数列通项公式

李一麟

湖南大学出版社

数列通项公式

李 一 麟

湖南大学出版社

内 容 提 要

本书运用初等方法，以等差数列与等比数列的通项公式及其性质为基础，介绍了其它几种常见特殊数列的通项公式。着重概述了探求数列通项公式的几种常用方法。可供高中学生课外阅读和中学数学教师教学参考。

数 列 通 项 公 式

李 一 麟

责任编辑 朱 华

☆

湖南大学出版社出版发行

（长沙岳麓山）

湖南省新华书店经销

湖南大学印刷厂印刷

☆

787×1092 32开 4印张 90千字

1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷

印数：00001—10500册

ISBN 7—314—00306—8/O·18

定价：1.40元

前　言

数列是中学阶段的重要边缘知识。其中数列通项公式的寻求往往成为学习中的一个难点。

这本小册子着重介绍怎样运用中学阶段所学知识寻求数列的通项公式。通过大量例题，展示建立几类特殊数列通项公式的方法与技巧。书中附有一定数量的习题和解答，可供读者选用。

湖南教育学院数学系张运筹副教授对本书的编写，自始至终给予了极大的关心与具体指导、帮助，编者谨在此表示衷心的感谢。在编写过程中，笔者参阅了一些书刊资料，谨向有关作者表示谢意。由于个人水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请同志们批评指正。

编者　1988年9月

目　录

第一章　数　列

1.　数列及其通项公式

按一定次序排列的一列数，叫做数列。例如将质数从小至大依次排列为：

(i)　2，3，5，7，11，13，……

将自然数平方，从小到大依次排列为：

(ii)　1，4，9，16，25，……

将自然数的倒数依次排列为：

(iii)　$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots\cdots$

(i)、(ii)、(iii) 都是数列。

一般地数列常写成

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots \qquad (*)$$

其中 a_n 是数列的第 n 项。为简便起见，有时就将(*)简记作数列 $\{a_n\}$。比如数列(ii)、(iii)分别简记为$\{n^2\}$、$\left\{\frac{1}{n}\right\}$。

数列可以看作定义域为自然数集N（或它的有限子集）的函数，当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值，因而任何一个数列的第 n 项a_n（n 是正整数）是 n 的函数。

对于数列$\{a_n\}$，如果它的第 n 项 a_n 与 n 之间的函数关系能用一个公式来表示，那末这个公式就叫做这个数列的通项公式。如数列(ii)的通项公式为 $a_n=n^2$，数列(iii)的通项公式为$a_n=\frac{1}{n}$。不过并非一切数列，它的第 n 项a_n与 n 之间的函数关系都能用一个公式来表示。例如，从小到大排列的质数数列(i) 2，3，5，7，11，……其通项公式就未发现。

为表示这类数列的确定性，通常采用语言描述的方法。

对于有通项的数列，其内在规律完全可以用通项公式来揭示。因为由一个数列的通项公式可得出该数列中的任何一项。比如数列$\{\cos(n+1)\pi\}$，根据其通项公式$a_n=\cos(n+1)\pi$，可知它的前6项为：1，−1，1，−1，1，−1；它的第100项$a_{100}=\cos 101\pi=-1$。

又如数列$\{(-1)^{n+1}\}$，由通项公式$a_n=(-1)^{n+1}$可得到它的前6项为：1，−1，1，−1，1，−1；它的第100项$a_{100}=(-1)^{101}=-1$.

比较数列$\{\cos(n+1)\pi\}$与$\{(-1)^{n+1}\}$中的项，发现它们在奇数位置的项总是1，在偶数位置的项总为−1。因而实际上是同一数列，只是通项公式形式不同罢了。

又如由通项公式$a_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}$所确定的数列的通项公式也可写成$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & (n\text{ 为奇数})\\[2mm] \dfrac{3}{n} & (n\text{ 为偶数})。\end{cases}$由此可知，数列的通项公式既可能是单一的式子又可能不是单一的式子。

根据数列的通项公式，能确定这个数列的任意一项，但已知数列的前几项，能否唯一确定这数列的通项公式呢？

请看高中代数《数列》一章中的一个问题：

“写出数列的一个通项公式，使它的前4项分别是3、6、9、12。”

解答这类较简单的问题，通常是根据对已知数列前几项的观察、分析、归纳，寻求各项与其序号之间的内部联系。我们不难从对题中数列的前四项的观察与分析，发现它们都是序号（项数）的3倍，因而得出$a_n=3n$。这种求通项的方

法，若就数列给出的前四项而言是穷举归纳，但对整个数列（当此数列是无穷数列时）而言却是不完全归纳。由$a_n=3n$可以得出数列的前四项是已知的3、6、9、12，不过使前四项为3、6、9、12的数列并不只有数列$\{3n\}$。

由于a_n是项数n的函数，并且已知数列的前四项都是正整数，因而可以设想从a_n是n的多项式函数入手，运用待定系数法寻求其通项公式。

假如设a_n是n的一次函数，即$a_n=bn+c$。令$n=1、2$，得$\begin{cases}b+c=3\\2b+c=6\end{cases}$解之得$b=3$，$c=0$。于是得到$a_n=3n$。……①

再验证$n=3、4$，①式也满足条件。所以，$a_n=3n$是要求的通项公式。

我们若设想a_n是n的二次函数：$a_n=bn^2+cn+d$，令$n=1、2、3$，得$\begin{cases}b+c+d=3\\4b+2c+d=6\\9b+3c+d=9\end{cases}$ 求得 $b=0$，$c=3$，$d=0$，即仍得$a_n=3n$。

倘若再想$a_n=bn^3+cn^2+dn+e$，仿上解法，仍旧得到$a_n=3n$。但是当假设a_n是n的四次函数时，由$a_n=bn^4+cn^3+dn^2+en+f$，有方程组

$$\begin{cases}b+c+d+e+f=3\\16b+8c+4d+2e+f=6\\81b+27c+9d+3e+f=9\\256b+64c+16d+4e+f=12\end{cases}$$

这是一个五元一次不定方程组。令$b=t$（t是参数）解得$c=-10t$，$d=35t$，$e=3-50t$，$f=24t$。显然，上述方程组有无穷多解。通项a_n可以表示成

$$a_n=tn^4-10tn^3+35tn^2+(3-50t)n+24t$$

令 $t=0$ 便得 $a_n=3n$；若令 $t=1$、2，则分别得到

$$a_n=n^4-10n^3+35n^2-47n+24 \quad ②$$

$$a_n=2n^4-20n^3+70n^2-97n+48 \quad ③$$

不难验证，在式②与③中，令 $n=1,2,3,4$，都能得到数列前四项为3、6、9、12。如果给实数 t 以其它值，便能得出各种不同的通项公式，它们的系数各有不同，但所确定的数列的前四项必定都是3、6、9、12。比如由通项公式

$$a_n=\sqrt{2}n^4-10\sqrt{2}n^3+35\sqrt{2}n^2+(3-50\sqrt{2})n+24\sqrt{2}$$

确定的数列是3、6、9、12、$15+24\sqrt{2}$，……

显而易见，运用待定系数法求某些给出了前几项的数列的通项公式时，结论并非唯一。因此，仅仅知道一个数列的前面有限个项而无其它说明时，这个数列是不确定的。一般地，在求这种非确定给出的数列的通项公式时，只需求出一个比较简单、自然的即可。如数列：3、6、9、12，……通常就取 $a_n=3n$ 为它的一个通项公式。不过，即使获得了 $a_n=3n$，我们仍能对 a_n 作些变化而得到该数列的无穷多个通项公式。如将 a_n 写成 $a'_n=3n+\varphi(n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$。($\varphi(n)$是 n 的任意函数）亦能表示数列：3、6、9、12，……

2. 给出数列的常见方法

掌握了一个数列的通项公式，就从整体上认识了该数列。因此给出通项公式 $a_n=f(n)$ $(n\in N)$常作为给出一个数列 $\{a_n\}$ 的重要方法。

此外还常采用给出递推公式或递归公式来给出一个数列。

所谓递推公式，就是由含有数列前边的若干项的表达式

来表示后边某一项的公式。如高中《数列》一章中；

“已知数列$\{a_n\}$的第1项是1，以后各项由公式$a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}$给出”，就是用递推公式和初始条件来给出数列的。

假如这种表达式中仅含数列前边的若干项，（允许有常数系数）则这种公式就叫做递归公式。如$a_{n+3}=3a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n$。

但是仅由递推公式或递归公式，还是得不到一个确定的数列。例如，由递推公式$a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}$给出的数列，会因为首项不同而对应着不同的数列。因此只有在给出递推（或递归）公式的同时，给出若干初始条件才能唯一确定数列。例如在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2n+1$，可得知数列为：1、4、9、16、25，……

同样，在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=9$，$a_{n+3}=3a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n$，根据初始条件及递归公式不难得到数列：1、4、9、16、25、……

这时，对于数列：1、4、9、16、25、……，我们不难猜测它的一个可能的通项公式是$a_n=n^2$。

由$a_n=n^2$知$a_1=1$，$a_{n+1}=(n+1)^2=a_n+2n+1$，即有

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+2n+1. \end{cases}$$

另外，从$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+2n+1 \end{cases}$可知$a_2=4$，$a_3=9$，$a_{n+2}=a_{n+1}+2(n+1)+1=a_{n+1}+2n+3$。将$a_{n+2}=a_{n+1}+2n+3$与$a_{n+1}=a_n+2n+1$两式相减，可得

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2 \qquad ①$$

类似地有

$$a_{n+3}=2a_{n+2}-a_{n+1}+2 \qquad ②$$

②－①移项得递归公式$a_{n+3}=3a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n$。这样便得出

$$\begin{cases} a_1=1, & a_2=4, \quad a_3=9 \\ a_{n+3}=3a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n \end{cases}$$

综上所述，由自然数平方组成的数列可以分别由通项公式 $a_n=n^2$、或由初始条件及递推公式

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=a_n+2n+1 \end{cases}$$

或由初始条件及递归公式

$$\begin{cases} a_1=1, & a_2=4, \quad a_3=9 \\ a_{n+3}=3a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n \end{cases}$$

三种方法给出。

3. 有限数列的通项公式

前面我们谈到的数列都是无限数列，即项数无限的数列，但还存在项数有限的一类数列，即有限数列。如有限数列：89、95、78、90、82。(*)常有这样一种误解，以为(*)不存在通项公式，即各项不能表示成为 n 的函数。其实这几个数构成的有限数列不仅有通项公式而且有无穷多个通项公式。为了说明这个问题，下面介绍两个定理。

定理 1 设 $a_n=f(n)$ 是定义在自然数集上的函数。对于给定的 t 个数 a_1、a_2、…、a_t，存在唯一的次数不大于 $t-1$ 的多项式 $f(n)$，使 $f(n)=a_n$，$n=1, 2, \cdots, t$。

换句话说：任意给出数列的前 t 项，则次数不大于$t-1$的多项式的通项公式必唯一存在。

证明 设满足 $a_n=f(n)$ …… ① 的 $f(n)$为：$f(n)=A_1a_1+A_2a_2+\cdots+A_ra_r+\cdots+A_ta_t$ …… ② 其中$1\leqslant r\leqslant t$，A_1、A_2、…、A_r、…A_t 都是 n 的未确定的函数，次

数都不大于$t-1$。

当$n=1、2、\cdots、r-1, r+1, \cdots, \quad t$时，$A_r$都等于0。故$A_r$应含有$t-1$个因式：$n-1, n-2, \cdots, n-(r-1), n-(r+1), \cdots, n-t$。因为$A_r$的次数不大于$t-1$，故可设

$$A_r=k_r(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r-1)\cdots(n-t) \qquad ③$$

式中k_r是未定常数。依次令$r=1, 2, \cdots, t$，类似地有式子：

$$A_1=k_1(n-2)(n-3)\cdots(n-t)$$

$$A_2=k_2(n-1)(n-3)\cdots(n-t)$$

……

$$A_t=k_t(n-1)(n-2)\cdots(n-t+1)$$

把这些式子代入②得到

$$f(n)=k_1(n-2)\cdots(n-t)a_1+k_2(n-1)(n-3)\cdots(n-t)a_2+\cdots+k_r(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r-1)\cdots(n-t)a_r+\cdots+k_t(n-1)\cdots(n-t+1)a_t$$

令$n=r$代入得

$$f(r)=a_r=k_r(r-1)\cdots(r-r+1)(r-r-1)\cdots(r-t)a_r$$

因为a_r不恒等于零，故得

$$k_r=\frac{1}{(r-1)\cdots(r-r+1)(r-r-1)\cdots(r-t)} \qquad ④$$

代入②得

$$f(n)=\frac{(n-2)\cdots(n-t)}{(1-2)\cdots(1-t)}a_1+\frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-t)}{(2-1)(2-3)\cdots(2-t)}a_2+\cdots+\frac{(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r-1)\cdots(n-t)}{(r-1)\cdots(r-r+1)(r-r-1)\cdots(r-t)}a_r$$

$$+\cdots+\frac{(n-1)\cdots(n-t+1)}{(t-1)\cdots(t-t+1)}a_t \qquad ⑤$$

此式满足条件①

设又有定义于自然数集上的多项式 $g(n)$，次数不大于 $t-1$，亦满足条件①，即

$$g(n)=a_n,\ n=1,2,\cdots,t \qquad ⑥$$

构成方程

$$f(n)=g(n) \qquad ⑦$$

此方程次数不大于 $t-1$，但有 $n=1,2,\cdots,t$ 等 t 个根，故⑦应为恒等式。即 $f(n)$是唯一的。

根据定理1，容易得到：

定理2 对于给定的 t 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_t$，存在无限多个多项式 $F(n)$，使

$$F(n)=a_n \qquad ⑧$$
$$n=1,2,\cdots,t$$

即是说，任意给出数列的前 t 项，则必存在无限多个多项式作为数列的通项公式。

证明：任意对给定的 t 个数增加若干项，例如：$a_1,a_2,\cdots,a_t,a_{t+1},\cdots,a_m$。($t<m$) 依定理1，存在唯一函数 $F(n)$，次数不大于 $m-1$，满足

$$F(n)=a_n,\ n=1,2,\cdots,m \qquad ⑨$$

因而 $F(n)$ 亦满足⑧。但因 $a_{t+1},\cdots,a_m$ 是任意给定的，故满足⑧的 $F(n)$ 为数无限。

推论 对于只含有 k 项的有限数列，存在无限多个通项公式，其中次数不大于 $k-1$ 的多项式的通项公式必唯一存在。

根据定理1，可得有限数列：89，95，78，90，82的通项公

式是：

$$a_n=f(n)=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)}\times 89$$

$$+\frac{(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)}\times 95$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-4)(n-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)}\times 78$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)}\times 90$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}\times 82$$

$$=-\frac{101}{24}n^4+\frac{609}{12}n^3-\frac{5059}{24}n^2+\frac{1385}{4}n-93$$

$$(n=1,2,3,4,5)$$

若取

$$a_n=-\frac{101}{24}n^4+\frac{609}{12}n^3-\frac{5059}{24}n^2+\frac{1385}{4}n$$

$$-93+m(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5),$$

其中 m 为任意常数，亦可作为已知有限数列的通项公式。

根据定理 1，很容易得到有限数列：3、6、9、12的通项公式为

$$a_n=f(n)=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}\times 3$$

$$+\frac{(n-1)(n-3)(n-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}\times 6$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}\times 9$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}\times 12=3n$$

$$(n=1,2,3,4)$$

例 求数列 4、1、3 的通项公式

解 由定理 1

$$a_n=\frac{(n-2)(n-3)}{(1-2)(1-3)}\times 4+\frac{(n-1)(n-3)}{(2-1)(2-3)}\times 1$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)}{(3-1)(3-2)}\times 3$$

$$=\frac{5n^2-21n+24}{2}\qquad (n=1,2,3)$$

另解 已知数列仅有三项，则必存在次数不大于 2 的多项式。设 $a_n=An^2+Bn+C$，则

$$\begin{cases}A+B+C=4\\4A+2B+C=1\\9A+3B+C=3\end{cases}$$

解得 $A=\frac{5}{2}$, $B=\frac{-21}{2}$, $C=12$

∴ $a_n=\frac{1}{2}(5n^2-21n+24)$.

练 习 一

1. 写出下列数列的一个通项公式，使它的前五项分别是下列各数：

① $0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \frac{24}{25}, \cdots\cdots$

② $1\frac{1}{3}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{3}{5}, 4\frac{2}{3}, 5\frac{5}{7}, \cdots\cdots$

③ $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{7}{8}, \frac{15}{16}, -\frac{31}{32}, \cdots\cdots$

④ 2，22，222，2222，22222，……

⑤ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \cdots\cdots$

⑥ 1，2+3，3+4+5，4+5+6+7，
5+6+7+8+9，……

⑦ $\sqrt{a}, \sqrt{a\sqrt{a}}, \sqrt{\sqrt{a\sqrt{a}}}, \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}, \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}}, \cdots\cdots$

2. 求数列 $\sqrt{11-2}$，$\sqrt{1111-22}$，$\sqrt{111111-222}, \cdots, \sqrt{\underbrace{111\cdots11}_{2n个1}-\underbrace{22\cdots2}_{n个2}}, \cdots$的通项公式

3. 下列数列中 $\boxed{}$ 处应填一个什么数？

① 3，7，15，$\boxed{31}$，63，127；

② 3，5，9，$\boxed{17}$，33，65；

③ 2，6，12，$\boxed{20}$ 30，42。

第二章　等差数列　等比数列

等差数列和等比数列是两种重要的、简单的常见数列。掌握它们的通项公式，不但是解决这两类数列的有关问题所必须的，而且会为解决某些特殊数列问题大开方便之门。在某种意义上说，这两种数列的通项公式、求和公式、以及建立这些公式的思想方法乃是寻求其它特殊数列的通项公式的重要的基石。

1. 等差数列及其通项公式

如果一个数列，从第2项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，则此数列叫做等差数列。这个常数叫做等差数列的公差，公差通常用字母d表示。在寻求其通项公式时，可以根据定义，研究数列的项与项之间以及数列的各项与其所对应的项数之间的内在联系，从中找出规律。

例1　已知等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，求a_n

解1　由定义

$$\begin{array}{r} a_2-a_1=d \\ a_3-a_2=d \\ \cdots\cdots \\ +)\ a_n-a_{n-1}=d \\ \hline a_n-a_1=(n-1)d \end{array}$$

$$\therefore \quad a_n=a_1+(n-1)d$$

此解法系根据等差数列的定义，将$n-1$个等式相加后，消去中间项。这种累加消去法不但是导出等差数列的通项公式的有效方法，同时它还是寻求某些特殊数列的通项公式的一种引人注目的方法。