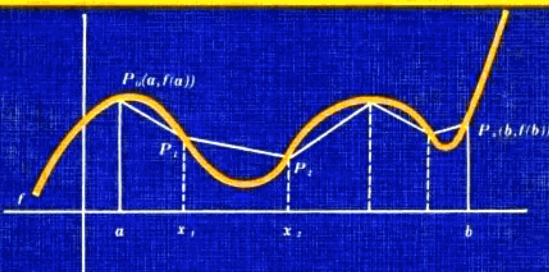
微積分

上冊

EDWIN E. MOISE 原著

李巡伯 吳森原 葉 福 合譯



校閱者

李新民 徐道寧

東華書局印行

微積分

CALCULUS

上 册

EDWIN E. MOISE 原著

李巡伯 吳森原 葉福 合譯

校閱者

李新民 徐道寧

東華書局印行

中華民國五十八年 九月 初版
中華民國六十七年 十月 四版

大學用書 微積分（全三册）

上册 定價 新臺幣六十元整
（外埠酌加運費匯費）

譯者 李巡伯 吳森原 葉福
發行人 卓鑫淼
出版者 臺灣東華書局股份有限公司
臺北市博愛路一〇五號
印刷者 中臺印刷廠
臺中市公園路三十七號

行政院新聞局登記證 局版臺業字第零柒貳伍號
（57011）

原　　序

本書的內容是通俗的。它包括一般大專第一年微積分的主要材料，只講得更透澈些。（其餘初等的材料將置於即將出版的微積分第二部(註)之中)。

然而，本書中論述方式常常是新奇的。我想在此舉幾個例子來說明這些方式及其所本的概念。

1. **螺旋程序**　微積分的主要概念是艱深的。這種概念，依照近代數學家所認爲的形式，是不可能立刻就能完全了解的。所以在本書中，較困難的概念均用一連串不同的方式表述之。且其深度，一般性與嚴密性都是逐漸增加的。例如，定積分的概念，於 2.10 節中首先述其最簡單的形式，然後於 3.6 節再予推廣，直到 7.1 節才(用黎曼和)表出其最後的形式，蓋此時黎曼和乃爲計算弧長所必需的工具。

同樣，導數的連鎖法則，第一次出現於 3.5 節，所討論的僅是函數之冪與平方根；而於習題 3.5，3.7，4.2 與 4.4 中曾提供其一般式，至 4.5 節才有其最後的形式。

中值定理在給予導數的正式定義之前，於 3.2 節中首先用幾何術語表之，以後即隨處應用。最後於 5.7 節，當證明中所須應用的概念，業已由其他方式熟悉後，才予以證明。

函數極限的概念，首先見於 2.7 節，其正式定義則述於 3.3 節。以前各節，均爲正式定義作詳細的預備工作，以預先消除其可能發生

（註）譯本下册

的困難；課文中 1.4 節，2.5 節與習題 2.6 即具有此種任務。本書的寫法是，若將書中各章節孤立地來讀，則恐使人以爲它過份艱深。蓋因各章節並非孤立的。對於困難的論述，在課文中，尤其在問題中，均以別出心裁的方式預爲解說。

螺旋論述的主要目的，在於使概念簡化而易於學習。因此，當理論向前發展時，概念亦隨之以各種方式出現。但這並非其唯一目的。螺旋論述法中使之一般化的過程及啓發式的概念使之成爲具體而精確的步驟亦爲所應講授的一部份。所以，在 4.7 節的指數與對數之啓發性的論述中，並非僅爲使學生易於學習。由 4.7 節至 4.8 節與 4.9 節的轉變過程（其理論乃基於將 $\ln x$ 定義爲 $\int_1^x\left(\frac{dt}{t}\right)$，）其本身即具有相當的價值，這是數學的演變與使用者在思想過程上均須有的變換程序之實例。

2．動機　"解答有趣的難題"是人們永恒且强烈的願望之一；應對此善加利用。所以，一般在介紹新的概念時，多必須利用"這個新概念，對已知的重要的事物有何用處"來引起學習的動機。例如，若不看幾個須用黎曼和去解的問題，只冒然地介紹其定義，則學生是不可能對它徹底了解的。同樣，狄悌鏗式實數系之完全性，於點極限(point-wise limits)的理論中並不需要，同時此理論對有理數體及對實數體均具有相同的形式。但若將完全性的概念延後，直到需用以討論連續於區間的函數時再加以介紹，似乎更易於理解，且易於喚起學生的注意。

如何去引出函數極限概念是特別困難的。只 f 爲簡單連續函數時，$\lim_{x\to a}f(x)$ 之值才易於計算。在此情況下，描述的式子對 x 爲其他值與 $x=a$ 時同樣地有效。事實上，其極限爲 $f(a)$；而學生亦或以爲表示法 $\lim_{x\to a}f(x)$ 僅爲 $f(a)$ 之一種迂迴與文飾的描述而已。

若欲避免這種誤會，而改以較有意思的例子

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{x},$$

為開端，則演算技巧上的困難是可怕的，而此類當時可解的問題亦甚難覓。又若選用數列之極限以為代替，則已違避了主體：在微分學中，函數之極限乃所必需。

然而，尙有第四種方式：我們不追究主題本身之問題，而視之為解問題而設的方法以介紹極限之概念。於 2.7 節中，欲求一次函數之極限時，我們第一次提及極限的問題。在此情況下，欲表其極限，僅須於有孔的線上將孔穴塡滿。這種方式雖無眞正的意義，但在 2.7 節之課文中，則具有附帶的意義，因為可以用來解拋物線上切線斜率之特別問題。同樣，在 2.10 節中，選用了技術上很簡單的數列極限之概念，以求出拋物線與坐標軸間的面積。（數列極限的正式定義將見於微積分第二部 11.1 節中。）此外並用簡單的形式介紹了許多概念，以與其他問題相提並論。

3. **提要**　大家都知道，在物理實驗室裡學生應盡可能地自己動手，因僅作壁上觀是學不到什麼的。數學也是一樣，僅聽一遍講，不論如何精闢，決不能由此學得數學原理。而必須多接近與利用。所以本書中，某些極為有用的定理的證明遠在於有其敍之前——用解決某一類問題之方法的形式加以證明。並且在學生藉解許多問題而了解其概念後，加以總結而成為已證的一般定理。這種方式，卽使局部地看也費時很少，而在長遠觀之更是事半功倍。蓋因起首若以方法替代概念來解題，則其概念必需於事後重新施教；這樣必將更為困難，因為這時需用特殊概念以解題的興緻業已消失了。

對上述技巧的不賦予例題是有充分理由的。

讀者應當理解的是，書中的黑框與追求邏輯的嚴密並無特殊的關連。若實在只能選擇其一時用反覆的練習而精通一種啓發的概念，總比傾聽一場嚴謹的解釋然後各奔東西來得好。

4．*習題* 如欲對一教本作迅速的檢視，只讀課文而略其習題不是一種好辦法；最好是看看習題而略課文。因學生學某課程時，習題卽代表他們所學習的實際情況。對於任何概念，如不在習題中令他們反覆加以應用，則都將得不到什麼效果。

本書有各類問題以適合多種的目的：

（1） 演算性的問題。例如，於積分術中的技巧問題，均經過仔細的安排，並且經常形成一系統，前面問題的答案可用於解答後面的題目。

（2） 理論性的問題。有些是容易的，也有些是較困難的。著者曾苦心地尋覓簡單的理論性的問題，以避免"技巧"（學生確實使用者）與"理論"（學生對此只是一位間斷的觀察員）之間的嚴格分野。

（3） 難題。

（4） 繪圖練習。在此要求學生於解析概念與視覺影像之間，往返詮譯。

（5） 啓發性的問題。含有某些概念的特殊情形，而這些概念是以後的課文中要講的。

上述各端，略表作者的某些目的，以及追求此種目的的手段。顯然上述的並不足以證明本書對這些目的有如何的成就。對於過去十年來在微積分教學方面發生的許多問題，到底可被處理到何種程度，和到底要用什麼方法去處理，那還是待決的事。

康橋，麻省 1966 年 4 月 E. E. M.

微 積 分

上 册 目 次

第一章　不等式與完全性

第二章　解析幾何

第三章 函數，導數，與積分

第四章 三角函數與指數函數

第五章 連續函數

1

不等式與完全性

1.1 引　　言

本書中假定讀者已具有初等幾何與初等代數中實數系之知識．平面幾何中之定理用時僅簡略扼要敍述而不予查證．本書亦認爲代數計算方面之技巧爲已知,因而略去不證．

然而，不等式情形不同．因其將經常使用，同時亦眞正變化多端，故本書中將仔細加以處理．爲導出需用之定律，玆先回溯數系中之基本定律如下：

假設集合 $\mathbf{R}$ 表實數，其中有加法與乘法二運算；因而數系爲一個三聯式

$$[\mathbf{R},+,\cdot].$$

加法與乘法合於下列諸定律：

封閉性 (closure)．　對 R 中任意之 a 與 b，$a+b$ 及 ab 均屬於 R．

結合性 (associativity)．對 R 中任意之 a、b、c，恆有

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

與

$$a(bc)=(ab)c.$$

交換性 (**commutativity**). 對 R 中任意之 a 與 b，恆有

$$a+b=b+a \text{ 及 } ab=ba.$$

分配律 (**distributive law**). 對 R 中任意之 a、b、c，恆有

$$a(b+c)=ab+ac.$$

0 與 1 之存在. R 中存在 0 與 1，使對 R 中之每一 a，

$$a+0=a \text{ 與 } a\cdot 1=a$$

恆成立.

負數之存在. 對 R 中之每一 a，各存在一元素 $-a$，使

$$a+(-a)=0.$$

倒數之存在. 對 R 中之每一 $a\neq 0$，各存在一元素 $\frac{1}{a}$，使

$$a\cdot\frac{1}{a}=1.$$

上列各定律稱為**體公設** (**field postulates**)，滿足此等定律之任何數系均稱為**體** (**field**)．此類數系甚多：實數系自然為一個體；複數系亦然．然而，在此後很長篇幅中，均只對實數加以研究，故除非特別申明，當提及“數”時，均指實數而言．

本書中對數系不僅假定其能滿足前述的之體公設[1]，並假定由此等體公設所能導出之許多定理亦能成立[2]．例如 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$，$a\cdot 0=0$ 等．

譯者註： 1. 此假設乃本書體系邏輯上的要求，絕對不能省略．

2. 此部分之假設，乃為了簡化而設，事實上此等定理讀者可自行由 1. 逐步推證．

1.2 等於零之乘積

當演算時，凡基於體公設者均略而不證．但下之原理特別值得一提，因其被用於不含計算之推理過程中：

定理 1. 若 $ab=0$，則 $a=0$ 或 $b=0$．

【證明】 (1) 若 $a=0$，則定理已明．

(2) 若 $a\neq0$，則 a 有一倒數 $\frac{1}{a}$， 故

$$\frac{1}{a}(ab)=\frac{1}{a}\cdot0,\ \left(\frac{1}{a}\cdot a\right)b=0,\ 1\cdot b=0,$$

即

$$b=0.$$

於是 $a=0$ 或 $b=0$．

顯然 a 與 b 可能同時爲 0．在定理 1（及數學中任何地方）中當提及"…… 或 ……"時，准許二者同時成立之可能．

習　題 1.2

1. 試證若 $x^2=0$，則 $x=0$．

2. 1 與 -1 顯然爲方程式

$$(x-1)(x+1)=0$$

之根．試證此方程式別無他根．

3. 試證 2 與 3 爲方程式

$$x^2-5x+6=0$$

僅有之根．

4. 若0有一倒數，則其倒數必爲方程式

$$0\cdot x=1$$

之一根．試證此方程式無根．

5. 若 $ab=ac$，是否 $b=c$ 必然成立？何故？

6. 若 $ab=ac$，且 $a\neq 0$，是否 $b=c$ 必然成立？何故？

7. 試證若 $abc=0$，則 $a=0$ 或 $b=0$ 或 $c=0$．

8. 試證 1，2 與 3 爲方程式

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

僅有之根．

9. 若 $a^3=b^3$，是否 $a=b$ 必然成立？何故？

10. 若 $a^2=b^2$，則 a 與 b 具有何種關係？何故？

11. 在何種條件下（若有時），

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\frac{1}{x+a}$$

成立？

12. 在何種條件下（若有時），

$$(a+b)^2=a^2+b^2$$

成立？

13. 在何種條件下（若有時），

$$(a+b)^3=a^3+b^3$$

成立？

*14. 玆有一僅含 0 與 1 二元素之“數系”，其加法與乘法定義如下表:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

在此系中，那些體公設成立？那些不成立（若有時）？

（本題之解答指出體公設本身並不足以充分描述實數系。）

*15. 玆有一僅含 0, 1, 2 與 3 四元素之“數系”，其加法與乘法定義如下表:

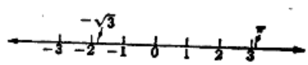
+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

在此數系中，恰有一個體公設不能成立，試指出之。〔提示：不用檢驗結合律與分配律；事實上，在此系中此二律均成立，但其證明相當冗長。〕在此系中定理 1 能否成立？何故？

1.3 次 序

玆設想實數被排置於一線上如下:



$a<b$ 之意即（粗略言之）數線上 a 點之位置居於 b 點之左。於是所觀察者乃一組

$$[\mathbf{R}, +, \cdot, <],$$

其中之 $<$ 表示一種具有下列性質之關係.

0.1. 三一律 (trichotomy). 對 R 中任意之 a 與 b, 下列三式中恰有一個成立:

$$a<b, \text{ 或 } a=b, \text{ 或 } b<a.$$

0.2. 遞移律 (transitivity). 若 $a<b$ 且 $b<c$, 則 $a<c$.

滿足 0.1 與 0.2 之關係, 稱爲**次序關係 (order relation)**, 而形如 $a<b$ 之式, 稱爲**不等式 (inequality)**. $b>a$ 意即 $a<b$; $a\leq b$ 意即 $a<b$ 或 $a=b$; $a\geq b$ 意即 $a>b$ 或 $a=b$. 設 a 爲一數, 若 $a>0$, 則稱 a 爲正數; 若 $a<0$, 則稱 a 爲負數, 而零則既非正數亦非負數.

但 0.1 與 0.2 不能供給足够處理不等式之方法, 必需知悉 $<$ 與 $+$, $\cdot$ 之關係.此種基本定律如下:

MO. 若 $a>0$ 且 $b>0$, 則 $ab>0$.

AO. 若 $a<b$, 則對每一 c, 恆有 $a+c<b+c$.

運用此四定律可導出不等式之一般定理. 在此只列出一些結果, 其證明過程留作習題.

定理 1. 若 $a>0$, 則 $-a<0$.

定理 2. 若 $a<0$, 則 $-a>0$.

定理 3. 若 $a<b$ 且 $c<d$, 則

$$a+c<b+d.$$

定理 4. 不等式兩端乘以相同之正數，其向方不變。

此卽若 $a<b$ 且 $c>0$，則 $ac<bc$。

同理，得

定理 5. 不等式兩端除以相同之正數，其方向不變。

此卽若 $ac<bc$ 且 $c>0$，則 $a<b$。

定理 6. 不等式兩端乘以相同之負數，則不等式反向。

此卽若 $a<b$ 且 $c<0$，則 $ac>bc$。

定理 7. 不等式的兩邊除以相同的負數，則不等式反向。

此卽若 $bc<ac$ 且 $c>0$，則 $b>a$。

今進而討論含有一個未知數 x 之不等式，例如

$$3x+4<5x+7.$$

此種包含一個變數之式，稱爲開放語句 (open sentence)；在一個開放語句中，x 表示將數代入之處；當以某些數代 x 時，此敍述爲眞，當以另一些數代 x 時，則此敍述爲不眞．例如

$$3\cdot2+4<5\cdot2+7 \text{爲眞},$$

蓋因 $10<17$，但

$$3(-5)+4<5(-5)+7 \text{爲不眞},$$

蓋因 $-11>-18$.

對此種簡單之例，甚易得出滿足不等式之數之簡單表示法．若

$$3x+4<5x+7, \tag{1}$$

則由 AO（在此不等式兩邊同加以 $-3x$），得

$$4<2x+7. \tag{2}$$