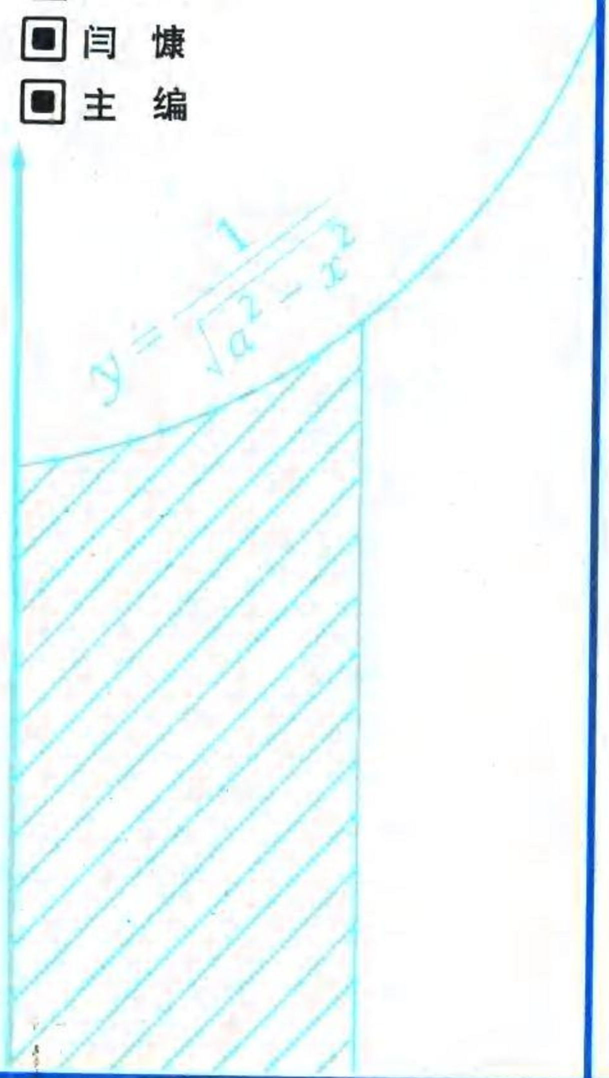
高等学校试用教材

王拴明
闫　慷
主　编



微积分

『经济应用数学』

经济科学出版社

试用教材

经济应用数学

微积分

主编　王拴明　闫　慷

经济科学出版社

一九九六年·北京

图书在版编目(CIP)数据

微积分/王拴明,闫慷主编. —北京:经济科学出版社,1996.8

ISBN 7-5058-0984-9

Ⅰ.微… Ⅱ.①王… ②闫… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 11107 号

责任编辑:吕亚亮
责任校对:段健瑛
封面设计:王 坦
版式设计:代小卫
技术编辑:舒天安

微 积 分
王拴明、闫 慷 主编

*

经济科学出版社出版、发行 新华书店经销
北京地质印刷厂印刷

*

850×1168 毫米 32 开 17 印张 440000 字
1996 年 5 月第一版 1996 年 8 月第一次印刷
印数:00001—12000 册
ISBN 7-5058-0984-9/G·141 定价:21.60 元

前　言

为满足财经类高等学校函授基础数学教学的需要，我们编写了经济应用数学《微积分》教材．本书可供财经类成人大专院校、函大、夜大以及财经类大专院校的学生使用，也可作为微积分自学者的参考书．

在编写过程中，结合学员的特点，本着便于自学的指导思想，我们力求做到：对每个问题的阐述条理清楚，重点突出，概念明确，深入浅出．对于读者在自学中可能发生困难的地方都作了比较详尽的分析和推导．考虑到财经专业的特点，我们尽可能联系经济方面的实际问题，介绍一些有关的经济概念和实例．和其他教材相比，例题和习题配备的也较多，且每章基本内容之后均附有本章的内容提要，便于学员复习及掌握重点．

本书由王拴明、闫慷主编．第一章由荣富成编写；第二、四、七（§7.1—§7.8）、九章由闫慷编写；第三、八章由王拴明编写；第五、七（§7.9）章由张素卿编写；第六章由宁存法编写，闫慷总纂，最后由王拴明审定．

由于我们水平有限，加之编写时间仓促，书中在内容的取舍和体系的安排、例题和习题等方面定有很多错误和不妥之处，敬希广大读者批评和指导．

编　者

1996年5月

目　　录

注:书中带 * 号的内容可作为选学内容.

第一章 函　　数

在自然科学、工程技术、经济学中，函数是被广泛应用的数学概念之一，也是微积分中最重要的基本概念之一和研究的主要对象.

中学数学应用"集合"与"对应"已经给出了函数概念，并在此基础上讨论了一些简单函数的性质. 本章我们将对中学数学已讲过的函数及其性质进行复习，根据课本的需要，对函数作必要的补充，为今后学习各章内容打下基础.

§1.1 函　　数

(一)变量与区间

所谓变量，就是变化着的量，可以变动的量，说的更详细点，就是在某一变化过程中可以取不同数值的量.

正如把静止看作运动的特例一样，我们也把常量看成一种特殊的变量. 即在所考察的过程中，始终只取同一数值的变量.

例如，在讨论某种产品的总成本时，我们把总成本分成两部分：一部分是固定成本，它不随产品产量的增减而变化，因此它是一个常量；另一部分是变动成本，它随着产品产量的增减而增减，因此它是一个变量.

变量的每一个值都是一个数，在本课程中，如无特别指明，变量的每一个数指的都是实数. 因而可以用数轴上的一个点来代表它. 如果量 x 是常量，则用数轴上的一个定点来表示；如果量 x 是变量，则用数轴上的动点来表示.

关于集合的初步知识，读者在中学数学中已经学习了，本书不再重述.

全体实数组成的集合称为实数集，记为 R. 它表示整个实数轴.

区间是特殊的实数集 R 的子集，它是数轴上一“段”直线上的所有点构成的集合，即介于某两个实数 a 与 $b(a<b)$ 之间的全体实数的集合. 区间一般可分为下面几类：

(1)满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的开区间，记作 (a,b)，见图 1-1. 即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$

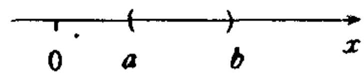


图 1-1

(2)满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的闭区间，记作 $[a,b]$，见图 1-2. 即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

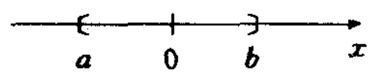


图 1-2

(3)满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的半开区间，记作 $(a,b]$ 或 $[a,b)$，分别见图 1-3 和图 1-4. 即

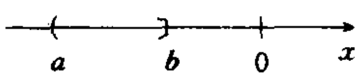


图 1-3

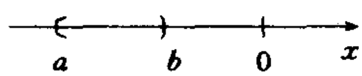


图 1-4

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\} \quad 或 \quad [a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$$

以上三类区间两个端点 a 与 b 都是有限数，故称为有限区间. 有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$ 称为区间的长.

除有限区间外，还有无限区间，无限区间有下面几类：

(4) $(a,+\infty)=\{x|a<x\}$

$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$

(5) $(-\infty,b)=\{x|x<b\}$

$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$

(6) $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$

即表示全体实数 R 的集合.

下面介绍邻域概念：

微积分学中讨论问题时，往往要在某点研究函数的某个性质，但又不能孤立地从这点着手，而必须从这点附近全面看才能收效，因此需要掌握邻域概念.

设 x_0 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，满足不等式

$$|x-x_0|<\delta$$

的所有实数 x 的集合称为点 x_0 的 δ 邻域，点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 上述不等式与不等式

$$-\delta<x-x_0<\delta \text{ 或 } x_0-\delta<x<x_0+\delta$$

等价，因此满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的所有实数 x 的集合就是开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. 点 x_0 的 δ 邻域也就是以点 x_0 为中心长度为 2δ 的开区间.

例如 $|x-1|<\frac{1}{7}$，即为以点 $x_0=1$ 为中心，以 $\frac{1}{7}$ 为半径的邻域，也就是开区间 $(\frac{6}{7}, \frac{8}{7})$.

在点 x_0 的 δ 邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内去掉 x_0，即集合

$$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

称为以 x_0 为中心，半径为 δ 的去心邻域，也就是区间 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$.

例如 $0<|x-2|<1$ 即为以 $x_0=2$ 为中心，半径为 1 的去心邻域 $(1,2)\cup(2,3)$.

（二）函数的概念

现实世界中有许许多多变化着的量之间是相互联系相互制约的，因此我们不但要研究事物的量的变化，而且更重要的要研究不同的量的变化之间的相互依赖关系，而函数正是反映变量之间依存关系的一个数学概念.

定义 1.1 设 D 和 M 是两个非空实数集合，f 是一个对应规

则，如果对于 D 中每一个 x，按照对应关系 f，在 M 中都有唯一确定的 y 值与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在集合 D 上的一个函数，记作 $y=f(x),x\in D$.

x 称为自变量，y 称为因变量，把因变量 y 也称为自变量 x 的函数.

集合 D 为自变量 x 的取值范围，称其为函数的定义域.

由函数的定义可知，对于集合 D 中的每一个 x_0 值，都有集合 M 中唯一确定的 y_0 值（或 $f(x_0)$）与之对应，此时，我们就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义，并称 y_0（或 $f(x_0)$）为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，全体函数值的集合称为函数的值域.

函数概念是反映自变量与因变量之间的相互依赖关系. 函数定义涉及到三个因素：函数的定义域、值域和对应规则. 但是很明显，值域是随着函数的定义域和对应规则而变化的，对于一个函数来说，只要定义域和对应规则确定后，值域也就随之确定，并且在定义域中任给一个自变量的值，就可以求出所对应的函数值. 因此，定义域和对应规则是确定函数的两大要素.

根据函数的两大要素可以得到判别两个函数是否相同的方法：即只要判断两个函数的定义域和对应规则是否相同就可以了. 若两个函数的定义域和对应规则都相同，那么这两个函数就相同；若定义域或对应规则之一不相同，那么这两个函数就不相同. 例如 $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$，虽然形式不同，但它们的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，对应规则都是：不论 x 取任何值时，y 都恒等于 1（因为有三角恒等式 $\sin^2x+\cos^2x=1$），因此，它们是相同的函数. 又如 $y=2\lg x$ 与 $y=\lg x^2$，$y=2\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$；$y=\lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，由于定义域不同，所以两个函数不相同. 而对于 $y=2\lg|x|$ 与 $y=\lg|x|^2$ 来说，由对数恒等式知道两个函数的对应规则相同，定义域也都是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因而它们也是相同的函数.

这里还应当指出，在函数的定义中并未规定自变量与因变量

是用什么字母表示，只要两个函数的定义域及对应规则相同，不论自变量与因变量采用什么字母表示，我们都认为是相同的函数．例如 $S=\pi r^2, u=\pi v^2, y=\pi x^2$ 都是相同的函数．因为只要将右边的字母看作自变量，左边字母看作因变量，那么它们的定义域和对应规律就完全相同．

例 1　下列函数是否相等，为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 与 $\varphi(x)=x-2$

(2) $f(x)=|x|$ 与 $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$

解：(1) 不相等，因为定义域不同，$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$；$\varphi(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$．

(2) 相等，因为对应规则相同，定义域也相同，均为 $(-\infty,+\infty)$．

例 2　设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f(\dfrac{1}{2})$，$f(-x)$，$f(\dfrac{1}{x})$，$f(x+1)$，$f(x^2)$．

解：由于 $f(x_0)$ 就是函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时的函数值，因此将 x_0 代入 $f(x)$ 的表达式中，即可求出 $f(x_0)$，所以有

$$f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1$$

$$f(\frac{1}{2})=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x}$$

$$f(\frac{1}{x})=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=-\frac{x}{2+x}$$

$$f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

给定一个函数后，要研究它的变化规律，首先应该确定函数的定义域. 除了在解决实际问题时，根据变量的实际变化范围来确定函数的定义域外，在数学中，当函数 $y=f(x)$ 通过一个表达式表示时，我们规定其定义域就是使该式子有意义的自变量的全体. 因此，在确定函数的定义域时，必须注意下面几点：

(1)函数式里如果有分式，则必须除掉使分母为零的一切自变量的值；

(2)函数式中如果有偶次根式，则根号中的整个式子必须大于或等于零；

(3)函数式中如果有对数记号，则真数必须是大于零的数；

(4)函数式中如果有正切或余切函数，则在正切、余切符号下的式子的值不能等于 $K\pi+\frac{\pi}{2}$，$K\pi$　$(K=0,\pm1,\pm2\cdots)$.

(5)函数式中如果有反正弦和反余弦函数，则在反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于 1.

(6)如果函数的表达式是由若干项组成的，则它的定义域是各项定义域的公共部分.

例 3　求函数 $y=\frac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域.

解：要使函数有意义，须满足

$$\begin{cases}3x-2>0\\ \lg(3x-2)\neq0\end{cases}\quad 即\begin{cases}3x-2>0\\ 3x-2\neq1\end{cases}$$

由 $3x-2>0$ 解得　$x>\frac{2}{3}$

由 $3x-2\neq1$ 解得　$x\neq1$

所以函数的定义域为 $(\frac{2}{3},1)\cup(1,+\infty)$

例 4　求函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^3}$ 的定义域.

解：要使函数有意义，须满足

$$\begin{cases}1-x^2\geqslant0\\ x^3\geqslant0\end{cases}$$

由 $1-x^2\geqslant 0$ 得 $|x|\leqslant 1$.

解得 $\quad -1\leqslant x\leqslant 1$

由 $\quad x^3\geqslant 0\quad$ 解得 $\quad x\geqslant 0$

所以函数的定义域为$[0,1]$.

例 5 某工厂生产某种产品,每月最多生产 10000 件,其生产总成本 c 是产量 x 的函数

$$c=c(x)=8+0.1x(\text{万元})$$

试求它的定义域.

解:从数学表达式 $c=8+0.1x$ 来看,使式子有意义的 x 的取值范围是全体实数$(-\infty,+\infty)$,但是从函数的实际意义来看,产量 x 不能为负值,且知最大月产量为 10000 件,所以它的定义域应该是$[0,10000]$.

(三)函数的表示法

微积分的主要任务是研究函数的性质,讨论函数性质或用函数解决问题,必须有办法把函数表示出来,表示函数的方法有许多,最常见的有:解析法、列表法和图象法.

1. *解析法(或公式法)*

解析法就是把自变量和函数之间的对应关系用公式表示出来.这个公式称为函数的解析表达式.

例如 $\quad y=\frac{1}{2}gt^2,V=\frac{4}{3}\pi R^3,y=\sqrt{1+\sin x}$等都是用解析法表示函数的.

微积分中所涉及的函数关系大部分采用这一方法表达.

这里需要指出的是,函数在用解析表示时,对于自变量的一切值,两个变量之间的对应规则不一定用一个解析式表示.常常会遇到这种情况,对于自变量的某一部分值,对应规则应用某一解析式,而对自变量的另一部分值,对应规则用其他解析式,即定义域的各部分分别用不同的解析式表示.这类函数称为“分段函数”.

例如

$$y=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$$

当 $x<0$ 时，解析式为 $y=-x$；当 $x\geqslant 0$ 时，解析式为 $y=x$（见图 1-5）.

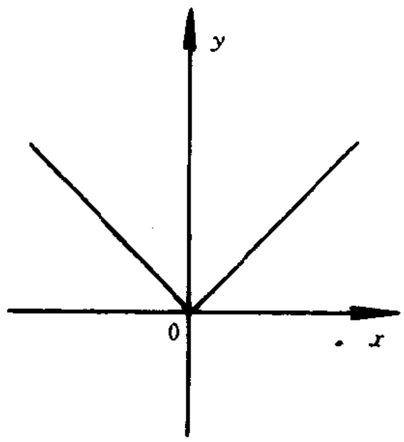


图 1-5

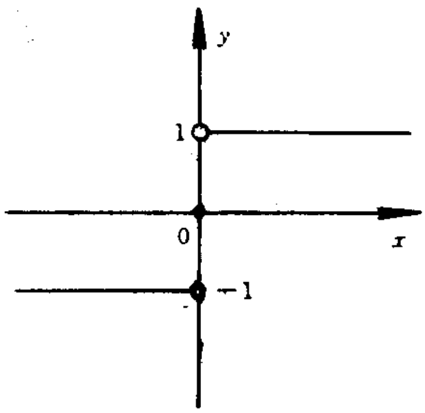


图 1-6

又如

$$y=f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

也是一个分段函数. 见图 1-6.

关于分段函数应注意：

(1)因为函数式子是分段表示的，所以各段的定义域必须明确标出；

(2)对分段函数求函数值时，不同点的函数值应代入相应范围的公式中去求.

例 6　设

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x-1 & x>0\end{cases}$$

求：(1)$f(x)$的定义域

(2)$f(-1), f(\frac{1}{2}), f(1), f(0)$

解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其图形见图 1-7.

(2) $f(-1)=(x+1)|_{x=-1}=0$

$f(\frac{1}{2})=(x-1)|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$

$f(1)=(x-1)|_{x=1}=0$

$f(0)=0$

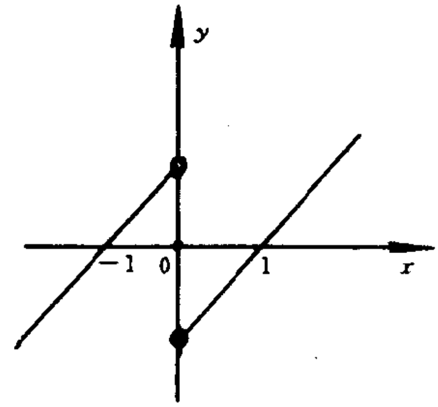


图 1-7

例 7　已知函数

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & 0\leqslant x\leqslant 2 \\ x^2 & 2<x\leqslant 4 \end{cases}$$

求 $f(x-1)$.

解：$$f(x-1)=\begin{cases} (x-1)+2 & 0\leqslant x-1\leqslant 2 \\ (x-1)^2 & 2<x-1\leqslant 4 \end{cases}$$

即

$$f(x-1)=\begin{cases} x+1 & 1\leqslant x\leqslant 3 \\ (x-1)^2 & 3<x\leqslant 5 \end{cases}$$

例 8　某运输公司规定货物吨公里运价为：在 10 公里以内，每公里 5 元，超过 10 公里，超过部分每公里为 3 元，求运价与里程之间的函数关系.

解：设运价为 y，里程为 x，根据题意，可得：

$$y=\begin{cases} 5x & 0<x\leqslant 10 \\ 5\times 10+3(x-10) & x>10 \end{cases}$$

这是一个分段函数，定义域为 $(0,+\infty)$.

注意：分段函数是用几个解析式合起来表示一个函数，绝不能看成是几个函数.

2. 表格法

表格法是将函数定义区间内自变量 x 的值与所对应的函数值按照一定顺序，列成表格形式来反映函数对应规律的一种方法.

例如：对数表、三角函数表、价目表、利息表和许多会计报表都