应用数学丛书

图论

王朝瑞 编著

国防工业出版社

应用数学丛书

图　　论

王朝瑞　编著

国防工業出版社

内 容 简 介

本书是图论的基本知识，全书共十四章，前十章介绍图论的基本理论，内容有：图，树，环路与环路空间，断集与断集空间，图的矩阵表示，最短通路与最小树，平面图，匹配，色数，有向图及其矩阵表示；后四章介绍图论在电网络，运输网络，流图与信号流图和开关网络中的应用。本书对工程技术中经常用到的环路、断集和图的矩阵表示作了较为详细的介绍。

本书可供无线电和电子技术方面的工程技术人员、无线电和计算机专业的高年级学生和研究生及有关工程技术人员参考。

应用数学丛书

图　论

王朝瑞　编著

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$850\times1168^{1}/_{32}$　印张 9　233 千字

1985年 5 月第一版　1985年 5 月第一次印刷　印数：00,001—10,300册

统一书号：15034·2757　　定价：1.85元

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术领域的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成的。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学，应用数学有关领域的基础介绍，应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　言

图论有过一个不寻常的发展经历，最初是以难题的面貌出现在民间的数学游戏之中。1736年欧拉引入“图”的概念解决了著名的哥尼斯堡七桥问题，成为图论的创始人。1847年基尔霍夫在解决电路理论中求解联立方程的解时引入了“树”的概念，成为第一个把图论应用到实际问题中的人，可惜他的发现长期没有被人们所重视。直到近几十年来，由于计算机技术的飞速发展和运筹工作者研究实际问题的结果，使得图论有了惊人的发展，成为一门新兴的独立学科。

图论的内容十分丰富，并且在许多科学领域中都有应用，因此要把这门学科的一切重要方面均写在一本书内是不可能的。本书是为从事无线电和电子技术的工程技术人员写的，并且也是针对无线电和计算机专业的高年级学生和研究生写的。是以介绍图论基本理论为主，因此，在选择主要材料和深度广度方面，试图保持中等水平，学过线性代数的读者应当都能理解。

这本书虽然是为工程技术人员编写的，但仍使概念的叙述简单明了，定理的证明严谨。在应用上，主要介绍图论在解决电网络、运输网络等问题中的方法。

全书共十四章，前十章讨论图论的基本理论，内容有：图，树，环路与环路空间，断集与断集空间，图的矩阵表示，最短通路与最小树，平面图，匹配，色数，有向图及其矩阵表示；后四章讨论图论在电网络，运输网络，流图和信号流图以及开关网络等方面的应用。

本书中“割集矩阵的可实现性”一节引用了新疆大学数学系赖在抗同志编写的图论讲义中的内容，谨此致谢。

限于作者的水平，书中错误、不妥处自属难免，敬请读者批评指正。

目　录

第一章　图

§1.1　引　　言

早期图论与“数学游戏”有密切关系，1736年欧拉解决了当时很有名的哥尼斯堡七桥问题。哥尼斯堡城(即现在的加里宁格勒)有一条普莱格尔河，河中有两个小岛，有七座桥把普莱格尔河中的两个小岛与河两岸联结起来，如图 1-1 所示。

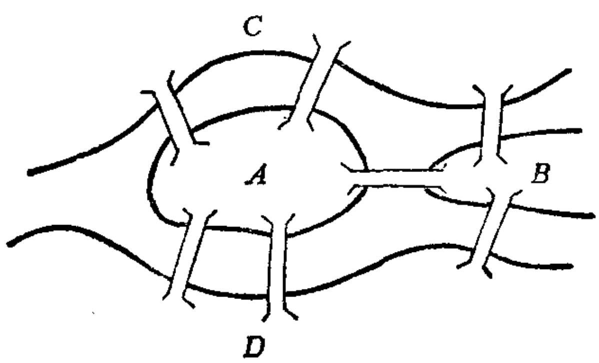


图　1-1

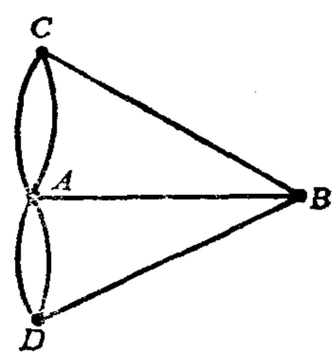


图　1-2

有人提出这样一个问题：从河岸或岛上任一地方开始，能否通过每一座桥一次且仅一次回到原地？

这个问题虽然是一个游戏，但是它的数学模型有实际意义。

欧拉用四个点表示两岸和两个小岛，用两点间的联线表示桥，如图 1-2 所示。于是问题转化为：在这个图中，从任何一点出发，能否通过每个线段一次且仅仅一次又回到出发点。

直观上不难发现，如要回到原来的地方，必须从一条边进入，从另一条边出去，只有一进一出才行。这就是说，要求与每个点相关联的边数均为偶数。从图 1-2 中可以看到，这个图的所有的点均不与偶数条边相关联，所以七桥问题无解（详细讨论见第三章)。

1859年汉密顿发明了一种游戏，这种游戏用一个实心的十二

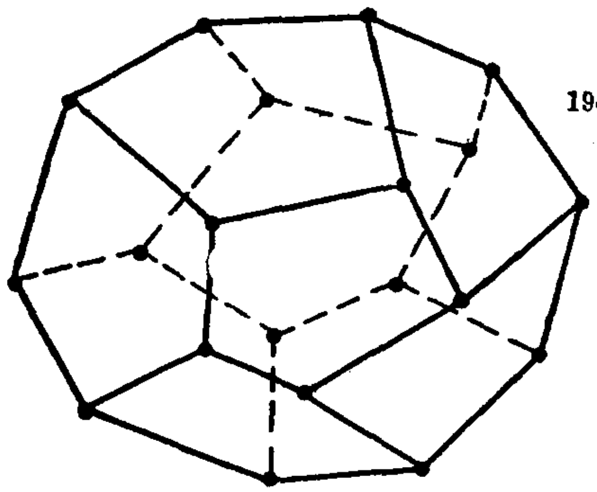


图 1-3

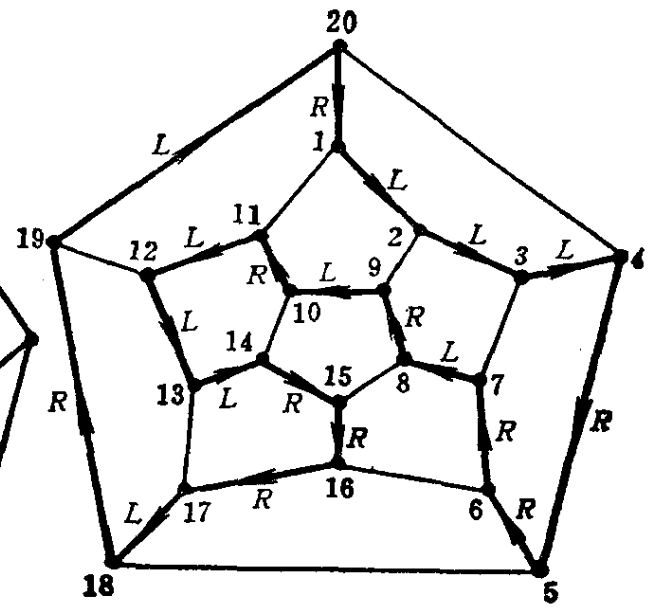


图 1-4

面体（图1-3），它的二十个顶点标以世界上有名的城市的名子。要求游戏者从某一城市出发，遍历各城市一次，且仅一次，最后返回原地。这就是所谓的“绕行世界”问题。

从图论的数学论述来观察，游戏的目的是在十二面体的图中找一条通过每个顶点的回路（图 1-4 中的粗线）。十二面体的每个面都是 5 边形，沿着十二面体的棱到达每个顶点时都有两种道路可选择：一是向左，一是向右。向左的一条用 L 表示，向右的一条用 R 表示。LR 表示第一步向左转，第二步向右转，其他同理类推。

“绕行世界”问题的解决是很有趣的，下面我们给予简单介绍。

不难验证下面的等式成立：

（1）$(LL)R=L(LR)$

（2）$L^5=R^5=1$

（3）$RL^2R=LRL \qquad LR^2L=RLR$

（4）$LR^3R=L^2 \qquad LR^3L=R^2$

$L^5=1$ 的意义是连续向左转 5 次回到原来的出发点，同样，$R^5=1$ 则是连续向右转 5 次回到原来的出发点。

根据上面的等式，可以得出：

$$
\begin{aligned}
1 &= R^5 = R^2R^3 = (LR^3L)R^3 = (LR^3)(LR^3) \\
&= (LR^3)^2 = (LR^2R)^2 = [L(LR^3L)R]^2 \\
&= (L^2R^3LR)^2 = [L^2(LR^3L)RLR]^2 \\
&= (L^3R^3LRLR)^2 = (LLLRRRLRLR)^2 \\
&= LLLRRRLRLRLLLRRRLRLR
\end{aligned}
$$

“四色猜想”是图论中也是近代数学中没有解决的最著名的问题。即在一个平面或球面上的任何地图能够只用四种颜色来着色，使得没有两个相邻的国家有相同的颜色。每个国家均必须用一个单连通域构成，两个国家相邻是指它们有一段公共的边界线(如果只在一点相连接，则不算是相邻的)。此问题只要几分钟就可以对不懂数学的人讲清楚，但是数学家们化了一个多世纪的时间始终没有能彻底解决这个问题。直到1976年美国的阿普尔、黑肯和考齐等三人依靠电子计算机的帮助，用1200个小时证明了这个猜想是正确的。但是这个证明并不理想，数学家们仍然希望不依靠计算机给出证明。

“四色猜想”虽然长期没有解决，但是在解决这个难题的漫长过程中，却发展了图论的许多新的方面。

早期图论虽然与数学游戏有关，但是许多问题确实有实际背景。基尔霍夫和凯莱在图论上的新发现，都各自有实际的根源。基尔霍夫把一个电网络和其中的电阻、电容、电感等加以抽象化，用一个由点和线组成的相应的组合结构来代替原来的电网络。这样一来，基尔霍夫实际上是把每个电网络用一个“图”来代替。基尔霍夫为求解一类线性方程组而发展了树的理论。基尔霍夫证明，解这个方程组不需要分别考虑电网络的图中的每一个回路。他指出：只要考虑这个图的任何一棵“生成树”所决定的基本回路就够了。凯莱应用图论研究了有机化学中的分子结构问题。

二十世纪后，图论广泛应用于许多科学领域，诸如物理学、化学、信息论、控制论、运筹学、网络理论等。特别是随着计算机科学的发展，图论也得到迅速的发展，成为一个十分活跃的数

学分支。

§1.2 图

1. 图的概念

一个图G是由有p个顶点的非空有限集合$V=V(G)$和预先给定由V中不同顶点的q个无序对构成的一个集合$E=E(G)$组成，记作$G=(V, E)$。E中的每个顶点对(u, v)称为G的边，如果用e表示这条边，则记$e=(u, v)$或简记为$e=uv$，称u，v是边e的端点，且称u和v是邻接的顶点。

图的顶点可以表示具体事物，边表示事物之间的联系。例如图 1-5 所示的北京、上海、南京、杭州、西安、郑州、重庆、武汉、长沙、广州这十个城市和它们之间的航线就是一个图。顶点表示城市，边表示两个城市间有直达航线。

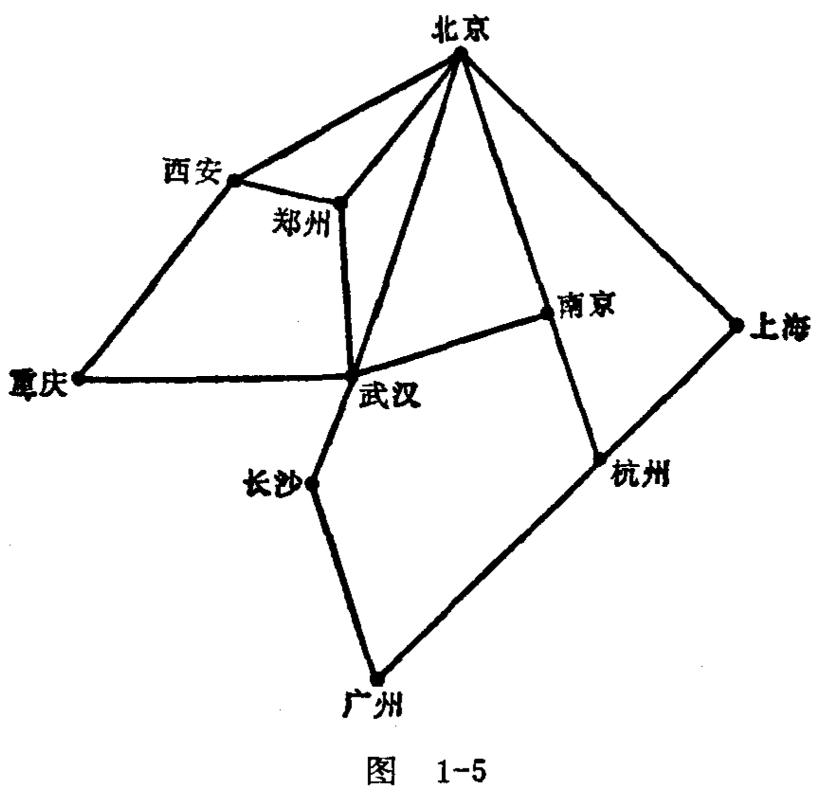


图 1-5

图 1-5 所示的图$G=(V, E)$的顶点集合是：

$V=${北京，上海，南京，杭州，西安，郑州，重庆，武汉，长沙，广州}，

边的集合是：

$E=\{$(北京，西安)，(北京，郑州)，(北京，南京)，
(北京，上海)，(北京，武汉)，(上海，杭州)，
(南京，杭州)，(南京，武汉)，(武汉，郑州)，
(武汉，长沙)，(武汉，重庆)，(长沙，广州)，
(广州，杭州)，(重庆，西安)，(西安，郑州)$\}$。

一个家族中的成员，男人之间的父子关系，亦可以用图来描述。顶点表示人，边表示两人之间的父子关系，见图1-6。

描述一个图的图形不是唯一的。表示顶点的点和表示边的线的相对位置并不重要，一个图的图形仅描绘出它的顶点和边之间所保持的关联关系。

图论中大多数定义和概念是根据图的表示形式提出的。一条边的端点称为与这条边关联，若两条不同的边与一个公共的端点关联，则称这两条边是邻接的。在图 1-7 所示的图中，顶点 u 与顶点 v 是邻接的，而 u 与 w 不邻接；边 e_1 和 e_2 是邻接的，而 e_1 和 e_3 不邻接。虽然 e_1 和 e_3 在图形中相交，但是它们的交点并不是这个图的一个顶点。

若联结两个顶点有不止一条边，这些边称为多重边，端点重合为一点的边称为环。

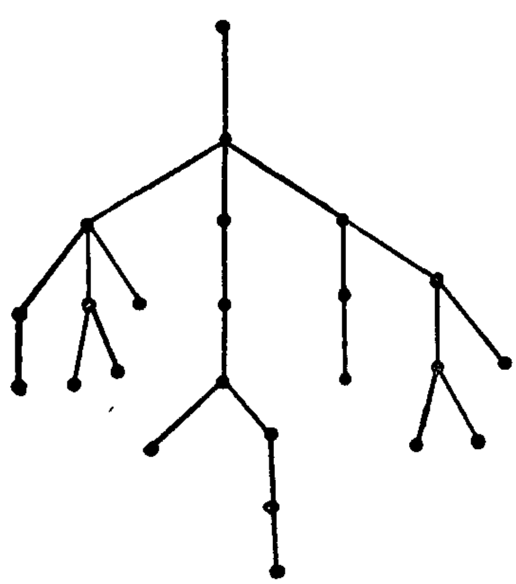


图 1-6

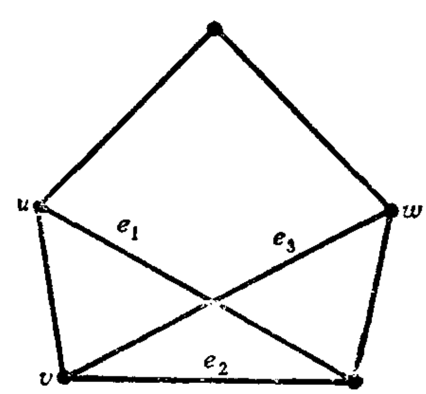
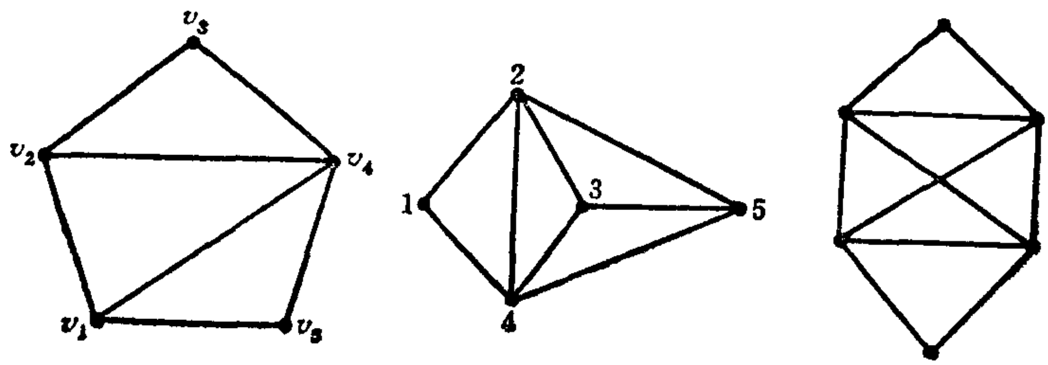


图 1-7

没有环也没有多重边的图称为**简单图**。

一个图如果它的顶点集合与边的集合都有限，称为**有限图**。本书只研究有限图，而且把它简称为图。没有边的图称为**空图**，记作 ϕ。

一个有 p 个顶点和 q 条边的图称为（p，q）图，一个（p，q）图，若它的 p 个顶点标以不同的名称，则称为**标定的**，否则称为**非标定的**。如图 1-8 中的 G_1 和 G_2 是标定的，而 G_3 是非标定的。

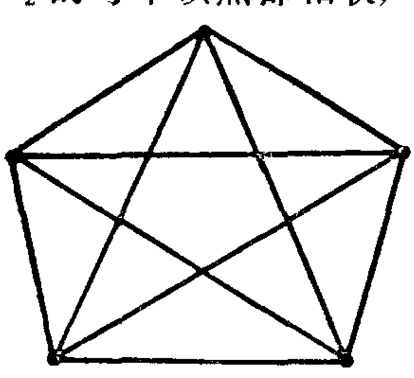


G_1　　G_2　　G_3

图 1-8

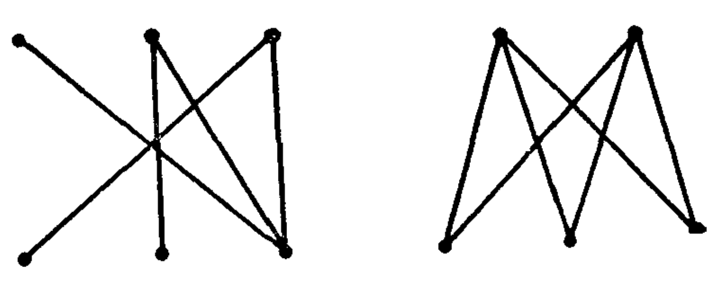
每一对不同的顶点均有边相联的简单图称为**完全图**，有 n 个顶点的完全图记作 K_n。图 1-9 是 K_5 的图形。

图 G 的顶点集合如果能分成两个子集 V_1 和 V_2，使每一条边有一个端点在 V_1 中，另一个端点在 V_2 中，则称此图为**二分图**（或称**二部图**），记作 $G=(V_1, V_2; E)$。如果 V_1 的每个顶点与 V_2 的每个顶点都相联，则称为**完全二分图**。若 $|V_1|=m$，$|V_2|=$



K_5

图 1-9

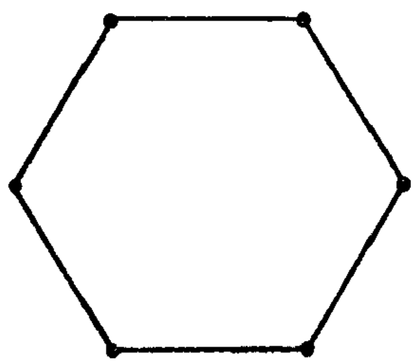


(a)二分图　　(b)$K_{2,3}$

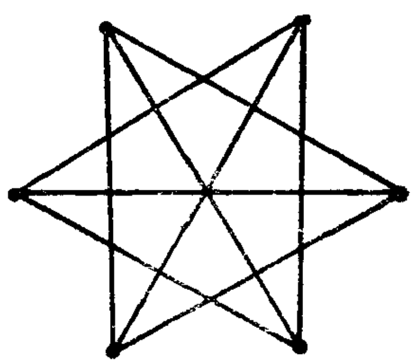
图 1-10

n（符号$|V|$表示集合V中元素的个数），则完全二分图记作$K_{m,n}$。图1-10中分别给出二分图和完全二分图$K_{2,3}$的图形。

一个图G的补图$\overline{G}$也是以$V(G)$为顶点集的一个图，但是两个顶点在$\overline{G}$中邻接当且仅当它们在G中不邻接。如图1-11(b)所示的图是图1-11(a)所示的图的补图。



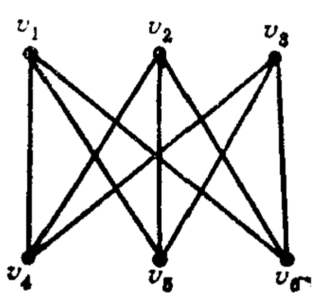
(a)



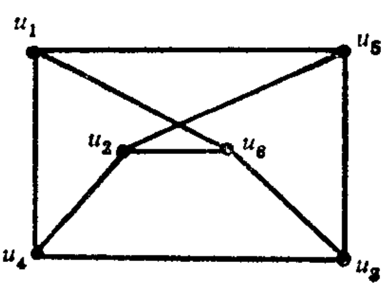
(b)

图 1-11

若在两个图G和H的顶点集之间存在一个保持邻接性的一一对应，则称它们是同构的，记作$G\cong H$，有时也记作$G=H$。如图1-12的G和H在对应$v_i\to u_i$下是同构的。



G



H

图 1-12

2．子图

所有的顶点和边都属于图G的图称为G的子图。含有G的所有顶点的子图称为G的生成子图。

设V_1是V的一个非空子集，以V_1为顶点集，以两端点均在

V_1 中的边的全体为边集的子图称为 G 的**导出子图**，记作 $G[V_1]$。导出子图 $G[V\backslash V_1]$ 记为 $G-V_1$，它是从 G 中删去 V_1 中的顶点以及与这些顶点相关联的边所得到的子图。若 $V_1=\{v\}$，则把 $G-\{v\}$ 简记为 $G-v$，称为**主子图**。在图1-13中，G_1 是 G 的生成子图，G_2 是 G 的导出子图，G_3 是 G 的主子图。

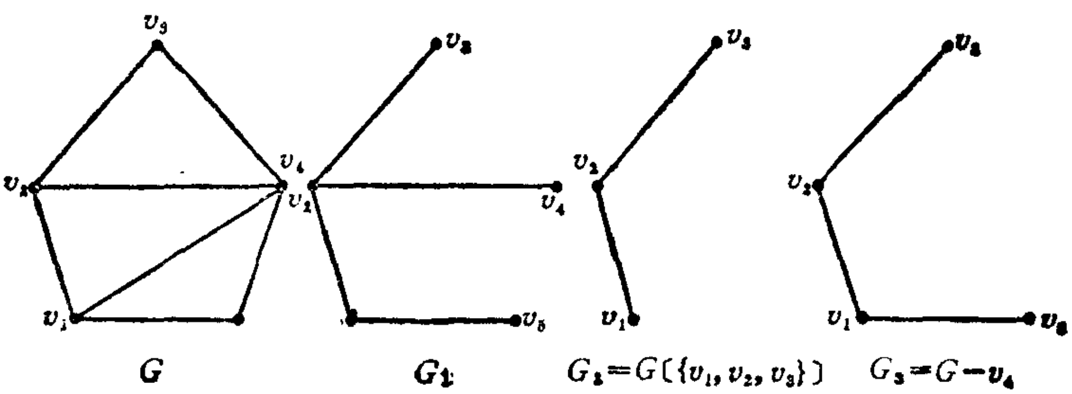


图 1-13

设 E_1 是 E 的非空子集，以 E_1 为边集，以 E_1 中边的端点的全体为顶点集所组成的子图称为**边导出子图**。边集为 $E\backslash E_1$ 的 G

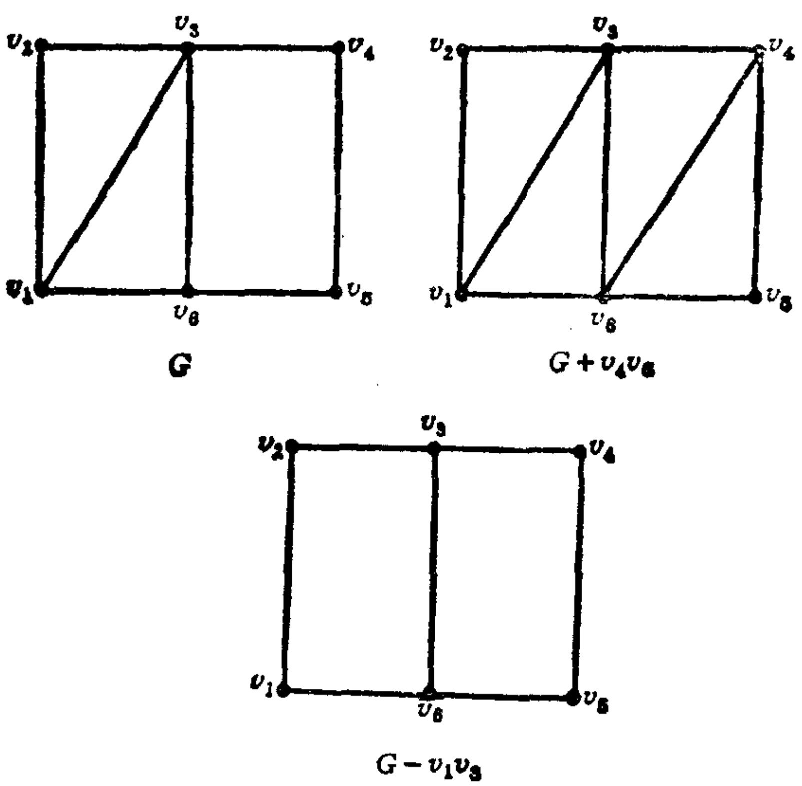


图 1-14

的生成子图简记为$G-E_1$，它是从G中删去E_1中的边所得到的子图。

类似地，在G上增加一个边集E_1所得到的图记为$G+E_1$。若$E_1=\{e\}$，则用$G-e$和$G+e$来代替$G-\{e\}$和$G+\{e\}$。图1-14给出了这些不同类型的子图。

§1.3 顶点的度

图G中和一个顶点v_i关联的边的数目叫做顶点v_i的度，记作$\deg v_i$。

定理1.1 设G是一个(p, q)图，那么G的各个顶点度的和是边数的二倍，

$$\sum_{v_i\in V(G)} \deg v_i = 2q \tag{1.1}$$

证明 因为每一条边与二个顶点关联，所以加上一条边就使得各点度的和增加2（注意：在计算顶点的度时，环算做两条边）。

推论1.1 在任何一个图G中，度为奇数的顶点的数目是偶数。

证明 设V_1和V_2分别是G中度为奇数和度为偶数的顶点集。由定理1.1

$$\sum_{v\in V_1} \deg v + \sum_{v\in V_2} \deg v = \sum_{v\in V} \deg v = 2q$$

由于$2q$和$\sum\limits_{v\in V_2} \deg v$均为偶数，故知$\sum\limits_{v\in V_1} \deg v$也必为偶数，即$|V_1|$为偶数。

在一个(p, q)图中，对每个顶点v均有$0\leqslant \deg v\leqslant p-1$。若$\deg v=0$，则称$v$是孤立点；若$\deg v=1$，称$v$是一个悬挂点。

如果图G的所有顶点的度均相等，则称G为正则的；顶点的度均为r的正则图称为r度正则的。