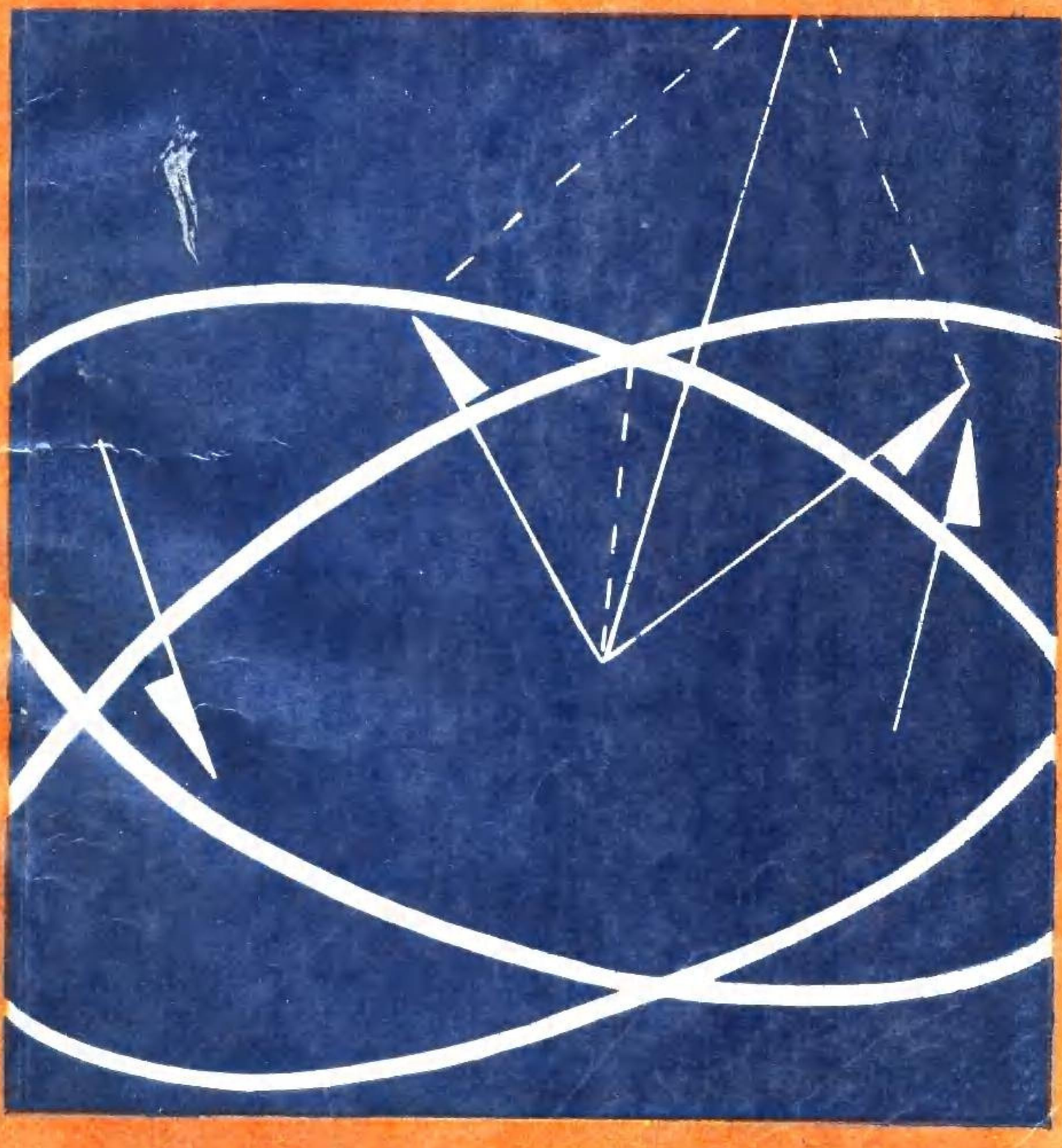
理论力学复习指南

康滋荣 主编

气象出版社



理论力学复习指南

康滋荣　主编

康滋荣　陈世儒　应日平　吴晓藏　编

气象出版社

内 容 提 要

该书积编者多年从事理论力学教学之经验，侧重于基本概念、基本理论的深入理解和灵活运用，既有简明扼要的理论阐述，又有详细的解题示范，对于易混淆的概念，解题时应注意的问题，更是不吝笔墨，故该书对于学习、复习理论力学以应付各种考试的工科学生来说，将是一本理想的参考书。

本书可作为有志于报考硕士研究生的在校生或毕业生的复习用书，亦可供初学或自学者学习时参考。

理论力学复习指南

康滋荣　主编

康滋荣　陈世儒　应日平　吴晓藏　编

责任编辑　成秀虎

●　●　●

气象出版社　出版

（北京西郊白石桥路46号）

北京昌平环球科技印刷厂印刷

气象出版社发行　全国各地新华书店经售

●　●　●

开本：787×1092 1/16　印张：20.25　字数：502千字

1990年2月第一版　1990年2月第一次印刷

印数：1—3,500　定价：14.50元

ISBN 7-5029-0332-1/O·0015

前　言

对于大学本科高年级学生或已毕业参加工作，但有志于攻读硕士学位研究生的同志，要想在较短的时间内，对于“理论力学”这门课程作较深入的复习，并非是一件十分容易的事情。为此，编者根据自己多年来一直从事本门课程的教学以及近年来撰写有关教学参考书的点滴经验与体会，编写了这本书。

本书的侧重点有两个：一个是对理论力学基本概念、基本理论的深入理解与掌握；另一个就是对基本理论的灵活应用。因此，无论在基本概念、基本理论的阐述，还是在例题的解析以及习题的选取上，始终是以上述两个基本出发点为依据的。本书可供有志报考硕士研究生的在校学生以及本科毕业的学生学习、复习理论力学参考之用，也可供初学者与自学者参考。

本书初稿经由石宝田、高雪仙、冯勋欣、刘爱民等同志校审。在编写过程中，还得到王祖光教授、张德润副教授以及校内外许多同行专家的热情关怀、帮助与指导，在此一并致以衷心的谢意。

由于编者水平有限，书中不妥与错误之处，敬请批评指正。

编者

1986年8月

目　录

第一章　静　力　学

本章只涉及几何静力学的内容，至于分析静力学留待下章讨论。

§1-1　力矩与力偶

1. 力与力偶　力与力偶是物体之间相互机械作用的两种最基本的形式。力可以使物体平动也可以使物体转动，而力偶却只能使物体转动。若物体具有固定转轴时，则力偶使物体绕转轴转动；对自由物体，力偶则使物体绕质心转动。

2. 力矩　力矩是力使物体转动效应的度量。对于平面问题来说（即所有各力的作用线位于同一平面内的情况），由于各力对平面内任一点O的矩不是顺时针转，就是逆时针转，别无其它可能。习惯上，我们是把逆时针方向转动的力矩取为正值，把顺时针方向转动的力矩取为负值。所以，对于平面问题，我们把力的大小与力的作用线到某点O的距离的乘积，并加以相应的正负号后称为力对点O之矩，简称为力矩，用符号$m_O(\boldsymbol{F})$或简单地以m_O表示。如图1-1所示，$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$对同平面内O点的矩分别为

$$m_O(\boldsymbol{F}_1) = -F_1d_1$$

$$m_O(\boldsymbol{F}_2) = F_2d_2$$

$$m_O(\boldsymbol{F}_3) = F_3d_3$$

也就是说，对于平面问题力矩可用一代数量表示。

对于空间问题来说（即所有各力的作用线并非在同一平面内的情况），由于各力与空间任一点O所决定的平面在空间具有不同的方位（不象平面问题那样，由于矩心是在各力作用线所在的平面内，所以各力与平面上任一点O所决定的是同一个平面，各力对O点之矩只有逆时针与顺时针两个转向），所以，在空间问题中力对某点之矩不再能用代数量而必须用一矢量表示，用符号$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$或简单地以$\boldsymbol{m}_O$表示，如图1-2所示，则有

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_1) = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1$$

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_2) = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2$$

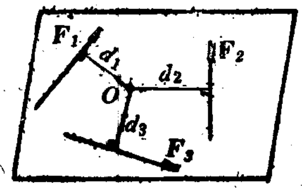


图1-1

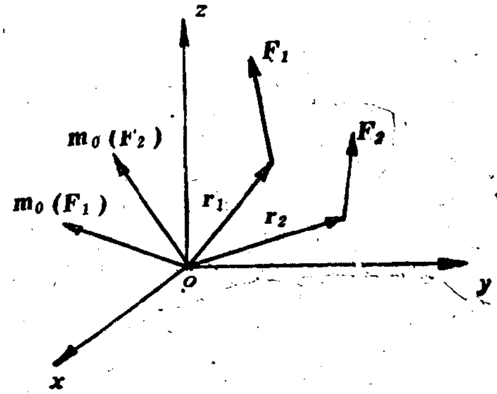


图1-2

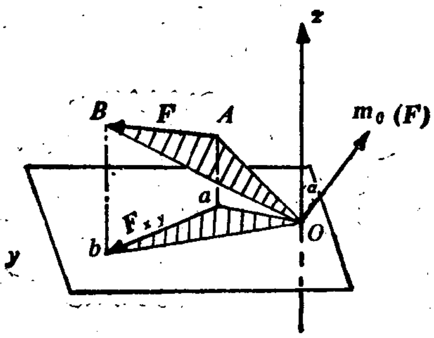


图1-3

由图1-3可见：力$\boldsymbol{F}$对O点的矩其大小为$\triangle OAB$面积的两倍，这个力矩矢$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$对过$O$点的任一轴$z$上投影的大小为 $|\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})|\cos\alpha = 2\triangle OAB\cdot\cos\alpha$。而力$\boldsymbol{F}$对$z$轴之矩是力$\boldsymbol{F}$在过$O$点与$z$轴垂直的平面上的投影$\boldsymbol{F}_{xy}$对$O$点之矩，其大小为$m_O(\boldsymbol{F}_{xy}) = 2\triangle oab$。根据几何学可知：$\triangle oab$的面积等于$\triangle OAB$的面积与$\cos\alpha$的乘积，即$\triangle oab = \triangle OAB\cdot\cos\alpha$，于是

$$|\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})|\cos\alpha = m_Z(\boldsymbol{F}) = m_O(\boldsymbol{F}_{xy})$$

此外，α角是力矩矢$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$与$z$轴正向之间的夹角。当$\alpha<\frac{\pi}{2}$时，$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$在$z$轴上的投影为正值，力$\boldsymbol{F}$对$z$轴之矩$m_Z(\boldsymbol{F})$也为正值；当$\alpha>\frac{\pi}{2}$时，$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$在$z$轴上的投影为负值，$m_Z(\boldsymbol{F})$也为负值。也就是说，力对点之矩在过该点的任一$z$轴上的投影与此力对$z$轴之矩这两个代数量是相等的，即

$$[\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})]_Z = m_Z(\boldsymbol{F})$$

若以x、y、z表示力$\boldsymbol{F}$作用点的坐标，以F_x、F_y、F_z表示力$\boldsymbol{F}$在坐标轴上的投影，则力$\boldsymbol{F}$对空间任一点O之矩可写为

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j}$$
$$+ (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k} = m_x(\boldsymbol{F})\boldsymbol{i} + m_y(\boldsymbol{F})\boldsymbol{j} + m_z(\boldsymbol{F})\boldsymbol{k}$$

3. 力偶矩 力偶矩是力偶使物体转动效应的度量。对于平面问题来说，由于力偶所在的平面在空间的方位是完全确定的，或者说各力偶皆位于同一平面内，故力偶矩可用一代数量表示。它等于力偶中任一力的大小与力偶臂的乘积并加以相应的正负号；或等于力偶中的两个力对同平面内任一点之矩的代数和。力偶$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$的力偶矩表示为$m(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$或简写为$m$。

注意，力矩的表示符号$m_O(\boldsymbol{F})$与力偶矩的表示符号$m(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$不同。力矩有脚码以表示所选的矩心，因为力矩与矩心的选取有关；力偶矩表示符号中没有脚码，因为力偶矩与矩心的选取无关。

对于空间问题来说，由于各力偶所在平面的方位各不相同，故力偶矩必须用一矢量表示，如以矢量$\boldsymbol{m}$表示力偶矩。这里还需指出，尽管在空间问题中力矩与力偶矩皆要用矢量表示，但力矩是定位矢量，必须由矩心画出，而力偶矩根据力偶可在其作用平面内任意移转，且可在其平行平面内移动的特征，可知力偶矩是自由矢量。因此，力偶矩矢是没有固定的作用点的，它可以从刚体的任一点画出。

§1-2 汇交力系与力偶系平衡问题的解法

平面汇交力系合成的方法有两种，即几何法与解析法。求解平面汇交力系的平衡问题也有几何法与解析法两种。

对于空间汇交力系，由于用几何法所作出的力多边形的各边不在同一平面内，而是一个空间的力多边形，所以计算求解并不方便。因此，对于空间汇交力系的合成与平衡问题，通常只用解析法。

对于平面力偶系，由于各力偶的力偶矩是代数量而非矢量，所以平面力偶系的合成与平衡问题，就是各力偶矩的代数值相加而得到的一个力偶或使其相加结果等于零的问题。

对于空间力偶系，虽然各力偶的力偶矩是矢量，但用几何法作出的力偶矩矢多边形是一个空间图形，计算求解很不方便。所以，空间力偶系的合成与平衡问题通常也只用解析法。

总之，几何法只在平面问题中采用，而且也只在两个汇交力求合力，或三个平面汇交力的平衡问题中应用才较简便。多于三个平面汇交力的平衡问题以及空间问题解题时都采用解析法。甚至对于受三个平面汇交力的平衡问题用解析法也较简便。

1. 几何法 平面汇交力系平衡的必要与充分的几何条件是：力多边形自行封闭。

几何法的解题步骤是：

（1）选研究对象，并取出其分离体。

（2）作所选对象的受力图。

（3）作出闭合的力多边形并根据几何关系计算求解。

如果我们用一定的比例尺严格绘制出力多边形后，再用同样的比例尺与量角器直接量得所需的未知量，这种方法称为图解法。图解法我们较少采用，因为我们绘制的力多边形一般不很准确，直接量取误差较大。如果我们作出力多边形后，根据几何关系用三角公式计算所求的未知量，这就是几何法。

对于受三个平面汇交力作用的平衡问题，作出的是一个封闭的力三角形，因而便于用三角公式计算求解。若是四个以上的平面汇交力的平衡问题，作出的是一个封闭的力多边形，用三角公式计算并不简便。因此，几何法通常仅用于受三个平面汇交力的平衡问题。

作封闭的力三角形要先从已知力开始，再从已知力的始末两端分别画出其它两力，并使各力矢首尾相连构成闭合的力三角形。

2. 解析法 平面汇交力系平衡的必要与充分的解析条件是：力系中各力在力系平面内任两相交轴上投影的代数和分别等于零。通常采用直角坐标系，所以平面汇交力系的平衡方程是

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}1)$$

平面力偶系平衡的必要与充分条件是：力偶系中各力偶的代数和等于零。所以，平面力偶系的平衡方程是

$$\Sigma m=0$$

空间汇交力系平衡的必要与充分条件是：力系中各力在三个坐标轴上投影的代数和分别等于零。所以空间汇交力系的平衡方程是：

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\\ \Sigma F_z=0\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}2)$$

空间力偶系平衡的必要与充分条件是：力偶系中各力偶矩矢在三个坐标轴上投影的代数和分别等于零。所以，空间力偶系的平衡方程是：

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m_x=0\\ \Sigma m_y=0\\ \Sigma m_z=0\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3)$$

注意：对于空间汇交力系（或空间力偶系）平衡的必要与充分条件也可以说成是，力系（或力偶系）中各力（或各力偶矩矢）的多边形自行封闭（或者说成是矢量和等于零。这是

平衡的几何条件）。

解析法的解题步骤是：

（1）选研究对象，并取出其分离体。

（2）作所选对象的受力图。

（3）建立坐标系，列平衡方程求解。

在建立坐标系时，应使坐标轴与未知力垂直或平行。若约束反力的指向不能确定时，可假定其指向。若计算结果得正值，说明假定的指向与约束反力实际的指向相同；若得负值，说明假定的指向与实际相反。

空间力在坐标轴上的投影，应根据已知条件通过方向角直接投影于轴上，或通过二次投影法计算力在坐标轴上的投影。

§1-3 力的平移与力系的简化

1. 力的平移定理 作用在刚体上的力可以向刚体上任一点平移，但必须附加一个力偶。附加力偶的力偶矩等于原力对新作用点之矩。

如图1-4所示，作用于刚体上A点的力$\boldsymbol{F}$可等效地平移到B点上。

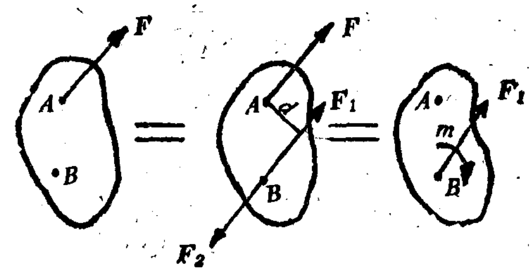


图1-4

根据力的平移定理可知：

（1）作用于刚体上的一个力，不仅可沿其作用线上任一点分解为两个分力，还可向力的作用线外任一点分解为一个力和一个力偶。分力与原力大小相等、平行且指向相同。

（2）同一点的两个力可以合成为一个合力，而同一平面内的一个力和一个力偶也可以合成为一个合力。合力与原力大小相等、平行且指向相同。

（3）由以上两点可知，力不仅可以和力成平衡，力还可以和另一力与力偶成平衡（这两个力应当是大小相等、平行且指向相反）。但一个力绝不能和一个力偶成平衡，力偶只能与力偶平衡。

如图1-5所示，这是主动力$\boldsymbol{P}$和约束反力$\boldsymbol{R}_A$与约束反力偶m_A构成的平衡。当然这也可看成是由$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{R}_A$组成的力偶与矩为m_A的力偶所构成的平衡。

（4）虽然力与力偶皆可以使物体产生转动，其转动的效应分别以力矩与力偶矩来度量，但两者并不等同。如图1-6所示，是力$\boldsymbol{P}$使滑轮转动的情况。这时滑轮轴上要受到压力（轮轴会弯曲或折断）。如图1-7所示，力偶（$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$）使滑轮转动时，轮轴上不受力，因此不会弯曲或折断。

2. 力系的简化 设在刚体的$A_1,A_2,\cdots A_n$各点上作用有空间任意力系$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots\boldsymbol{F}_n$

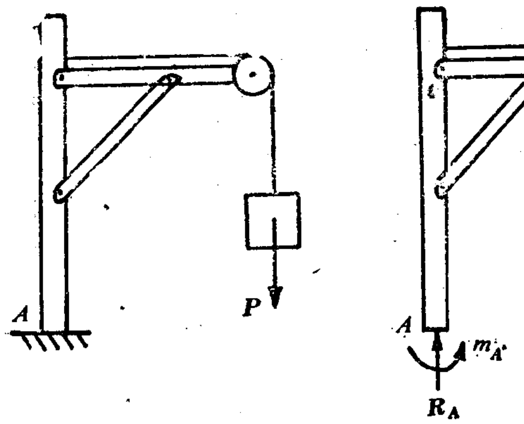


图1-5

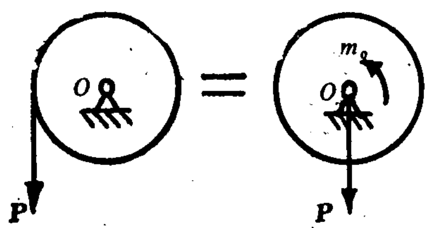


图1-6

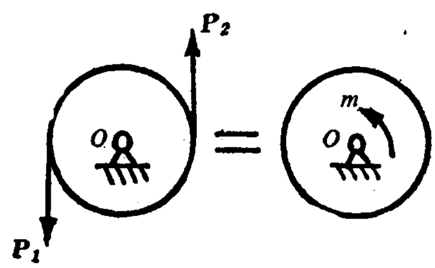


图1-7

现在我们就来把力系向刚体上任一点O简化。根据力的平移定理将力系中各力皆向O点平移。以力$\boldsymbol{F}_i$为例，向O点平移后得到一个力$\boldsymbol{F}'_i$与一个力偶矩矢为$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i)$的力偶，其中$\boldsymbol{F}'_i$与$\boldsymbol{F}_i$等值、平行、指向相同。各力皆平移后，就得到作用在$O$点的一个空间共点力系$\boldsymbol{F}'_1, \boldsymbol{F}'_2, \cdots \boldsymbol{F}'_n$，以及力偶矩矢为$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_1), \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_2), \cdots \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_n)$的附加的空间力偶系，这两者共同与原力系等效。这就是空间力系向任一点O的简化。我们再把作用在O点的空间共点力系合成为一个力$\boldsymbol{R}'$，这个力的力矢称为原空间力系的主矢，由于$\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}'_1$，$\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{F}'_2$，$\cdots\boldsymbol{F}_n=\boldsymbol{F}'_n$，所以主矢

$$\boldsymbol{R}'=\Sigma\boldsymbol{F}'_i=\Sigma\boldsymbol{F}_i$$

或简写为

$$\boldsymbol{R}'=\Sigma\boldsymbol{F}$$

即主矢等于原力系各力的矢量和，它与简化中心的选取无关。

再将此附加的空间力偶系合成为一个合力偶，合力偶矩矢是各力对简化中心O点之矩的矢量和，即

$$\boldsymbol{M}_O=\Sigma\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$$

称为原力系$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\cdots\boldsymbol{F}_n$对O点的主矩。由此可见，主矩一般与简化中心的选取有关。

3. 简化的结果 空间力系向任一点O简化后，可得到一个作用在O点的力和一个力偶。这个力的力矢（即原各力的矢量和但无固定的作用点）称为原力系的主矢；这个力偶的力偶矩称为原力系对简化中心的主矩。根据主矢$\boldsymbol{R}'$与主矩$\boldsymbol{M}_O$可能出现的各种情况，可有下述几种结果：

（1）主矢$\boldsymbol{R}'=0$，主矩$\boldsymbol{M}_O=0$。这说明力系向O点简化后的力（与主矢具有相同的大小）与力偶都等于零。故原力系成平衡。

（2）主矢$\boldsymbol{R}'=0$而主矩$\boldsymbol{M}_O\neq0$。这说明力系向O点简化只得到一个力偶，也就是说，原力系与一个力偶等效。这是力系简化为一个力偶的情况。由于力偶可在其作用平面内任意移转，也可在其平行平面内移动（条件是力偶矩不变），所以力系这时不论向任一点简化都会得到力偶矩相等的力偶，即这种情况下，主矩与简化中心的选取无关。

（3）主矢$\boldsymbol{R}'\neq0$而主矩$\boldsymbol{M}_O=0$。这说明原力系与作用在简化中心O点上的一个力等效，显然这个力就是原力系的合力。这正是简化中心选在原力系合力作用线上时的情况。

（4）主矢$\boldsymbol{R}'\neq0$，主矩$\boldsymbol{M}_O\neq0$。这时可分为下述两种情况：

（A）$\boldsymbol{R}'\perp\boldsymbol{M}_O$的情况：这说明原力系向$O$点简化后所得到的力与力偶是在同一个平面内。由于在同一个平面内的一个力与一个力偶可以合成为一个力，所以，在主矢$\boldsymbol{R}'$与主矩$\boldsymbol{M}_O$皆不等于零且$\boldsymbol{R}'\perp\boldsymbol{M}_O$的情况下，原力系可简化为一个合力。如图1-8所示，将矩为$\boldsymbol{M}_O$的

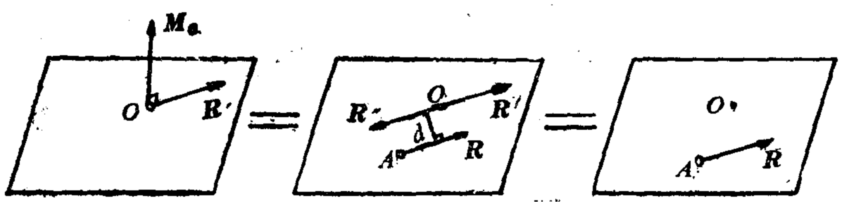


图1-8

力偶表为力偶($\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}''$)，使$\boldsymbol{R}''=-\boldsymbol{R}'$且作用于$O$点，其中$d=\frac{M_O}{R}$。由于$\boldsymbol{R}'$与$\boldsymbol{R}''$相互抵消，故得力系的合力$\boldsymbol{R}$，其作用点在$A$点。

（B）$\boldsymbol{R}'\not\perp\boldsymbol{M}_O$的情况：这说明原力系向$O$点简化后所得的力与力偶不在同一平面内。这时可将力系对O点的主矩$\boldsymbol{M}_O$所代表的力偶分为两个分力偶，各自的力偶矩矢分别为$\boldsymbol{M}_O'$与主矢$\boldsymbol{R}'$垂直，$\boldsymbol{M}_O''$与主矢$\boldsymbol{R}'$平行，如图1-9所示。这样一来，原空间力系就是与作用在简化中心O点上的力$\boldsymbol{R}'$以及力偶矩矢为$\boldsymbol{M}_O'$与$\boldsymbol{M}_O''$的两个力偶等效。由于力偶矩矢为$\boldsymbol{M}_O'$的力偶与力$\boldsymbol{R}'$位于同一平面之内，故可合成为一个作用在某点A的一个力，如图1-8所示的那

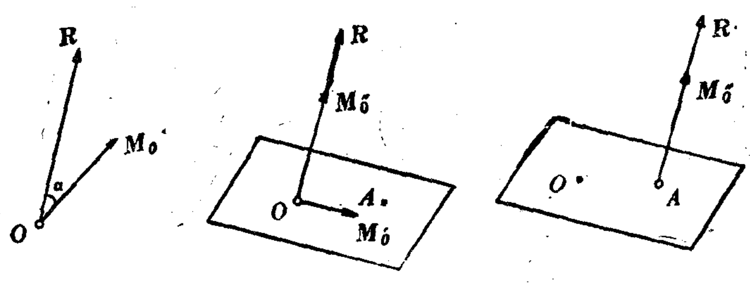


图1-9

样。这个力以$\boldsymbol{R}$表示。于是原空间力系就与作用在A点的一个力$\boldsymbol{R}$及力偶矩矢为$\boldsymbol{M}_O''$的力偶等效。这样由一个力和一个力偶作用面与力垂直的力偶所组成的力系称为力螺旋。力螺旋是一种不能再加以简化的基本力系。$\boldsymbol{R}$与$\boldsymbol{M}_O$指向相同时，称为右手力螺旋；指向相反时，称为左手力螺旋。

由上可知，力螺旋中力$\boldsymbol{R}$在空间的位置、大小、指向以及力偶矩矢$\boldsymbol{M}_O''$的大小和方向，对于可以合成为一个力螺旋的给定的空间力系来说是完全确定的，即与简化中心的选取无关。如图1-10所示，因为力螺旋中的力偶可用两个平行力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$表示，且使其中一个力过A点，于是$\boldsymbol{R}$和$\boldsymbol{F}_1$可以合成为力$\boldsymbol{S}$。所以力螺旋也可化为不共面的两个空间力。

综上所述，空间力系简化合成的最后结果有下列四种：(1) 空间力系平衡。这是$\boldsymbol{R}'=0$，$\boldsymbol{M}_O=0$的情况；（2）是一个合力。这是$\boldsymbol{R}'\neq0$，而$\boldsymbol{M}_O=0$的情况；（3）是一个合力偶。这是$\boldsymbol{R}'=0$，而$\boldsymbol{M}_O\neq0$的情况；（4）是一个力螺旋。这是$\boldsymbol{R}'\neq0$，$\boldsymbol{M}_O\neq0$且两者不垂直的情况，或者说成是$\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{M}_O\neq0$的情况。此外，因为空间平行力系的主矢与主矩总是垂直的，即总是有$\boldsymbol{R}'\cdot\boldsymbol{M}_O=0$，所以不可能合成为一个力螺旋。

对于平面力系，简化合成的最后结果只有下列三种：（1）平面力系成平衡，即主矢$\boldsymbol{R}$与主矩$\boldsymbol{M}_O$皆为零；（2）是一个合力，即$\boldsymbol{R}\neq0$而$\boldsymbol{M}_O=0$或$\boldsymbol{R}\neq0$，$\boldsymbol{M}_O\neq0$；（3）是一个合力偶，即$\boldsymbol{R}=0$而$\boldsymbol{M}_O\neq0$。

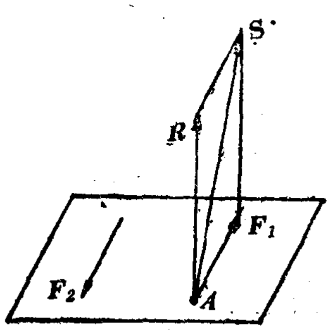


图1-10

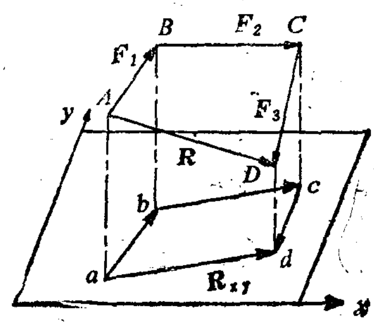


图1-11

§1-4 合力投影定理与合力矩定理

1. 合力投影定理

（1）汇交力系（包括平面汇交力系与空间汇交力系）的合力在任一轴上的投影等于各分力在同一轴上投影的代数和。

（2）空间汇交力系的合力在任一平面上的投影等于各分力在同一平面上投影的矢量和。

$$\boldsymbol{R}_{xy}=\sum\boldsymbol{F}_{xy}$$

如图1-11所示。

对于平面任意力系与空间任意力系来说，由于力系向任一点简化可得一个汇交力系和一个附加力偶系，而力系的主矢就是此汇交力系合力的力矢。所以，根据汇交力系的合力投影定理，可知力系的主矢在任一轴上的投影就等于力系中各力在该轴上投影的代数和，即

$$R_x'=\sum F_x,\quad R_y'=\sum F_y,\quad R_z'=\sum F_z$$

如果平面任意力系或空间任意力系有合力，那末对于平面任意力系来说，就是主矢$\boldsymbol{R}\neq0$、主矩$M_O=0$；或者主矢$\boldsymbol{R}\neq0$、主矩$M_O\neq0$的情况。对于空间任意力系来说，就是主矢$\boldsymbol{R}\neq0$、主矩$\boldsymbol{M}_O=0$；或者主矢$\boldsymbol{R}\neq0$、主矩$\boldsymbol{M}_O\neq0$且主矢主矩相互垂直的情况。由于合力与主矢的差别仅在于合力有确定的作用位置，而主矢却没有确定的作用位置。两者的大

小、作用线的方位和指向都相同。所以，如果平面或空间任意力系有合力的话，则合力在任一轴上的投影就等于力系中各力在该轴上投影的代数和。

2. 合力矩定理

（1）平面任意力系（包括平面汇交力系与平面平行力系在内）的合力对平面内任一点的矩等于力系中各力对该点的矩的代数和。

（2）空间任意力系（包括空间汇交力系与空间平行力系在内）的合力对任一点的矩等于力系中各力对该点之矩的矢量和。空间任意力系的合力对任一轴的矩等于力系中各力对该轴之矩的代数和。

§1-5 平面任意力系的平衡方程与刚体系平衡问题的解法

根据平面任意力系向平面内任一点简化的结果可知，平面任意力系平衡的必要与充分条件是：力系的主矢和对平面内任一点的主矩都等于零。注意平面任意力系平衡的充要条件的阐述的方法与汇交力系不同，汇交力系甚至空间力偶系平衡的充要条件是从几何条件与解析条件两个方面来阐述。

将力系的主矢与对平面内任一点的主矩都等于零这一条件表示成解析式，即得平面任意力系的平衡方程。

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x = 0\\ \sum F_y = 0\\ \sum m_O(\boldsymbol{F}) = 0\end{array}\right\} \qquad (1-4)$$

主矢与对平面内任一点的主矩都等于零的条件也可以表示成下列两种形式：

$$\left.\begin{array}{l}\sum F_x = 0\\ \sum m_A(\boldsymbol{F}) = 0\\ \sum m_B(\boldsymbol{F}) = 0\end{array}\right\} \qquad (1-5)$$

其中x轴不能与A、B两点的连线垂直。

$$\left.\begin{array}{l}\sum m_A(\boldsymbol{F}) = 0\\ \sum m_B(\boldsymbol{F}) = 0\\ \sum m_C(\boldsymbol{F}) = 0\end{array}\right\} \qquad (1-6)$$

其中A、B、C三点不能共线。

下面来证明（1-5）式与（1-6）式也是平面任意力系平衡的必要与充分条件。

必要性的证明：因为平面力系是平衡的，所以力系的主矢等于零，亦即在平面内任一轴上的投影等于零，并且力系对平面内任一点的主矩也等于零。所以（1-5）式与（1-6）式中的六个方程中的每一个都是成立的。必要性得到证明。

充分性的证明：先证明（1-5）式。由于力系对A点、B点之矩的代数和皆等于零，故力系不可能合成为一个力偶。但有可能合成为过A、B两点的一个合力。又因$\sum F_x = 0$，而x轴不与A、B两点的连线垂直，故力系也不可能合成为一个合力。于是力系只能是平衡的。

再证明（1-6）式的充分性：由于力系对A、B、C三点之矩的代数和皆为零，说明力系不可能合成为一个力偶，但可能合成为一个过三点的合力，可是A、B、C三点不共线，所以力系只能平衡。充分性得以证明。

平面任意力系的平衡方程有上述的基本形式（也称一矩式）以及二矩式和三矩式。解题

时可灵活选用，也可只选用其基本形式。

应用平面任意力系的平衡方程求解平衡问题的解题步骤与汇交力系中解析法的解题步骤相同，只是坐标轴的选取应与较多的未知力垂直，而矩心应选在两未知力的交点以简化计算。

对于平面平行力系，我们取y轴与各力平行而取x轴与各力垂直。于是平衡方程（1）式与（2）式中的$\sum F_x = 0$成为恒等式，它与力系是否平衡无关。所以，平面平行力系的平衡方程有下列两种形式

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_y = 0\\&\sum m_O(F) = 0\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}7)$$

其中y轴应与各力平行较简便。

$$\left.\begin{aligned}&\sum m_A(F) = 0\\&\sum m_B(F) = 0\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}8)$$

其中A、B两点的连线不能与各力平行。

这两组方程对于平面平行力系平衡的充要性的证明，可类似于（1－5）式与（1－6）式的证明得到。

平面任意力系有三个独立的平衡方程，因此只能求解三个未知量。任何再列出的第四个方程都不再是独立的，不能求得新的未知量。但可用来进行校核，即将已求出的值代入这个方程若为恒等式，则所求结果正确。否则计算过程有错。同样地，平面平行力系有两个独立方程，可求得两个未知量。再对任一与各平行力或某一夹角的轴（不能与各力垂直，否则各力的投影皆等于零，这种投影方程毫无意义）的投影方程或对平面内任一点的力矩方程都不再是独立的方程，不能求得新的未知量。这第三个方程也可用来校核计算结果。

对固定铰链支座的约束反力（除去二力构件，因二力构件约束反力的方向是确定的）与固定端处的约束反力，在画受力图时是分为沿x、y轴方向的两个分力来看待的。求出结果后一般不必再合成为一个合力。

关于刚体系平衡问题的解法：

求解刚体系的平衡问题是静力学的重点与难点所在。当我们拿到一个刚体系的平衡问题（即由若干个刚体所组成的系统的平衡问题）以后，一般来说，应首先判断它是属于静定问题还是属于静不定问题。但是在多数情况下，既然是让我们求解，必定问题是可解的。因为对于静不定问题，单靠刚体静力学的方法是不能求出全部未知量来的。这还需要考虑到物体的变形，列出相应的补充方程与静力平衡方程联立求解。对于单个刚体来说，若未知量的个数大于平衡方程的个数时，是静不定问题；若未知量的个数小于或等于可列出的独立平衡方程的个数时，是静定问题。刚体系的平衡问题是静定的，还是静不定（或称超静定的）可用下述方法判定：

（1）将刚体系拆成单个刚体，根据每个单个刚体所受力系的类别即可确定其独立平衡方程的个数，相加后即得此刚体系总的独立方程的个数，设为k个。

（2）再数一下共有多少个未知量。注意两刚体联结处（如铰链、皮带等）彼此相互作用的力，只能计算一次。

（3）若未知量的个数小于或等于k时，则为静定问题；大于k时，则为静不定问题。

如图1－12构架，水平杆DF受铅垂力$\boldsymbol{P}$作用，求支座B、C处的约束反力以及杆AB上A、

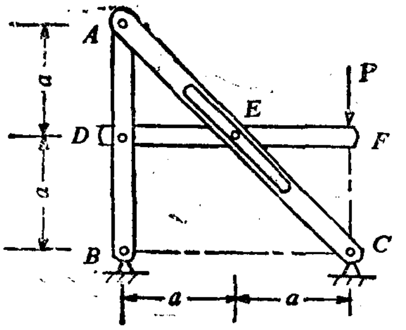


图1-12

D点处的约束反力。这是一个刚体系的平衡问题，可拆成三个单个刚体，每个受平面任意力系作用而处于平衡。总共有 $3\times3=9$ 个独立平衡方程，而未知量总共是 A、D、B、C点处各有2个共8个，E点处是光滑接触，有一个约束反力，因此未知量总共也是9个，问题是静定的。

求解刚体系的平衡问题，通常都需要取二次研究对象(有的需要取三次以上的研究对象)才能解出全部未知量来。现将刚体系平衡问题常用的三种解法归纳如下：

（1）先取整体为研究对象，解出一个或两个未知量来，再拆开取研究对象，（所取对象应包含已知量或已求出的量）求其余的未知量。

（2）先拆开取研究对象，（所取对象应包含已知量）求出一个或两个未知量来，使从整体来看未知量的个数不多于三个。然后再取整体为对象，求出其余未知量。

（3）先拆开取研究对象，（要含有已知量）求出一个或两个未知量来，再取另一部分为对象，求出其余的未知量。

在上述三种方法中，我们可先用第一种求解。若以整体为对象不能求出任一个未知量时，我们再用第二种解法。如还不行，再用第三种解法。这样解刚体系的平衡问题，在许多情况下都是较为简便的。

这里还需指出几点应注意的问题：

（1）作刚体系整体的受力图时，不要画内力（即刚体系中各刚体相互作用的力），而只画外力。拆开画受力图时，应注意刚体之间联接处的作用与反作用的关系。如将图1-12所示的刚体系拆开画受力图时，应注意在AB杆与AC杆联接点A处，约束反力的方向是相反的，因为是作用力与反作用力的关系。在D点与E点处亦然，如图1-13所示。

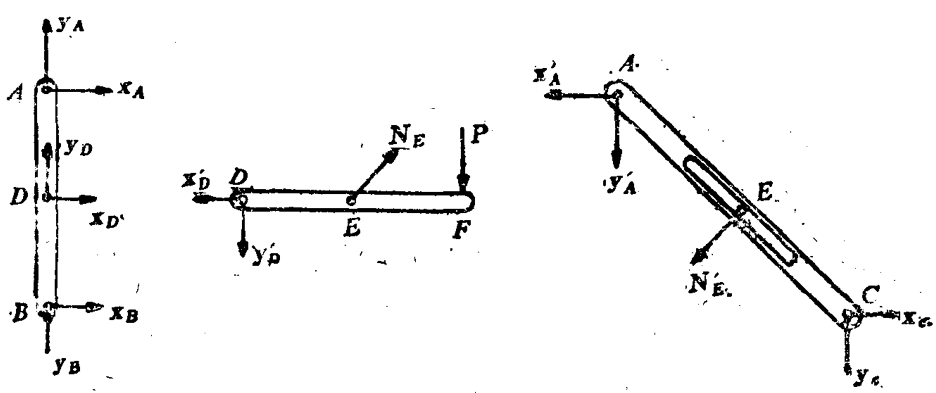


图1-13

（2）约束反力的方向不能判定时，可假定其方向。如图1-13中A、D、B、C等处约束反力的方向就是事先假定的。若计算所得为正时，说明图中假设方向与实际相同；为负时，假设方向与实际相反。此外，假定以DF杆为对象算出的x_D'或y_D'为负值，则在以AB杆为对象进行计算时，D点处的反力x_D与y_D也应以负值代入。

（3）刚体系的平衡问题，因其计算过程较为复杂，所以对计算所得结果应予校核。校核的办法是取在解题过程中没有选为对象的刚体（或由部分刚体组成的系统）为对象，建立