内 容 简 介

本书是按照高等工科院校《线性代数课程教学基本要求》重新修改编写的，原书多年来为北京航空学院各专业本科生教材。

本书内容分为六章，即行列式、线性方程组、矩阵、相似变换下的标准形、二次型以及线性空间与线性变换。并在每节与每章后附有练习题与习题。

本书可作为高等工科院校本科生教材，也可作为职工大学，业余大学教材以及工程技术人员的自学用书。

线 性 代 数

周德润 杜智敏 张志英 编

责任编辑 郭维烈

北京航空学院出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京航空学院印刷厂印装

850×1168 1/32 印张：9.25 字数：240千字

1988年3月第一版 1988年3月第一次印刷

ISBN 7-81012-039-5/O·004

印数：9000册 定价：1.55元

前　言

本书是按照全国工科数学课程指导委员会制定的关于线性代数课程基本要求在原北京航空学院各专业使用多次的教材的基础上重新修改编写的。

线性代数是高等工科院校的一门基础数学课程，有较强的逻辑性与抽象性，但授课学时一般较少。为此，我们在编写时内容上着重基本概念、理论与方法，突出重点。凡有利于深刻理解概念的重要定理的证明力求思路清晰易懂，阐述比较详细；而对另一些仅与方法有关的定理则给出结论并用例子来说明方法的使用。

书中配有较多数量的例题（包括一部分证明题）有助于读者加深对概念与定理的理解和运用，并有利于掌握一些解题的方法与证题的思路。

为巩固所学的知识，每节后配有练习题，它反映了教学的基本要求；每章后有一定数量的习题，以扩大知识面，读者可适当选做。书末附有答案或提示。

本书主要内容的教学时数约为40～50学时（打“*”号的节次可根据各专业教学要求选用,时数不计在内），可作为高等工科院校教材，也可作为职工大学、业余大学教材以及工程技术人员自学线性代数用书或参考书。

限于编者的水平与经验，书中定有不少缺点错误，诚恳地希望读者批评指正。

编　者

一九八七年十月于北京航空学院

目　录

第五章 二次型

第六章 线性空间与线性变换

第一章　n阶行列式

行列式产生于线性方程组的求解。在中学代数中，从解二元及三元线性方程组引进了二阶与三阶行列式，并且对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$$

时，方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}$$

其中D_1，D_2分别为将D的第一列、第二列换成常数项b_1，b_2所成的二阶行列式。对于三元线性方程组也有相仿的结论。那么，能否把这个结果直接推广到含有n个未知数的n个方程所组成的线性方程组中去呢？关键在于如何定义n阶行列式。因此，本章首先给出n阶行列式的概念，然后研究行列式的性质与计算，最后再把它应用到线性方程组的研究上去。

值得指出的是，行列式不仅是研究线性方程组的重要工具，而且在数学的各个领域中，在物理、力学等其它学科中都有广泛的应用。

第一节　n阶行列式的定义

我们知道，二阶、三阶行列式可以通过对角线法则写出它的表

达式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

但是，对于四阶以上的行列式便不适用了，因为对于四元线性方程组，利用消元法得到的解的表达式中，分子、分母均为24项，而用对角线法则只能得到 8 项。认真分析二阶、三阶行列式的表达式，我们发现它们具有如下共同的特征：（1）每一项都是不同行和不同列的元素的乘积，确切地说，每一项都包含了每一行的一个元素和每一列的一个元素；（2）在每一项前面都附加以正号或负号；（3）所包含的项数为所有可能的乘积。因此，要推广到 n 阶行列式需要解决：（1）每一项前面的符号按什么规律确定？（2）一个 n 阶行列式的表达式中共有多少项？下面，我们用排列的概念来解决它。

一、排　列

定义1.1　由1，2，…，n组成的一个有序数组称为一个 **n 阶排列**。

显然，n 个数码的不同的 n 阶排列总数为

$$n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!$$

例如，由 1，2，3 组成的三阶排列有 123，132，213，231，312，321，共有3！=6个。在这六个排列中，只有123是按自然顺序排列的，其余的排列都有较大的数排在较小的数之前，如132，3 排在 2 的前面。一般地，在一个排列中，如果某一个较大的数

码排在较小的数码之前，就称这两个数码构成一个**逆序**。如132中有一个逆序，而312有两个逆序。在一个排列中出现的逆序总数，称为这个排列的**逆序数**。

给出一个n阶排列$p_1p_2p_3\cdots p_n$，我们可以按照下面的方法来计算逆序数：观察1的前面有m_1个数比1大，2的前面比2大的数有m_2个，如此下去，直到n，显然没有比n大的数，$m_n=0$，于是我们记$p_1p_2p_3\cdots p_n$的逆序数为

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}m_i$$

例如，$\tau(45321)=4+3+2+0=9$。

定义1.2 一个排列如果它的逆序数是偶数就叫做**偶排列**，是奇数就叫**奇排列**。

例如，$\tau(54321)=10$，54321为偶排列。$\tau(14325)=3$，14325为奇排列。

把一个排列中某两个数码的位置互换，而其余的数码保持不变，就构成了一个新的排列。我们就把对排列所施行的这种变换称为排列的一个**对换**。45321经过4，5对换变成了54321，而54321经过1，5对换又变成了14325。我们发现，每经过一次对换，排列的奇偶性改变一次。一般地，有

定理1.1 一次对换改变排列的奇偶性。

证 分两种情况考虑。

1） 相邻的两个数对换。设排列

$$\cdots j\quad k\cdots \tag{1}$$

经过j与k的对换变成了

$$\cdots k\quad j\cdots \tag{2}$$

如果不考虑j，k本身，j，k与其它的数码在（1）中所构成的逆序，在（2）中仍构成一个逆序。对于j，k来说，当$j>k$时，（1）中j与k构成一个逆序。但在（2）中k与j不构成逆

序，（2）比（1）的逆序数少1，相反，在$j<k$时，经过对换，（2）比（1）多1个逆序。故在此种情况下，命题成立。

2） 一般情形。设排列

$$\cdots j \quad i_1 \quad i_2 \cdots i_s \quad k \cdots \tag{3}$$

经过j与k的对换变成了

$$\cdots k \quad i_1 \quad i_2 \cdots i_s \quad j \cdots \tag{4}$$

显然这样的对换可以通过一系列两两相邻的对换来实现，从(3)出发，k与i_s对换，再k与i_{s-1}对换，最后k与j对换，总共经过$s+1$次对换得到

$$\cdots k \quad j \quad i_1 \quad i_2 \cdots i_s \cdots \tag{5}$$

再将j往后对换，j与i_1对换，再j与i_2对换，…最后j与i_s对换，这样又对换了s次，得到排列（4）。于是由（3）化为(4)总计对换了$2s+1$次，根据1)，每经过一次相邻数码的对换，排列都改变奇偶性，由于$2s+1$为奇数，所以（3）与（4）的奇偶性相反。 证毕。

二、n阶行列式的定义

首先，我们用排列的观点来分析三阶行列式的表达式：

1. 当每个元素按行顺序排列时，各项的每一个元素的列序号构成了三个数码的全部排列，因此共有$3!=6$项。

2. 每一项前面的符号由列序号构成的排列的奇偶性决定：$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$的符号为$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$。

于是，我们将此推广到n阶行列式中，得到

定义1.3 n^2个元素组成的n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有D_n中的取自不同行不同列的n个元素的乘积

$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的代数和，其中$j_1j_2\cdots j_n$是数字1，2，…，$n$的一个排列，每项的符号按下列规则确定：当$j_1j_2\cdots j_n$为偶排列时取正号，当$j_1j_2\cdots j_n$为奇排列时取负号。

应用记号，n阶行列式的定义可写为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中$\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$表示对所有的$n$阶排列求和。

为书写方便，n阶行列式D_n可记为$D_n=|a_{ij}|_n$。

由定义可知，n阶行列式是由$n!$项组成的。

例1 计算n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个行列式的特点是主对角线（即从左上角到右下角诸元素所构成的对角线）上的元素a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}以下的元素都是0，即当$i>j$时，$a_{ij}=0$它称为**上三角形行列式**。

解 第n行除a_{nn}外其它元素均为零，因此要得到非零的项，第n行必须选a_{nn}，这样$n-1$行就不能选$a_{n-1\,n}$（因为第n列只能选一个元素），只能选$a_{n-1\,n-1}$。同理，第$n-2$行只能选$a_{n-2\,n-2}$，…，第1行只能选a_{11}，因而这个行列式只有唯一的一项$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$有可能不为零，故行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

其中$\prod\limits_{i=1}^{n}$表示求 n 个元素的连乘积。

例2 计算下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这个行列式的特点是当$i+j\leqslant n$时，$a_{ij}=0$。

解 同例1，除去为零的项以外，只剩下唯一的一项$a_{1n}a_{2\ n-1}\cdots a_{n1}$有可能不为零，这一项的列序号的排列是$n$，$(n-1)$，…，2，1，其逆序数

$$\tau[n(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1]$$
$$=(n-1)+(n-2)+\cdots+1$$
$$=n(n-1)/2$$

故有

$$D=(-1)^{n(n-1)/2}a_{1n}a_{2\ n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{n(n-1)/2}\prod_{i=1}^{n} a_{i\ n-i+1}$$

例3 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

解 利用定义可知

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix} = acfh + (-1)^{\tau(1324)}adeh$$

$$+(-1)^{\tau(4231)}bcfg$$

$$+(-1)^{\tau(4321)}bdeg$$

$$= acfh - adeh - bcfg + bdeg$$

在行列式的定义中，我们约定 n 个元素作乘积时，元素的行序数按自然顺序排列出。如果不这样写，而是将各元素任意排列得到，$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，其中 i_1，…，i_n；j_1，…，j_n，是行序号与列序号的两个 n 阶排列，按定义 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$是 n 阶行列式中的一项，但如何确定它前面的符号呢？显然可以交换$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{j_nj_n}$的因子的顺序，直到它的因子的行序数按自然顺序排列时，便可根据定义来确定其符号。

交换$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_ni_n}$的两个因子的顺序，那么 $i_1i_2\cdots i_n$ 与$j_1j_2\cdots j_n$两个排列同时经过了一次对换。若设 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)=s$，$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=t$，经过对换后的两个排列的逆序数分别为s'，t'，那么$s'+t'$与$s+t$的奇偶性相同。因此，

$$(-1)^{s'+t'}=(-1)^{s+t}$$

当我们经过若干次因子对换顺序之后，这一项变为 $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$ 时，按行列式的定义，该项符号为 $(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$，又$\tau(1\ 2\cdots n)=0$，于是由前面讨论知

$$(-1)^{s+t}=(-1)^{s'+t'}=\cdots$$

$$=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)+\tau(1\ 2\cdots n)}$$

$$=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}$$

这样我们便可以确定 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 前面的符号为 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$。

特别地，当我们将元素的乘积按列的自然顺序排列时，便有

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{(i_1\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \qquad (6)$$

练习题 1.1

1. 判断下列排列的奇偶性：

(1) 521436879 7　　　(2) 81624375 13

2. 在四阶行列式 $D_4=|a_{ij}|_4$ 中，写出一切带有负号的含元素 $a_{23}a_{11}$ 的项。

3. 在五阶行列式 $D_5=|a_{ij}|_5$ 中，试确定 $a_{12}a_{24}a_{53}a_{41}a_{35}$、$a_{14}a_{23}a_{51}a_{32}a_{45}$ 应取什么符号。

4. 用行列式的定义，计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

5．由行列式的定义，计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中x^4和x^3的系数。

6．试写出三阶行列式

$$D_3'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

按公式（6）给出的表达式，并与三阶行列式

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

按定义1.3给出的表达式加以比较，你能得出怎样的结论？

第二节　n阶行列式的計算

一

根据行列式的定义，我们只能计算某些特殊的行列式，对于一般的行列式来说，随着n的增大，用定义进行计算甚至是不可能的。如20阶行列式就要做$19\times 20!\approx 4\ 622\ 513\times 10^{13}$次乘法，采用每秒千万次的电子计算机也要算上一万年才行！这是无法实现的。本节我们要通过对行列式的性质以及对它的代数余子式的讨论，研究如何简化行列式的计算。

一、n阶行列式的性质

在练习1.1中，我们从第6题可知，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

那么，对于一般的 n 阶行列式这一结论是否成立呢？

性质1 如果把行列式的行与列互换，那么，行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 根据行列式的定义1.3，有

$$\text{左端} = \sum_{(j_1 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

再来考察右端的行列式，与左端行列式的表法相反，它的每个元素 a_{ij} 的第一个角码 i 表示它所在的列数，第二个角码 j 表示它所在的行数，于是，当我们把右端行列式不是按定义 1.3 而是按第一节公式（6）写出时，也就是说各项元素的乘积不是按行的自然顺序而是按列的自然顺序排列时，便有

$$\text{右端} = \sum_{(i_1 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

比较左端与右端的表达式，得左端＝右端。

证毕。

这一性质表明，在行列式中行与列的地位是对称的，因此，凡是有关行的性质，对列也成立。以下性质的证明只对行来进行。

通常，我们称右端的行列式为左端行列式的**转置行列式**，并

记行列式D的转置行列式为D'。显然，$(D')'=D$。性质1又可叙述为“行列式与它的转置行列式相等”。

性质2 如果以同一个数k乘行列式的一行（列）中的各元素，那么等于k乘这个行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 根据定义

$$\text{左端}=\sum_{(j_1 j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=k\sum_{(j_1 j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$=\text{右端}$$

证毕

性质2还可叙述为“行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式符号之外。”由此性质可得

性质3 如果行列式的一行（列）的所有元素为零，则行列式为零。

性质4 如果行列式的两行互换，那么行列式只改变一个符号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 根据行列式的定义及定理1.1

$$\text{左端}=\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{nj_n}$$

$$=-\sum_{(j_1\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{kj_k}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$=$右端

证毕

由上述性质可直接得到

性质5 行列式若有两行（两列）相同，行列式为零。

证 设n阶行列式D的第i行与第k行相同，于是将第i行与第k行互换后，行列式不变；但根据性质4，它们又应当反号，所以有$D=-D$，即$2D=0$，因此$D=0$。 证毕。

性质6 如果行列式的两行（两列）的对应元素成比例，那么行列式为零。

证 利用性质2与性质5可知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$=k\times 0=0$

证毕。

性质7 如果行列式的第i行中各元素都可以写成两项的和：

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij} \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

那么这行列式等于两个行列式的和，这两个行列式的第i行，一个是b_{i1}，b_{i2}，…，b_{in}，另一个是c_{i1}，c_{i2}，…，c_{in}，其他各行都同原行列式的一样，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 利用行列式定义1.3，有

$$\text{左端}=\sum_{(j_1-j_n)}(-1)^{\tau(j_1-j_i-j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{(j_1\cdot j_n)}(-1)^{\tau(j_1-j_i-j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$$+\sum_{(j_1-j_n)}(-1)^{\tau(j_1-j_i-j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$

$=$右端

证毕

这一性质在行列式的计算或某些理论证明中起着重要的作用。这一点将在本节二中及以后的讨论中见到。对于一个n阶行列式，如果每一个元素都是两项之和，那么它便可以拆成2^n个n阶行列式之和；如果它的某一行是m项之和，那么，它可以拆成m个n阶行列式之和。

性质8 如果把行列式的某行中各元素同乘一数k后，加到另一行中各对应元素上，那么这行列式不变，即$i\neq j$时，有