1.1.16)$$

所以(1.1.13)式可简化为

$$(\Delta p)^2 (\Delta q)^2 \geq \frac{1}{4} \hbar^2 \quad (1.1.17)$$

这就是我们熟知的海森伯动量-坐标不确定度关系.如果 $A$ 为角动量算符的 $x$ 分量 $L_x$ , $B$ 为角动量算符的 $y$ 分量 $L_y$ , $L_x, L_y$ 满足对易关系:

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad (1.1.18)$$

则有

$$(\Delta L_x)^2 (\Delta L_y)^2 \geq \frac{1}{4} \hbar^2 |\langle L_z \rangle|^2 \quad (1.1.19)$$

(1.1.19)式即为粒子角动量 $x$ - $y$ 分量的不确定度关系,它决定于角动量 $z$ 分量的期望值.

## 第二节 海森伯绘景

由上面的讨论知道,在薛定谔绘景中,物理量不随时间而改变,从而系统的本征态矢是静态的,它不随时间演化而变化,而描