变分法及其应用

BIANFENFAJIQIYINGYONG

欧斐君 宋建华 编

陕西科学技术出版社

变分法及其应用

欧斐君　梁建华　编

陕西科学技术出版社

变 分 法 及 其 应 用
欧斐君　梁建华　编
责任编辑　赵生久
陕西科学技术出版社出版发行
(西安北大街131号)
新华书店经销　西北电讯工程学院印刷厂印刷
850×1168毫米　32开本　7.75印张　18.7万字
1987年11月第1版　1987年11月第1次印刷
印数：1－4,000
统一书号：7202·131　定价：2.30元

内 容 提 要

变分法是研究泛函极值问题的一门科学，是经典数学的一个分支。

本书共分六章，第一章预备知识，介绍泛函分析的一些最基本的概念和符号．第二章和第三章分别讨论极值的必要条件、条件变分与可动边界问题．第四章介绍物理、力学中的变分原理以及正则方程，并讨论了特征值问题、正定算子的极小泛函．第五章介绍变分学中的直接方法：里兹方法、伽辽金方法和半解析法，介绍了有限元法的变分基础．第六章讨论了极值的充分条件．每章都附有一定数量的习题．

本书可作为应用数学、力学、物理等专业的本科生及研究生变分法课程的教材，也可作为科学技术工作者的参考书．

序

众所周知，在国民经济建设中，最大、最小、最好、最省以及最优等问题是十分重要的问题，在自然现象中，也存在着许多极值规律。例如，当光线在介质中传播时，光线通过介质的光路使所需时间为最小(费马原理)；物体在它所容许的位置中，将自然地处于使其势能为最小的位置（最小势能原理）等。因此，极值问题的研究就显得十分重要，且它一直是推动数学向前发展的主要动力之一。变分法是研究极值问题的重要方法和工具。然而，变分法的研究对象与微积分学中普通极值问题的研究对象不同，它是研究泛函的极值的。

在自然科学中，变分法的应用极为广泛。一方面，变分法常被用来推导描述自然现象的控制微分方程；另一方面，物理和力学中的各种变分原理的发展使变分法本身已成为某些学科理论的组成部分。值得指出的是变分法在计算方法中的应用。本世纪开创的变分法的直接方法是近似计算的有效方法，特别是近三十年来，这一方法有了迅速的发展，形成了新的有效的数值方法——有限元方法，有限元方法的数学基础之一就是变分法。因此，变分法已成为工程技术人员和科学工作者必备的数学基础。

本书共分六章，第一章预备知识部分简略介绍泛函分析的一些概念；第二、三各章介绍变分法的古典基本理论，包括各种形式的欧拉方程、条件变分、变动边界与自然边界条件等；第四章介绍力学中的变分原理及正则方程；第五章详细地叙述直接法——里兹法和伽辽金法，介绍了半解析法；考虑部分读者对变分理论方面有较深入的要求，第六章简略介绍变分的充分条件。全书各章配有习题，并附有参考答案。

在编写本书时，既注意较详细地叙述变分法的基本理论，同

时也注重变分法的应用。为了便于工程技术人员阅读，尽可能写得通俗易懂，不拘泥于数学的严密性。阅读本书需要具备微积分、线性代数、物理、力学、微分方程等基础知识。

本书可以作为高等学校教师、大学生和研究生的变分法教学参考书，也可作为工程技术人员、科学工作者的参考材料。

本书是在我们过去编写的变分法讲义的基础上，经过共同讨论、反复修改并扩大了许多篇幅而写成的。作者又曾在西安交通大学使用过几遍，反映良好。

在本书的编写过程中，游兆泳教授阅看了原稿的部分内容，张继平副教授审阅了本书的全部内容，他们对本书提出了宝贵的意见，作者深表谢意。

编　者

1987.8.

目　录

第一章　预备知识

§1.1　n 维向量与无穷维向量(1)

变分法是个古老的数学分支。它所研究的对象，用现在的数学术语来说，是泛函的极值问题。而泛函分析是本世纪发展起来的一门新兴的数学学科，现今已渗入到工程技术、自然科学的许多领域。因此，在这一章先简略地介绍泛函分析的一些最基本的概念和记号，目的是在后面叙述变分法的理论时采用它们。在本章中，我们准备采用对比的方法，用大家熟知的 n 维向量来引出无穷维向量；用线性代数的基本概念来介绍泛函分析的基本概念。

把由 n 个数 a_1，a_2，…，a_n 所组成的有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$叫做一个 n 维行向量，记作

$$\vec{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

设 $\vec{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 是另一个 n 维行向量。

如果无穷数列$a_1, a_2, \cdots, a_n\cdots$，满足条件：

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2<\infty$$

把这些数所组成的有序数组$(a_1,\cdots,a_n\cdots)$称之为一个无穷维行向量，记作

$$\vec{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$$

设 $\vec{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_n\cdots)$

是另一个无穷维行向量$\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2<\infty\right)$

(1) 这里仅以行向量为例，对列向量同样成立。

约定两个 n 维向量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的和为

$$\vec{A}+\vec{B}=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n)$$

差为

$$\vec{A}-\vec{B}=(a_1-b_1,\cdots,a_n-b_n)$$

数 α 乘 n 维向量为

$$\alpha\vec{A}=(\alpha a_1,\cdots,\alpha a_n)$$

n 维空间向量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的内积为

$$(\vec{A},\vec{B})=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

n 维向量 $\vec{A}$ 的范数（模的概念的推广）为

$$\|\vec{A}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}=\sqrt{(\vec{A},\vec{A})}$$

n 维向量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 交角的余弦为

$$\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}})=\frac{(\vec{A},\vec{B})}{\sqrt{(\vec{A},\vec{A})}\sqrt{(\vec{B},\vec{B})}}$$

约定两个无穷维向量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的和为

$$\vec{A}+\vec{B}=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n,\cdots)$$

差为

$$\vec{A}-\vec{B}=(a_1-b_1,\cdots,a_n-b_n,\cdots)$$

数 α 乘无穷维向量为

$$\alpha\vec{A}=(\alpha a_1,\cdots,\alpha a_n,\cdots)$$

无穷维向量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的内积为

$$(\vec{A},\vec{B})=\sum_{i=1}^{\infty}a_ib_i$$

无穷维量 $\vec{A}$ 的范数为

$$\|\vec{A}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2}=\sqrt{(\vec{A},\vec{A})}$$

无穷维向量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 交角的余弦为

$$\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}})=\frac{(\vec{A},\vec{B})}{\sqrt{(\vec{A},\vec{A})}\sqrt{(\vec{B},\vec{B})}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2}}$$

若两个n维向量$\vec{A}$与$\vec{B}$的内积$(\vec{A},\ \vec{B})=0$，则称向量$\vec{A}$与$\vec{B}$正交。

n维向量$\vec{X}$的全体称为n维向量空间V_n，

$$V_n=\left\{\vec{X}\ \middle|\ \begin{array}{l}\vec{x}=(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)\\ x_i\in R,i=1,2,\cdots,n\end{array}\right\}$$

其中R表示实数集合。

若两个无穷维向量$\vec{A}$与$\vec{B}$的内积$(\vec{A},\ \vec{B})=0$，则称向量$\vec{A}$与$\vec{B}$正交。

无穷维向量$\vec{X}$的全体称为无穷维向量空间l^2，

$$l^2=\left\{\vec{X}\ \middle|\ \begin{array}{l}\vec{X}=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\\ x_i\in R,i=1,2,\cdots\\ \sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<\infty\end{array}\right\}$$

我们用形式逻辑的办法把n维行向量推广到无穷维向量时，条件$\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2<\infty$起了重要的作用，它保证了无穷维向量的范数有意义。

根据柯西(Cauchy)不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i b_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2,$$

不难说明这样定义的内积也有意义。如果把柯西不等式改写为

$$\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_i b_i\right|\Big/\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2\right)^{1/2}\right)\leqslant 1,$$

注意到内积与范数的定义，可知这样定义的两个无穷维向量交角的余弦是合理的。

希尔伯特(Hilbert)在研究积分方程时最先引入l^2空间，很

多理论问题与实际问题都可以归结到对 l^2 空间的研究。

§1.2 函数空间

设 $f(t)$是定义在有界区间$[a,b]$上的连续函数，取分点

$$t_i = a + i\Delta t \qquad (i = 1,2,3,\cdots,n)$$

这里 $\Delta t = \dfrac{b-a}{n}$，依次用

$$f_1, f_2, \cdots, f_n$$

表示函数$f(t)$在这些分点上的函数值，把 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 当作 n 维空间的向量$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$的分量，这样以来函数 $f(t)$ 就对应于向量$(f_1, f_2, \cdots, f_n)$，令 $n \to \infty$时，$f(t)$ 就对应着一个无穷维向量。因此，我们把函数 $f(t)$看作一个向量，它的分量就是 $f(t)$在$[a,b]$上的函数值，仍然用 $f(t)$表示。

我们知道，n 维空间 V_n 的两个向量 $\vec{A}$与$\vec{B}$ 的内积$(\vec{A}, \vec{B}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$，无穷维空间$l^2$的两向量$\vec{A}$与 $\vec{B}$ 的内积$(\vec{A}, \vec{B}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$，对于连续变量，积分起着求和的作用。因此，定义在$[a,b]$上的两个函数（向量）$x(t)$与$y(t)$的内积为

$$(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)dt① \qquad (2.1)$$

显然，内积满足以下性质：

a) $(x,y) = (y,x)$；

b) $(x,y+z) = (x,y) + (x,z)$；

c) $(\lambda x,y) = \lambda(x,y)$

d) $(x,x) > 0$ 当 $x \neq 0$ 时，$(x,x) = 0$ 当 $x = 0$ 时。

---

①要求某种意义下的积分有意义。例如黎曼意义下的积分或勒贝格意义下的积分。

类似地，定义函数 $x(t)$ 的范数（函数"长度"概念的抽象）为

$$\|x(t)\| = \sqrt{(x,x)} = \left\{\int_a^b x(t)x(t)dt\right\}^{1/2} \tag{2.2}$$

函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 间的夹角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x(t)\|\|y(t)\|}$$

$$= \frac{\int_a^b x(t)y(t)dt}{\left\{\int_a^b x^2(t)dt \cdot \int_a^b y^2(t)dt\right\}^{1/2}} \tag{2.3}$$

若函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 满足条件

$$(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)dt = 0 \tag{2.4}$$

则称函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 正交。

两个 n 维向量 $\vec{A} = (a_1, \cdots, a_n)$ 与 $\vec{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ 之间的距离为

$$\|\vec{A} - \vec{B}\|$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}$$

$$= \sqrt{(\vec{A} - \vec{B}, \vec{A} - \vec{B})}$$

两个函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的距离规定为它们之差的范数即

$$\|x(t) - y(t)\|$$

$$= \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt}$$

$$= \sqrt{(x-y, x-y)}$$

函数的范数可以用不同的方法来定义，就象长度有不同的单位一样。例如，在区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $x(t)$ 的范数还可以定义为

$$\|x(t)\| = \max_{a<t<b} |x(t)| \tag{2.5}$$

两个连续函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的距离定义为

$$\|x(t) - y(t)\| = \max_{a<t<b} |x(t) - y(t)|$$

在变分中范数的定义常用(2.5)。

上节提到的 n 维向量空间 V_n 和无穷维向量空间 l^2，以及线性代数里讲过的线性空间，欧氏空间，都是抽象的概念，而所谓"空间"是泛指具有某种数学运算结构的向量集合。具有不同性质的函数集合，构成不同的函数空间。

在 $[a,b]$ 上连续函数的全体构成函数空间 $C_{[a,b]}$

$$C_{[a,b]}=\{x(t)\,|\,x(t)\text{在}a\leqslant t\leqslant b\text{上连续}\};$$

在 $[a,\ b]$ 上具有 k 阶连续导数的函数的全体构成函数空间 $C^{(k)}_{[a,b]}$，这里 k 是正整数，即

$$C^{(k)}_{[a,b]}=\{x(t)\,|\,x(t)\text{在}[a,b]\text{上具有 }k\text{ 阶连续导数}\};$$

在勒贝格（Lebesque）积分意义①下，由在区间 $[a,b]$ 上平方可积的函数全体构成函数空间 $L^2_{[a,b]}$

$$L^2_{[a,b]}=\left\{x(t)\,\middle|\,\int_a^b x^2(t)dt<\infty\right\}.$$

有了距离的概念，我们就可以引入极限，收敛等概念了。设有函数序列 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\cdots$ 及函数 $x(t)$，如果满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\|x(t)-x_n(t)\|=0$$

则称函数序列 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$ 收敛于 $x(t)$。因为距离有不同的定义，故相应的收敛就有不同的名称，在(2.2)的意义下有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b[x(t)-x_n(t)]^2dt\right)^{1/2}=0$$

成立，称函数 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$ 平均收敛于 $x(t)$。而在(2.5)的意义下，有

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|x(t)-x_n(t)\right|\right\}=0$$

成立，这就是函数序列 $x_n(t)(n=1,2,\cdots)$ 一致收敛于 $x(t)$。从在有界区域上的一致收敛可以推出平均收敛。反之则不真。

---

① 微积分中所讲的积分叫黎曼（Riemann）积分，而勒贝格积分是黎曼积分的推广.实变函数中证明：若函数在黎曼意义下可积，则函数也在勒贝格意义下可积，而且积分值相等.详见任何一本实变函数的书籍.

向量组$\vec{A}_k=(a_{k1},\cdots,a_{kn})$，$(k=1,2,\cdots,m)$线性相关的条件是：存在不全为零的常数$c_1,c_2,\cdots c_m$，使得

$$c_1\vec{A}_1+c_2\vec{A}_2+\cdots+c_m\vec{A}_m=0 \qquad (2.6)'$$

即

$$\sum_{k=1}^{m}c_k a_{ki}=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

成立。

如果向量组$\vec{A}_k(k=1,2,\cdots,m)$非线性相关，就称为线性无关.换句话说，只有在$c_1=c_2=\cdots=c_m=0$时(2.6)′式才成立，那么称向量组$\vec{A}_k(k=1,2,3,\cdots,m)$性线无关。

范数为1的向量称为单位向量。

设有非零向量组

$$\vec{e}_i,(i=1,2,3,\cdots,m) \qquad (2.7)'$$

如果向量组中任意两向量正交，即

$$(\vec{e}_j,\vec{e}_k)=0 \quad (j\neq k) \qquad (2.8)'$$

函数$x_1(t),\cdots,x_m(t)$线性相关的条件是：存在不全为零的常数$c_1,c_2,\cdots,c_m$，使得

$$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots\cdots+c_mx_m(t)=0 \qquad (2.6)$$

成立。

如果函数$x_1(t),\cdots,x_m(t)$非线性相关，就称为线性无关。换句话说，只有在$c_1=c_2=\cdots=c_m=0$时(2.6)式才成立，那么称函数$x_1(t),\cdots,x_m(t)$线性无关。

范数为1的函数$x(t)$称为规范函数。

设有非零函数系

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t),\cdots \qquad (2.7)$$

如果这个函数系中任意两函数正交，即

$$\int_a^b\varphi_i(t)\varphi_j(t)dt=0$$

则称(2.7)′为正交向量组。如果向量组$\vec{e}_i(i=1,2,\cdots,m)$不仅满足(2.8)′，还满足

$$\|\vec{e}_i\|=1$$

$(i=1,2,\cdots,m)$则称(2.7)′为正交规范向量组。

或 $(\varphi_i, \varphi_j)=0\ (i\neq j)$

$$(2.8)$$

则称(2.7)为正交系。如果函数系不仅仅满足(2.8)，还满足

$$\int_a^b \varphi_i^2(t)dt=1$$

$$(\|\varphi_i\|=1)\ i=1,2,\cdots,n,\cdots$$

则称(2.7)为正交规范函数系.

正交函数系有很多，例如

(1) 三角函数系

$$1,\quad \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t,\cdots,\cos nt,\ \sin nt,\ \cdots \tag{2.9}$$

是在$[-\pi,\pi]$上的正交函数系

容易验证

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}},\ \cdots,$$

$$\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}},\ \cdots \tag{2.9}$$

是在$[-\pi,\pi]$上的正交规范函数系；

(2) 勒让德(Legendre)多项式

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\ \frac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n}\quad (n=1,2,\cdots) \tag{2.10}$$

它的开头若干个多项式是

$$P_0(t)=1 \qquad P_1(t)=t \qquad P_2(t)=\frac{1}{2}(3t^2-1)$$

$$P_3(t)=\frac{1}{2}(5t^3-3t),\cdots$$

不难证明，(2.10)是在$[-1,1]$上正交的函数系，

设有 n 维单位正交向量组

$$\vec{e}_i \quad (i=1,2,3,\cdots,n) \tag{2.11$'$}$$

则任一 n 维向量 $\vec{X}$ 可表示为

$$\vec{X}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e}_i \tag{2.12$'$}$$

其中 $x_i=(\vec{x},\vec{e}_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ (2.13)′

为向量 $\vec{X}$ 在 $\vec{e}_i$ 上的投影，我们称向量组(2.11)′为坐标向量，称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为向量 $\vec{X}$ 关于坐标向量组(2.11)′的坐标。

设有在区间 $[a,b]$ 上给出的完备正交规范函数系（“完备”概念下面将会提到）

$$\varphi_i(t),\ (i=1,2,\cdots) \tag{2.11}$$

函数 $X(t)$ 可以展成广义富里哀(Fourier)级数。

$$x(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(t) \tag{2.12}$$

其中富里哀系数 $c_k=(x,\varphi_k)$

$$=\int_a^b x(t)\varphi_k(t)dt \tag{2.13}$$

有时称函数系(2.11)为坐标函数，称 $c_k(k=1,2,\cdots)$ 为函数 $x(t)$ 关于坐标函数系(2.11)的坐标。

对于广义富里哀级数，我们从两方面作进一步的说明，即怎样判定正交函数系的完备性？完备性对于把函数展成广义富氏级数有什么意义？

设给定了 m 个在 $[a,b]$ 上互相正交的规范函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_m(t)$ 和函数 $x(t)$，它们都是平方可积的函数。欲求常数 $\overline{c}_1,\overline{c}_2,\cdots,\overline{c}_m$ 使线性组合 $\overline{c}_1\varphi_1(t)+\overline{c}_2\varphi_2(t)+\cdots+\overline{c}_m\varphi_m(t)$ 与 $x(t)$ 的平均平方偏差 I_m 最小。我们断言：所求常数 $\overline{c}_k$ 应该等于函数 $x(t)$ 关于 $\varphi_k(t)$ 的富里哀系数，即

$$\overline{c}_k=c_k=(x,\varphi_k)=\int_a^b x(t)\varphi_k(t)dt.$$

事实上，