多刚体系统动力学

袁士杰　吕哲勤　编著

北京理工大学出版社

多刚体系统动力学

袁士杰　吕哲勤　编著

北京理工大学出版社

前言

现代科学和工程技术提出了许多复杂系统的动力学问题，各种车辆、机械、机器人、水下工作机、航天器等的研制都需要在制造样机以前对系统进行运动学和动力学分析、结构参数的综合优化和全数字仿真，否则将可能失败，造成巨大浪费。但是，对这类复杂系统的运动学和动力学分析与综合优化，存在不少困难，例如，在运动学分析中遇到的是系统各部件的大位移运动和空间非线性关系，在构造动力学方程时面临繁重的代数和微分运算，而且由于方程的非线性致使不可能求得封闭的解析解。因此，利用计算机解决复杂系统的分析和综合问题成为近20年来一般力学和机构设计等领域的一个重要的并且取得迅速进展的研究方向。所提出的任务是：（1）建立系统的运动学和动力学模型并且开发相应的软件系统，用户只需要输入基本数据，计算机将自动列写出所需要的方程；（2）建立有效的稳定的数值算法，自动求解运动学和动力学方程；（3）提供计算机仿真结果的图形输出，能将分析结果传送给用户。大量的文献提出了各种研究方法，有些方法已经发展得相当完善；70年代以来一些国家开发了相应的大型通用软件，成功地应用于工程实际。多刚体系统动力学就是在这一背景下，在经典力学的基础上发展起来的一个新的学科分支，它的研究对象是由多个刚体连接构成的系统，它的主要任务是研究建立系统的适用于计算机的动力学模型的方法，由于数值解的方便与否取决于方程本

身，在研究建模方法时，常常需要考虑数值算法。

本书所选编的内容力求较全面而系统地介绍当前多刚体系统动力学各主要研究方向的全貌。在第一章中研究多刚体系统的牛顿-欧拉方法，讲述了刚体运动学和动力学基础知识，将单个刚体的牛顿-欧拉方程推广到多刚体系统，着重介绍了希林(Schiehlen)等人的工作。在第二章中研究多刚体系统的拉格朗日方程方法，主要是豪格(Hang)等人的工作。介绍了欧拉参数和选用欧拉参数作为转动广义坐标，以拉格朗日方程作为力学原理建立多刚体系统动力学模型的方法；还研究了与建模有关的某些数值计算方法。在第三章中研究罗伯逊-维登伯格（Roberson-Wittenburg）方法，这种方法的主要特点是利用图论中的一些概念描述多刚体系统的结构特征，因而所得到的公式适用于各种不同结构的系统。引入图论工具是多刚体系统动力学研究的一个重大进展。第四章研究凯恩(Kane)方法。凯恩方法着眼于建立动力学方程的一般方法，其特点是利用伪速度作为变量描述系统的运动，对某些复杂的多自由度系统的动力学分析，用这种方法进行计算机符号推导和分析计算，步骤减少，效率较高。第五章研究高斯最小拘束原理方法。由于变分方法不需要建立系统的运动微分方程，可以通过各种有效的数学规划方法寻求泛函极值而确定系统的运动规律，因此，这种方法提供了进行系统动力学分析的一条有效的新途径。对于本书所用到的某些数学工具，例如矢量和张量的代数运算、欧拉参数、图论、齐次坐标和齐次变换等，都在各有关章的开头集中加以介绍。由于所研究问题的复杂性和广泛性，加以各种方法又各有其惯用的符号和术语，因而本书所用符号没有完全统一。存在同一符号在不同章、节中表示不同量的情况。凡出

现这种情况都作了说明。

作者由衷感谢北京理工大学应用力学系梅凤翔教授，在百忙中仔细地审阅了书稿并提出了许多宝贵意见，感谢褚亦清教授和刘伯勋副教授的热心帮助。限于作者的水平，错误和不妥之处，在所难免，敬请读者不吝指正。

作　者

1991年4月

目　录

第一章 牛顿-欧拉方法

在刚体力学的研究中，将刚体在空间的一般运动分解为随其上某点的平动和绕此点的转动，分别用牛顿定律和欧拉方程处理。这种方法很自然地被推广到多刚体系统动力学的研究中，通常称为牛顿-欧拉方法，并且有多种表述形式。例如早期弗勒彻尔(Fletcher)等人关于航天器研究的工作(1963)[3]和胡克尔(Hooker)等人的工作(1965)[4]，后来安德鲁(Andrews)和柯萨万(Kesavan)的矢量网络方法(1975)[5]，以及著名的罗伯逊-维登伯格方法对纯转动铰链多刚体系统动力学的研究[27]，所根据的力学原理都是牛顿-欧拉方法。近年来有影响的是希林(Schiehlen)等人的工作[7][8]，以及史维塔瑟(Schwertassek)和罗伯逊(Roberson)的工作[6]；刘延柱采用矩阵记法[40]列写旋量形式的牛顿-欧拉方程使多刚体系统动力学方程具有极简明的表达形式。

由于多刚体系统含有多个刚体和它们之间的各种不同形式的联系，用牛顿-欧拉方法导出的动力学方程将含有大量的、不需要的未知理想约束反力，因此，一个重要的问题是如何自动消去约束反力。本章将介绍希林等人的工作，其特点是在列写出系统的牛顿-欧拉方程以后，将笛卡尔广义坐标变换成独立变量，对完整约束系统用达朗伯(D'Alembert)原理消去约束反力，对非完整约束系统用茹尔当(Jourdain)原理消去约束反力，最后得到与系统自由度数目相同的动力学

方程。希林等人还编制了符号推导的计算机程序NEWEUL，可以在计算机上获得运动微分方程的显式表达式。

§1.1 矢量和张量

1.1.1 矢量基和方向余弦矩阵

任何一个正交坐标系，都可以用它的原点和沿三根坐标轴的单位矢量来表示。一般地，将汇交于一点O的三个正交的单位矢量记为$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$，称之为基矢量；它们构成的正交坐标系称为矢量基，简称基，记为$(O,\boldsymbol{e})$。基的符号$\boldsymbol{e}$同时也表示以基矢量$\boldsymbol{e}_\alpha(\alpha=1,2,3)$为元素的$3\times1$基矢量列阵

$$\boldsymbol{e}=[\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2\ \ \boldsymbol{e}_3\ ]^T \tag{1.1.1}$$

式中上标“T”表示矩阵的转置。今后的叙述中对于坐标系和基不加区别，且若无特殊说明，所采用的都是右手系。因为同一个矢量基的各基矢量之间有正交性，故满足

$$\boldsymbol{e}_\alpha\cdot\boldsymbol{e}_\beta=\delta_{\alpha\beta}\quad,\quad(\alpha,\beta=1,2,3) \tag{1.1.2}$$

式中$\delta_{\alpha\beta}$是克罗尼克(Kronecker)符号，规定为

$$\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1, & \text{当}\alpha=\beta\text{时}\\ 0, & \text{当}\alpha\neq\beta\text{时}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{e}_\alpha\times\boldsymbol{e}_\beta=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{e}_\gamma,(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3) \tag{1.1.3}$$

式中$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$是(Levi-Civita)符号，规定为

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}=\begin{cases}1,\ \text{当}\alpha,\ \beta,\ \gamma\text{为循环序列}\ 3\circlearrowright 1\ 2\ \text{时}\\ -1,\ \text{当}\alpha,\ \beta,\ \gamma\text{为逆循环序列}\ 3\ 1\ 2\ \text{时}\\ 0,\ \text{当}\alpha,\ \beta,\ \gamma\text{为非循环序列时}\end{cases}$$

由此可以导出下列关于矢量基的重要关系：

$$\begin{aligned} &e^T\cdot e=3 \qquad && e^T\times e=0 \\ &e\cdot e^T=E \qquad && e\times e^T=-\tilde{e} \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

式中

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{e}=\begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.5}$$

分别是3×3单位阵和以三个基矢量为元素的3×3反对称矩阵，且

$$\tilde{e}^T=-\tilde{e} \tag{1.1.6}$$

在刚体力学中常常要处理一个以上的矢量基，一般都是通过在基的符号右上方加上标来加以区别，例如两个基$e^{(i)}$和$e^{(j)}$。基$e^{(j)}$的三个基矢量$e_\alpha^{(j)}$（$\alpha=1,2,3$）总可以表示为另一个基$e^{(i)}$的三个基矢量$e_\lambda^{(i)}$（$\lambda=1,2,3$）的线性组合，反之亦然。故可以设

$$e_\alpha^{(j)}=\sum_{\lambda=1}^{3} a_{\alpha\lambda}^{ji}\ e_\lambda^{(i)}\ ,(\alpha=1,2,3) \tag{1.1.7}$$

这三个方程合并成一个矩阵方程

$$e^{(j)}=A^{ji}e^{(i)} \tag{1.1.8}$$

式中

$$A^{ji}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^{ji} \tag{1.1.9}$$

称为两个基$e^{(i)}$和$e^{(j)}$之间的变换矩阵或方向余弦矩阵。

在矩阵符号右上角的双上标“ji”指明此变换矩阵所完成的变换是将基$e^{(j)}$从与基$e^{(i)}$相同的方位转到它的实时位置的方位，即$e^{(j)}$实时位置的方位是$e^{(i)}$的方位通过一个旋转变换达到的。矩阵A^{ji}完全确定了$e^{(j)}$相对$e^{(i)}$的方位。

方向余弦矩阵有下列性质：

(1) 方向余弦矩阵A^{ji}的三个行矢量确定基$e^{(j)}$的三个基矢量$e_1^{(j)}$、$e_2^{(j)}$、$e_3^{(j)}$，三个列矢量确定基$e^{(i)}$的三个基矢量$e_1^{(i)}$、$e_2^{(i)}$、$e_3^{(i)}$。由方程(1.1.8)可以导出

$$A^{ji}=e^{(j)}\cdot e^{(i)T}$$

$$=\begin{bmatrix} e_1^{(j)}\cdot e_1^{(i)} & e_1^{(j)}\cdot e_2^{(i)} & e_1^{(j)}\cdot e_3^{(i)} \\ e_2^{(j)}\cdot e_1^{(i)} & e_2^{(j)}\cdot e_2^{(i)} & e_2^{(j)}\cdot e_3^{(i)} \\ e_3^{(j)}\cdot e_1^{(i)} & e_3^{(j)}\cdot e_2^{(i)} & e_3^{(j)}\cdot e_3^{(i)} \end{bmatrix} \tag{1.1.10}$$

上式表明变换矩阵A^{ji}的第α行元素$a_{\alpha\lambda}^{ji}$ $(\lambda=1,2,3)$是基矢量$e_\alpha^{(j)}$在基$e^{(i)}$的三根轴上的坐标，第λ列元素$a_{\alpha\lambda}^{ji}$ $(\alpha=1,2,3)$是基矢量$e_\lambda^{(i)}$在基$e^{(j)}$的三根轴上的坐标。因为$e^{(i)}$是正交基，所以$e_\alpha^{(j)}$在$e^{(i)}$的三根轴上的坐标也是$e_\alpha^{(j)}$在$e^{(i)}$的三根轴上的投影。又因为$e_\alpha^{(j)}$是单位矢量，所以它的三个坐标(投影)也就是它与基$e^{(i)}$的三根轴的方向余弦，即

$$a_{\alpha\lambda}^{ji}=e_\alpha^{(j)}\cdot e_\lambda^{(i)}=\cos(e_\alpha^{(j)},\ e_\lambda^{(i)}),\quad (\alpha,\lambda=1,2,3) \tag{1.1.11}$$

这正是两个矢量基$e^{(i)}$和$e^{(j)}$之间的变换矩阵A^{ji}称为方向余弦矩阵的由来。

(2) 相同基之间的方向余弦矩阵是单位矩阵。由式

(1.1.10)可直接得到

$$A^{jj}=e^{(j)}\cdot e^{(j)T}=E \tag{1.1.12}$$

(3) 方向余弦矩阵是正交矩阵。将方程(1.1.8)及其转置代入上式，即可验证

$$A^{ji}A^{jiT}=E \tag{1.1.13}$$

(4) 方向余弦矩阵中只有三个独立参数。既然方向余弦矩阵是正交矩阵，因此它的九个元素满足正交性的六个约束条件，即

$$\sum_{\lambda=1}^{3} a_{\alpha\lambda}^{ji}\ a_{\beta\lambda}^{ji}=\delta\alpha_{\beta}=\begin{cases}1\ ,\ \alpha=\beta\text{时}\\ 0\ ,\ \alpha\neq\beta\text{时}\end{cases}\qquad(\alpha,\beta=1,2,3) \tag{1.1.14}$$

(5) 方向余弦矩阵的逆矩阵等于它的转置矩阵

$$(A^{ji})^{-1}=A^{jiT}=A^{ij} \tag{1.1.15}$$

这正是正交矩阵的性质。由此我们可以利用转置矩阵代替逆矩阵，有

$$e^{(i)}=A^{ij}e^{(j)}=(A^{ji})^{-1}e^{(j)}=A^{jiT}e^{(j)} \tag{1.1.16}$$

1.1.2 矢量

矢量是用来表示具有方向性的物理量，它是抽象的数学量。一个任意矢量$\boldsymbol{a}$可以在某个矢量基$\boldsymbol{e}$中写出解析表达式，为

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}^T a=a^T\boldsymbol{e} \tag{1.1.17}$$

式中 3 × 1 列阵

$$a=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=[\ a_1\ a_2\ a_3\ ]^T \tag{1.1.18}$$

是由矢量$\boldsymbol{a}$在基$\boldsymbol{e}$的三根轴上的坐标(投影)构成的列阵，称为矢量$\boldsymbol{a}$在基$\boldsymbol{e}$中的坐标列阵。矢量$\boldsymbol{a}$在两个不同基$\boldsymbol{e}^{(i)}$和$\boldsymbol{e}^{(j)}$中的坐标列阵分别为$a^{(i)}$和$a^{(j)}$，因为矢量本身不依赖于坐标系，可以写出恒等式

$$\boldsymbol{e}^{(j)T}\ a^{(j)}=\boldsymbol{e}^{(i)T}\ a^{(i)}$$

将式(1.1.16)代入上式右端中的$\boldsymbol{e}^{(i)}$，得到

$$a^{(j)}=A^{ji}\ a^{(i)} \tag{1.1.19}$$

上式等价于线性关系式

$$a_{\alpha}^{(j)}=\sum_{\lambda=1}^{3}a_{\alpha\lambda}^{ji}\ a_{\lambda}^{(i)}\ ,\ (\alpha=1,2,3) \tag{1.1.20}$$

上式表明，两个矢量基$\boldsymbol{e}^{(i)}$和$\boldsymbol{e}^{(j)}$之间的方向余弦矩阵A^{ji}也正是一个矢量在这两个基中的坐标列阵之间的变换矩阵；还说明矢量是一个包含了三个分量的量，在进行坐标变换时，矢量在两个不同基中的分量必须满足变换关系式(1.1.20)。

在刚体力学中矢量的代数运算常化为矢量在某个基中的坐标列阵的矩阵运算。例如，矢量点积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a^T\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^Tb=a^Tb=b^Ta \tag{1.1.21}$$

若已知$\boldsymbol{a}$在基$\boldsymbol{e}^{(i)}$中的坐标列阵$a^{(i)}$和$\boldsymbol{b}$在基$\boldsymbol{e}^{(j)}$中的坐标列阵$b^{(j)}$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a^{(i)T}b^{(i)}=a^{(i)T}\ A^{ij}\ b^{(j)} \tag{1.1.22}$$

矢量叉积

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=a^T\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}^Tb=a^T(-\tilde{\boldsymbol{e}})b$$

容易证明

$$a^T(-\tilde{\boldsymbol{e}})=\boldsymbol{e}^T\tilde{a},\qquad (-\tilde{\boldsymbol{e}})b=\tilde{b}\boldsymbol{e} \tag{1.1.23}$$

式中

$$\tilde{a}=\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{b}=\begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.24}$$

是 3 × 3 反对称矩阵，称为矢量的叉乘矩阵。于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{e}^T \tilde{a}\, b = a^T \tilde{b}\, \boldsymbol{e} \\ &= -\boldsymbol{e}^T \tilde{b}\, a = -b^T \tilde{a}\, \boldsymbol{e} \end{aligned} \tag{1.1.25}$$

比较，得

$$\tilde{a}\, b = -\tilde{b}\, a \quad , \qquad a^T \tilde{b} = -b^T \tilde{a} \tag{1.1.26}$$

在以上推导中出现了式(1.1.24)定义 的一 个矢量$\boldsymbol{a}$在基$\boldsymbol{e}$中的反对称矩阵$\tilde{a}$，它与式(1.1.5)中由基矢 量构成的矩阵$\tilde{\boldsymbol{e}}$有相同的形式，且有关系

$$\tilde{a}^T = -\tilde{a} \tag{1.1.27}$$

矢量$\boldsymbol{a}$对两个不同基$\boldsymbol{e}^{(i)}$和$\boldsymbol{e}^{(j)}$的反对称矩阵$\tilde{a}^{(i)}$和$\tilde{a}^{(j)}$之间的变换关系可以如下导出，按式(1.1.25)对不同基写出矢量叉积$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的矩阵表达式，建立等式

$$\boldsymbol{e}^{(i)T}\, \tilde{a}^{(i)}\, b^{(i)} = \boldsymbol{e}^{(j)T}\, \tilde{a}^{(j)}\, b^{(j)}$$

将变换关系$\boldsymbol{e}^{(j)} = A^{ji}\, \boldsymbol{e}^{(i)}$，$b^{(j)} = A^{ji}\, b^{(i)}$代入 上 式，得到

$$\tilde{a}^{(j)} = A^{ji}\, \tilde{a}^{(i)}\, A^{jiT} \tag{1.1.28}$$

1.1.3 并矢和张量

按顺序并列的两个矢量(非点积亦非叉积)称为并矢。并矢是二阶张量。二阶张量的一般形式为

$$\mathrm{D}=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2+\cdots=\sum\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_i \tag{1.1.29}$$

将上式中的每个矢量均用其在基$\boldsymbol{e}$中的坐标列阵表出，得到张量的坐标矩阵表达式

$$\mathrm{D}=\sum \boldsymbol{e}^T a_i b_i^T \boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}^T D \boldsymbol{e} \tag{1.1.30}$$

式中 3 × 3 矩阵

$$D=\boldsymbol{e}\cdot\mathrm{D}\cdot\boldsymbol{e}^T=\sum a_i b_i^T=\begin{bmatrix}\sum a_{i1}b_{i1} & \sum a_{i1}b_{i2} & \sum a_{i1}b_{i3}\\ \sum a_{i2}b_{i1} & \sum a_{i2}b_{i2} & \sum a_{i2}b_{i3}\\ \sum a_{i3}b_{i1} & \sum a_{i3}b_{i2} & \sum a_{i3}b_{i3}\end{bmatrix} \tag{1.1.31}$$

称为张量D 在基$\boldsymbol{e}$中的坐标矩阵，矩阵D的九个元素称为D在基$\boldsymbol{e}$ 中的九个坐标。将张量D 在两个不同的矢量基$\boldsymbol{e}^{(i)}$和$\boldsymbol{e}^{(j)}$中分解，可以建立等式

$$\boldsymbol{e}^{(j)\mathrm{T}} D^{(j)} \boldsymbol{e}^{(j)}=\boldsymbol{e}^{(i)\mathrm{T}} D^{(i)} \boldsymbol{e}^{(i)}$$

将变换方程(1.1.16)代入上式右端的$\boldsymbol{e}^{(i)}$，导出

$$D^{(j)}=A^{ji} D^{(i)} A^{jiT} \tag{1.1.32}$$

方程(1.1.32)是张量在不同基中的坐标矩阵的变换分式。展开(1.1.32)式，可知，坐标矩阵$D^{(j)}$和$D^{(i)}$的元素之间有如下线性变换关系

$$d_{\alpha\beta}^{(j)}=\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_{\alpha k}\ a_{\beta l} d_{kl}^{(i)}\ ,\ (\alpha,\beta=1,2,3) \tag{1.1.33}$$

上式表示的正是二阶张量的定义，即二阶张量是一个包含了九个分量的量，在进行坐标变换时，张量在两个不同基中的分量必须满足变换关系(1.1.33)。

在张量运算中，称标量为零阶张量，矢量为一阶张量，而并矢为二阶张量。报据坐标变换关系还可以定义三阶、四阶和更高阶的张量。在本书中只用到二阶张量。

将式(1.1.29)定义的张量$\mathbf{D}$中全部并矢$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_i$的排列顺序颠倒为$\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}_i$，得到一个新的张量$\mathbf{D}^*$

$$\mathbf{D}^*=\sum \boldsymbol{b}_i\,\boldsymbol{a}_i \tag{1.1.34}$$

称$\mathbf{D}^*$为$\mathbf{D}$的共轭张量，$\mathbf{D}$在矢量基$\boldsymbol{e}$中的坐标矩阵为

$$D^*=\begin{bmatrix} \sum b_{i1}a_{i1} & \sum b_{i1}a_{i2} & \sum b_{i1}a_{i3} \\ \sum b_{i2}a_{i1} & \sum b_{i2}a_{i2} & \sum b_{i2}a_{i3} \\ \sum b_{i3}a_{i1} & \sum b_{i3}a_{i2} & \sum b_{i3}a_{i3} \end{bmatrix} \tag{1.1.35}$$

比较矩阵(1.1.31)和(1.1.35)，有

$$D^*=D^T \tag{1.1.36}$$

即共轭张量$\mathbf{D}^*$的坐标矩阵D^*等于张量$\mathbf{D}$的坐标矩阵的转置阵D^{T}。

将张量的坐标矩阵表达式(1.1.30)改写为由基$\boldsymbol{e}$的基矢量组成的九个并矢的线性关系式

$$\mathbf{D}=\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} d_{\alpha\beta}\,\boldsymbol{e}_\alpha\,\boldsymbol{e}_\beta \tag{1.1.37}$$

由上式可见，若某一张量在基$\boldsymbol{e}$中的坐标矩阵为单位阵E，则此张量仅由三项同标号基矢量并矢$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i$($i=1,2,3$)构成。这种张量称为单位张量，记为$\mathbf{E}$，

$$\mathbf{E}=\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\,\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}^T\,\boldsymbol{e} \tag{1.1.38}$$

若张量$\mathbf{D}$的坐标矩阵是正交矩阵，即$D\,D^T=E$，则张量$\mathbf{D}$称为正交张量。若张量$\mathbf{D}$的坐标矩阵是对称矩阵，即$D=D^{\mathrm{T}}$，则张量$\mathbf{D}$称为对称张量。若张量$\mathbf{D}$的坐标矩阵是反对称矩阵，

即$D=-D^T$，则D称为反对称张量。显然，单位张量是对称张量。

下面给出在刚体力学中常遇到的张量运算，这些运算可以利用其坐标矩阵进行。

张量与标量的乘积：张量与标量的乘积仍为张量，表示为

$$\mathbf{Q}=m\mathbf{D} \tag{1.1.39}$$

坐标矩阵的表达式为

$$Q=mD \tag{1.1.40}$$

张量与矢量的点积：张量与矢量的点积是矢量，即

$$\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{r}=(\sum\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_i)\cdot\boldsymbol{r}=\sum\boldsymbol{a}_i(\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{r}_i)=\boldsymbol{u}_1 \tag{1.1.41}$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{D}=\boldsymbol{r}\cdot(\sum\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_i)=\sum(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{u}_2 \tag{1.1.42}$$

以上两式的坐标矩阵表达式为

$$\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}^TD\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^Tr=\boldsymbol{e}^TDr=\boldsymbol{e}^Tu_1 \tag{1.1.43}$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{D}=r^T\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}^TD\boldsymbol{e}=r^TD\boldsymbol{e}=u_2{}^T\boldsymbol{e} \tag{1.1.44}$$

由此得到

$$u_1=Dr \tag{1.1.45}$$

$$u_2{}^T=r^TD,\qquad u_2=D^Tr \tag{1.1.46}$$

显然，用矢量点乘张量时，左乘和右乘的结果不同。以上讨论说明二阶张量与矢量的点积实际上是通过线性变换把一个矢量变成另外一个矢量，而张量的坐标矩阵就是此线性变换矩阵。在这个意义上容易理解：单位张量与矢量的点积等于该矢量本身，即

$$\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{E} \tag{1.1.47}$$

两个矢量$\boldsymbol{d}$和$\boldsymbol{r}$的叉积可以用某个张量D和矢量$\boldsymbol{r}$的点积