KONGJIAN JIEXI JIHE

空间解析几何

王敬庚 傅若男 编著

北京师范大学出版社

空间解析几何

王敬庚　傅若男　编著

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何/王敬庚,傅若男编著.—北京:北京师范大学出版社,1999.8
ISBN 7-303-05171-6

Ⅰ.空… Ⅱ.①王…②傅… Ⅲ.立体几何:解析几何·高等学校:师范学校-教材 Ⅳ.I182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 35279 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号 邮政编码:100875)
出版人:常汝吉
北京师范大学印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本:850mm×1 168mm 1/32 印张:8.75 字数:209 千字
1999 年 8 月第 1 版 1999 年 8 月第 1 次印刷
印数:1～3000 定价:12.00 元

前　言

空间解析几何是数学系一年级学生必修的一门基础课，它为学生学习数学分析，高等代数，微分几何以及力学等课程，提供必要的基础知识。同时，它本身的内容对解决某些实际问题也很有用。

本书包括有关解析几何产生的历史概述及四章和一个附录，书末有部分习题的答案。

让学生知道一点有关一门课程的创立历史，有助于学生掌握该门课程的基本思想和它在整个数学中所处的地位。为此本书将解析几何产生的历史概述，放在最前面供学生阅读。

第一章是向量代数。在本章中暂不引进坐标系，目的是为了让学生更好地掌握向量本身的运算。强调向量的各种运算的几何意义和在几何中的应用，这种着重对“形”的思考的安排，较有利于培养学生的几何直观能力。

第二章是平面和空间直线。首先建立空间直角坐标系，用坐标进行向量运算，然后运用向量和坐标两种方法，研究有关平面和空间直线的问题。

第三章是特殊曲面和二次曲面。介绍球面、直圆柱面、直圆锥面等常见的特殊曲面；应用曲线族产生曲面的理论，讲解建立一般的柱面、锥面和旋转曲面方程的方法；对椭球面等五种常见二次曲面的标准方程，分析讨论它们表示的空间图形的几何形状。为了提高学生对空间图形的直观想象力，本章还特别介绍由几个曲面围成的空间区域简图的画法，这也是学习数学分析中重积分计算所必需的。

第四章是一般二次曲线和一般二次曲面的讨论。前者作为中学平面解析几何内容的提高和补充，对于师范院校培养未来的中学教师是必不可少的。为此本章把它作为重点，对一般二次曲线的理论，进行较为系统和详尽的讨论，而对一般二次曲面的讨论只作简要的介绍。之所以这样安排，除了因为二次曲线与中学联系密切外，还因为讨论的方法，从二维到三维很多地方可以类推。

附录介绍平面仿射变换，包括仿射变换及它的特例等距变换的概念，图形的仿射性质在解中学几何题中的应用，仿射坐标系及其在中学解析几何中的应用。这部分内容对扩展学生关于几何学的视野和指导中学有重要意义。

我们在编写本书时，努力遵循如下几点：内容力求简明，突出解析几何的基本思想和基本方法，力戒繁琐；注意强调各种代数表示式的几何意义，着重从几何直观上进行分析；注意密切联系中学，体现师范特点；在讲解中多分析，多举例题，使教材便于教师教和学生学；每节后有习题，习题的选配既注意基本题，又有综合和提高的题，且题量适中。

书末附有大部分计算题的答案，供学生及时核对用。发现和纠正错误贵在及时，当发现自己的答案不对时，要认真寻找错在哪里，分析出错原因，吸取教训，这样才能避免再发生类似的错误。这是本书给出答案的本意。

本书作为讲义曾在北京师范大学数学系近年来历届学生中使用。每周 4 学时讲授，两学时习作课，一学期可学完本书。

我们在编写过程中，参考了朱鼎勋、陈绍菱著《空间解析几何学》，苏步青等著《空间解析几何》，波格列洛夫著《解析几何》等书，谨向各书的著译者表示谢意。

我系杨存斌、余玄水、王申怀三位老师先后多次使用本讲义，刘继志老师受出版社委托仔细审阅了全部书稿，并提出了宝贵的意见，向他们表示衷心的感谢。我们也感谢首都师大数学系刘增贤

教授，她在百忙中审阅了书稿。

我们还要感谢我校出版社和出版委员会的专家们，通过他们的评审，我校出版社决定资助出版本教材。出版社王松浦编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动，我们对她表示由衷的谢意。

由于编者水平的限制，书中缺点错误一定不少，恳请大家批评指正。

编者　1998年9月

于北京师范大学数学系

目　　录

阅读材料

解析几何创立的历史概述及这门课程的重要性*)

一、费马和笛卡儿在创立解析几何中的贡献

费马(Fermat,1601～1665,法国人)和笛卡儿(Descartes,1596～1650,法国人)是十七世纪的伟大数学家. 由于他们关心曲线研究中的一般方法,以及由于他们直接从事科学研究工作,敏锐地看到数量方法的必要性,而且注意到代数具有提供这种方法的力量,因此他们就用代数来研究几何. 他们所创立的学科叫做坐标几何或解析几何,其中心思想是把代数方程和曲线曲面联系起来,这个创造是数学中最丰富最有效的设想之一.

一句话,科学的需要和对方法论的兴趣,推动了费马和笛卡儿对坐标几何的研究.

费马,出身于商人家庭,学法律并以律师为职业,数学只是他的业余爱好. 虽然,他只能利用闲暇时间研究数学,但他对数论和微积分作出了第一流的贡献,并同帕斯卡(Pascal)一起开创了概率论的研究工作,他与笛卡儿都是坐标几何的发明者.

费马关于曲线的工作,是从研究古希腊几何学家特别是阿波罗尼奥斯(Apollonius)开始的. 阿波罗尼奥斯的《论平面轨迹》一

*)取材于[美]克莱因著《古今数学思想》(上海科学技术出版社)中译本第二册第十五章 P1～P27.

书久已失传，而费马是把它重新写出来的人之一. 他用代数来研究曲线，他说，他打算发起一个关于轨迹的一般研究，这种研究是古希腊人没有做到的. 1629 年他写了一本《平面和立体的轨迹引论》(1679 年发表)，书中说，他找到了一个研究有关曲线问题的普遍方法.

费马的坐标几何究竟怎样产生的，我们不知道，很可能是他把阿波罗尼的结果，直接翻译成代数的形式. 他考虑任意曲线和它上面的一般点 J(如图 1)，J的位置用 A，E 两个字母定出：A 是从点 O 沿底线到点 Z 的距离，E 是从 Z 到 J 的距离. 他所用的坐标，就是我们现在的斜角坐标，但是 y 轴没有明确出现，而且不用负数，他的 A，E 就是我们现在的 x，y.

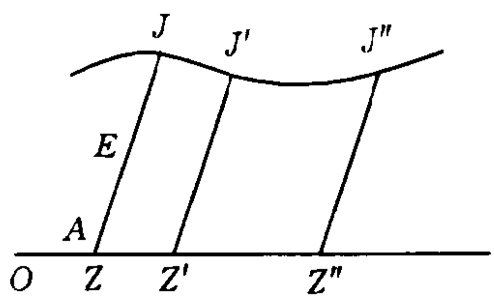

图 1

费马把他的一般原理叙述为："只要在最后的方程里出现两个未知量，我们就得到一个轨迹，这两个量之一，其末端就描绘出一条直线或曲线."图 1 中对不同位置的 E，其末端 J，J'，J''…就把"线"描出，他的未知量 A 和 E，实际是变数，或者可以说，联系 A 和 E 的方程是不定的. 他写出联系 A，E 的各种方程，并指明它们所描绘的曲线. 例如，他给出方程(用我们现在的写法就是)$dx=by$，并指出这代表一条直线；他又给出 $d(a-x)=by$，并指出它也表示一条直线；方程 $p^2-x^2=y^2$ 代表一个圆；$a^2-x^2=ky^2$ 代表一个椭圆；$a^2+x^2=ky^2$ 和 $xy=a$ 各代表一条双曲线；$x^2=ay$ 代表一条抛物线. 而且费马确实领悟到坐标轴可以平移和旋转，因为他给出了一些较复杂的二次方程，并给出了他们可以简化到的简单形式. 他肯定地得到如下结论：一个联系着 A，E 的方程，如果是一次的就代表直线，如果是二次的就代表圆锥曲线.

笛卡儿，首先是一位杰出的近代哲学家，另外他还是近代生物

学的奠基人，第一流的物理学家，同时也是一位数学家．他的父亲是一个相当富有的律师，笛卡儿大学毕业后去巴黎当律师，在那里他花了一年的时间，跟两位神甫一起研究数学．其后的九年中，他曾在几个军队中服役，但他一直继续研究数学．在荷兰布莱达地方的招贴牌上有一个挑战性的数学问题，被他解决了，这使他自信有数学才能，从而开始认真用心于数学．回到巴黎后，他为望远镜的威力所激动，又一心钻研光学仪器的理论和构造．1628 年，他 32 岁时移居荷兰，得到较为安静自由的学术环境，在那里他住了二十年，写出了著名的作品．1649 年他被邀请去做瑞典女皇的教师，第二年在那里患肺炎逝世，享年五十四岁．

1637 年笛卡儿写的《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》一书出版，这是一本文学和哲学的经典著作，包括三个著名的附录：《几何》、《折光》和《陨星》．《几何》是他所写的唯一的一本数学书，他关于坐标几何的思想，就包括在他的这本《几何》中．笛卡儿的其他著作有《思想的指导法则》、《世界体系》，《哲学原理》、《音乐概要》．

笛卡儿是通过三个途径来研究数学的：作为一个哲学家，他把数学方法看作是在一切领域建立真理的方法来研究；作为自然科学的研究者，他广泛地研究了力学、水静力学、光学和生物学等各个方面，他的《几何》的一部分和《折光》都是讲光学的；作为一个关心科学的用途的人，他强调把科学成果付之应用，这一点上，他同希腊人明白地公开地决裂．由于他注意到数学的力量，他就要去寻找数学的用途．他不推崇纯粹数学，他说："我决心放弃那个仅仅是抽象的几何．这就是说，不再去考虑那些仅仅是用来训练思想的问题．我这样做，是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何．"对他来说，数学不是思维的训练，而是一门建设性的有用科学．

笛卡儿对当时几何和代数的研究方法进行了分析和比较，他

认为，没有任何东西比几何图形更容易印入人的脑际了，因此，用这种方式表达事物是非常有益的. 但他对欧几里得几何中的每一个证明都要求某种新的往往是奇巧的想法这一点深感不安，他还批评希腊人的几何过多地依赖于图形. 他完全看到了代数的力量，看到它在提供广泛的方法论方面，高出希腊人的几何方法；他同时强调代数的一般性，以及它把推理程序机械化和把解题工作量减小的价值. 他看到代数具有作为一门普遍的科学方法的潜力，但他对当时通行的代数也加以批评，说它完全受公式和法则的控制，不像一门改进思想的科学，因此他主张采取代数和几何中一切最好的东西，互相以长补短. 他所做的工作，就是把代数用到几何上去，在这里，他对方法的普遍兴趣和他对代数的专门知识，就组成了联合力量，于是就产生了他的《几何》一书.

在《几何》中，他开始仿照韦达(Vieta)的方法，用代数解决几何作图题，后来才逐渐出现了用方程表示曲线的思想.

举两个例子.

假定某个几何问题，归结到寻求一个未知长度 x，经过代数运算，知道 x 满足方程 $x^2=ax+b^2$，其中 a，b 是已知长度. 于是由代数学得到

$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2} \qquad ①$$

(笛卡儿不考虑负根). 他画出 x 如下：

作直角三角形 NLM(如图 2)，其中 $LM=b$，$NL=\frac{a}{2}$，延长 MN 到 O，使 $NO=NL=\frac{a}{2}$，于是 OM 的长度就是 x.

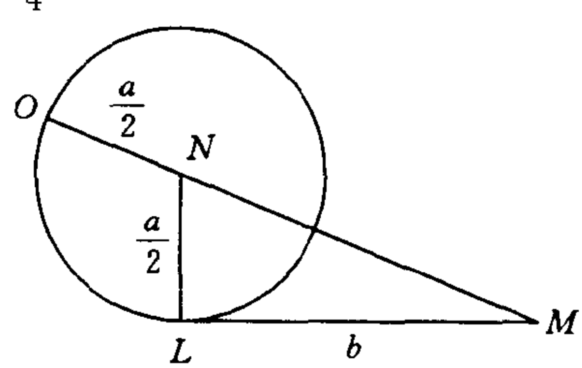

图 2

这就是说，由解一个代数方程而得到的①式指明了 x 的画法.

在《几何》第一卷的前一半中，笛卡儿用代数解决的只是古典的几何作图题，这只不过是代数在几何上的一个应用，并不是现代意义下的解析几何.

下一步，笛卡儿考虑了不确定的问题，其结果有很多长度可以作为答案，这些长度的端点充满一条曲线. 他说"也要求发现并描出这条包括所有端点的曲线". 曲线的描出，根据于最后得到的不定方程，笛卡儿指出，对于每个 x，长度 y 满足一个确定的方程，因而可以画出.

笛卡儿以帕普斯(Pappus)问题为例.

帕普斯问题　在平面上给定三条直线，求所有这样的点的位置(即轨迹)：从这点作三条直线各与一条已知线交成一个已知角(三个角不一定相同)，使在所得的三条线段中，某两条的乘积(指长度的乘积)与第三条的平方成正比.

如果给定四条直线，画法同上，但要求所得的四条线段中，某两条的乘积与其余两条的乘积成正比.

如果给定五条直线，画法仍同上，但要求在所得的五条线段中，某三条的乘积与其余两条的乘积成正比.

如果给定的直线多于五条，以此类推.

帕普斯曾经断言，当给定的直线是三条或四条时，所得的轨迹是一条圆锥曲线.

在《几何》第二卷中，笛卡儿处理了四条直线时的帕普斯问题.

设给定的直线是 AG, GH, EF 和 AD(图 3). 考虑一点 C，从 C 引四条直线各与一条已知直线交成已知角(四个角不一定相同)，把所得的四条线段记为 CP, CQ, CR, CS，要求找出满足条件 $CP \cdot CR = CQ \cdot CS$ 的点 C 的轨迹.

笛卡儿记 AP 为 x，记 PC 为 y，经过简单的几何考虑，他从已

知量得出 CR, CQ, CS 的值，把这三个值代入 $CP \cdot CR = CQ \cdot CS$，就得到一个 x 和 y 的二次方程

$$y^2 = ay + bxy + cx + dx^2, \quad ②$$

其中 a, b, c, d 是由已知量组成的简单的代数式．于是他指出，如果任意给 x 一个值，就能得到 y 的一个二次方程，从这个方程可以解出 y，于是就能用直尺和圆规把 y 画出来，如同他在第一卷所做的．由此可知，如果我们取无穷多个 x 值，就得到无穷多个 y 值，从而得无穷多个 C 点．所有这些 C 点组成的轨迹，就是方程②所代表的曲线．

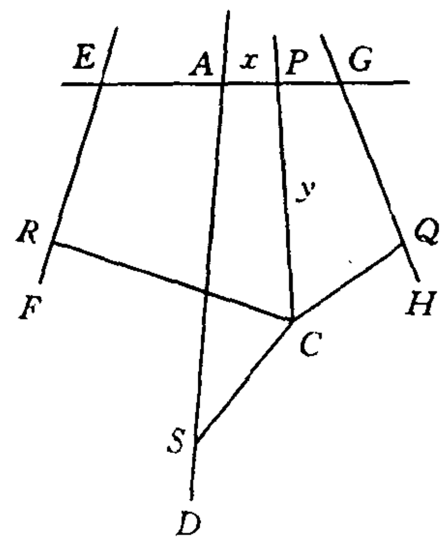

图 3

笛卡儿的做法，是选定一条直线(如图 3 中的 AG)作为基线，以点 A 为原点．x 值是基线上从 A 量起一个线段的长度，y 是由基线出发与基线作成一个固定角度的一个线段的长度．这个坐标系我们现在叫做斜角坐标系．笛卡儿的 x, y 只取正值，即图形只在第一象限内．

有了曲线方程的思想之后，笛卡儿进一步发展了他的思想．

1．曲线的次数与坐标轴的选择无关．

2．同一坐标系中两个曲线的方程联立，可解出交点．

3．曲线概念的推广．古希腊人说平面曲线是可以用直尺和圆规画出的曲线，而笛卡儿则排斥了这种认为只有能用直尺和圆规画出的曲线才是合法的思想．他提出，那些可用一个唯一的含 x 和 y 的有限次代数方程表示出的曲线，都是几何曲线，例如蔓叶线($x^3 + y^3 - 3axy = 0$)和蚌线都被承认是几何曲线；其他如螺线等，笛卡儿称之为机械曲线(莱布尼茨(Leibniz)后来把它们分别称之为代数曲线和超越曲线)．笛卡儿对曲线概念的这一推广，取消了曲线是否存在要看它是否可以用圆规和直尺画出这个判别标准，

不但接纳了以前被排斥的曲线，而且开辟了整个的曲线领域，牛顿(Newton)1707 年称这是“把所有可以用方程表示的线都接收到几何里”.

从上面的叙述中我们可以看出，费马和笛卡儿两人各自都研究了坐标几何，但他们研究的目的和方法却有明显的不同：费马着眼于继承古希腊的思想，认为自己的工作是重新表述了阿波罗尼奥斯的工作；而笛卡儿批评了希腊人的传统，主张和这个传统决裂. 虽然用方程表示曲线，在费马的工作中比在笛卡儿的工作中更为明显，但应该说真正发现代数方法的威力的是笛卡儿.

由于种种原因，使坐标几何的思想——用代数方程表示并研究曲线，在当时没有很快地被数学家们热情地接受并利用.

一个原因是因为费马的书《轨迹引论》到 1679 年才出版，而笛卡儿的《几何》中对几何作图题的强调，遮蔽了方程和曲线的主要思想. 事实上，许多和笛卡儿同时代的人，都认为坐标几何主要是解决作图问题的工具，甚至莱布尼茨也说笛卡儿的工作是退回到古代. 虽然笛卡儿本人确实知道，他的贡献远远不限于提供一个解决作图问题的新方法，他在《几何》的引言中说，“我在第二卷中所作的关于曲线性质的讨论，以及考查这些性质的方法，据我看远远超出了普通几何的论述”，但他利用曲线方程之处，确实被他的作图问题所遮盖.

坐标几何传播速度缓慢的另一个原因是笛卡儿的书《几何》写得使人难懂. 他说欧洲几乎没有一个数学家能读懂他的著作，书中许多模糊不清之处，是他故意搞的，他只约略指出作图法和证法，而留给别人去填入细节. 他在一封信中把他的工作比作建筑师的工作，只是定出计划，指明什么是应该做的，而把手工操作留给木工和瓦工. 他还说：“我没有做过任何不经心的删节，但我予见到，对于那些自命为无所不知的人，我如果写得使他们能充分理解，他们将不失机会地说我所写的都是他们已经知道的东西. ”还有另一