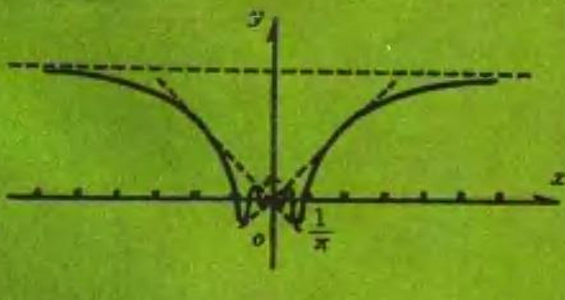
JING JI SHU XUE JI CHU XUE XI ZHI DAO

经济数学基础学习指导

单立波　佟吉森　主编



北京工业大学出版社

经济数学基础学习指导

单立波　佟吉森　主编

北京工业大学出版社

(京)新登字 212 号

经济数学基础学习指导
主编　单立波　佟吉森
北京工业大学出版社出版发行
各地新华书店经销
石家庄市西焦印刷厂印刷

1992 年 5 月第 1 版　1992 年 5 月第 1 次印刷
850×1168 毫米 32 开本 8.75 印张 219 千字
印数:1—2900 册
ISBN 7—5639—0240—6/O・13
定价:6.60 元

前　　言

本书是与《经济数学基础》配套使用的。

受教学课时的限制，《经济数学基础》教材中的有些概念、性质不可能作更深刻的说明，有的定理证明从略，例题类型也不够全面。

我们根据多年的教学实践编写了这本教学指导书，为的是帮助广大读者更好地理解、掌握《经济数学基础》这本教材的内容，提高分析问题和解决问题的能力。

本书由单立波副教授、佟吉森副教授主编，参加编写的有吴秉坚、车煊、安云碧、付小琴、任慧之等老师。

由于时间紧迫，书中尚有不足之处，诚望广大读者批评指正，以供再版时修改。

编　者

1991 年 9 月

目　录

第一章　函　数

本章由以下三部分内容构成

一、函数的概念及函数几种简单性质

二、反函数、复合函数的概念

三、基本初等函数简介、初等函数概念

第一节　函数的概念

一、基本内容与学习要求

本节基本内容：

1. 由实际问题中两个变量之间的关系引出了函数的概念。

2. 确定函数的定义域。

3. 函数关系的三种表示方法：公式法、图象法、列表法。

要求：

1. 理解函数的概念，了解什么是分段函数。

2. 知道函数的三种表示方法。

3. 掌握函数值，函数定义域的求法。

二、内容说明与注意事项

1. 对函数定义和函数关系的说明

（1）　本教材中函数的定义实际上是单值函数。即当 x 取一个值时，y 就有唯一的确定值与之对应。但在实际问题中，有时会遇到自变量 x 取一值时，与之对应的因变量 y 能取得两个或两个

以上的数值，这时我们称 y 是 x 的多值函数。本教材中所提及的函数关系专指单值函数关系，凡不符合单值函数定义，我们就认为不是函数关系。

(2) 确定函数关系的两个要素是定义域和对应规则。只有定义域、对应规则完全相同的函数关系才是同一个函数，否则便是两个不同的函数。

2. 对如何求函数定义域的几点说明与注意

在确定函数定义域时，除了把握教材中所讲的两个原则外，还要注意以下三点：

(1) 有限个初等函数经过四则运算而成的函数，其定义域是这有限个函数定义域的交集。

(2) 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $\varphi(x)$ 定义域的子集，在其上的值 $u=\varphi(x)$ 都属于 $y=f(u)$ 的定义域。

(3) 分段函数的定义域，即各个"段"上自变量取值的集合的并集。

三、例题补充与习题参考答案或提示

例 1. $y>x$ 是否是函数关系？

解： 按对应规则 $y>x$，每一个 x 值有无穷多个 y 值与之对应。不符合函数定义，所以 $y>x$ 不是函数关系。

例 2. 研究 $y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是不是相同的函数关系。

解： $y=x+1$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，而函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 定义域是 $x\neq1$ 的全体实数。所以，$y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是定义域不同的两个不同的函数关系。如图 1-1 与图 1-2。

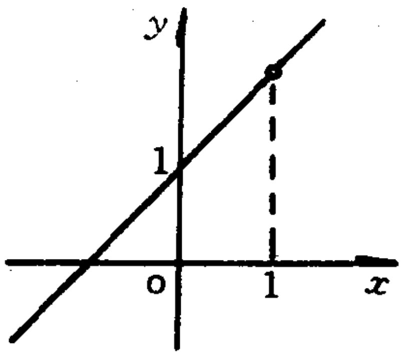


图 1-2

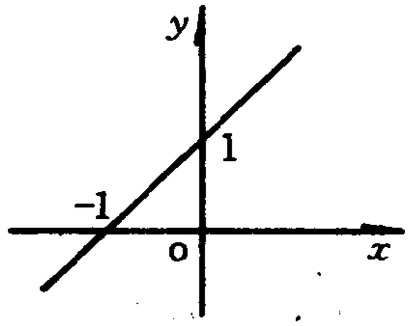


图 1-1

例 3.　研究 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数关系。

解：$y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 都是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数关系，但是其对应规则不同。函数 $y=x$，当 $x\geqslant0$ 时 $y\geqslant0$；当 $x<0$ 时 $y<0$。而函数 $y=\sqrt{x^2}$，当 $x\geqslant0$ 时 $y=x\geqslant0$；当 $x<0$ 时 $y=-x>0$。即 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是定义域相同而对应规则不同的两个不同的函数关系。如图 1-3 和图 1-4。

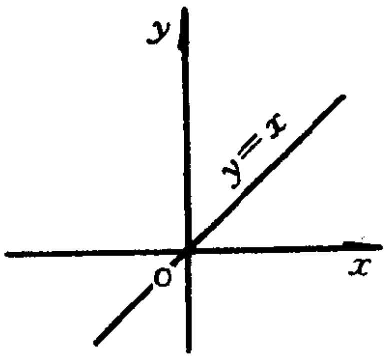


图 1-3

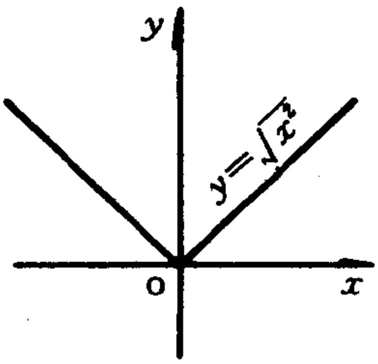


图 1-4

思考题：

(1)　若 $f(x)=\ln x^2$；$g(x)=2\ln x$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一个函数吗？

(2)　研究 $f(x)=1$ 与 $g(x)=\frac{x}{|x|}$ 是不是相同的函数关系。

例 4.

设函数 $f(x)=\begin{cases}2x & x<0\\ 0 & x=0\\ x^2 & x>0\end{cases}$

求 $f(-1)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(a^2+b^2)$，(其中 $a>0$，$b>0$)。确定函数定义域并作出函数图形。

解：$x=-1<0$ 在此分段函数中，应由 $f(x)=2x$ 确定，所以 $f(-1)=2\cdot(-1)=-2$

同理可得：

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$f(a^2+b^2)=(a^2+b^2)^2$$

此分段函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$，其图形如图 1-5。

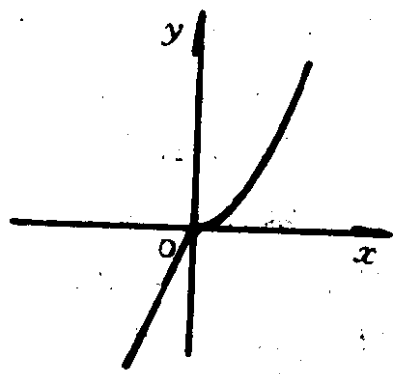


图 1-5

例 5. 若 $\varphi(x)=\ln x$，

证明 $\varphi(x)+\varphi(x+1)=\varphi[x(x+1)]$

证明：因为 $\varphi(x)+\varphi(x+1)=\ln x+\ln(x+1)$

$$=\ln[x(x+1)]$$

而 $\varphi[x(x+1)]=\ln[x(x+1)]$

所以 $\varphi(x)+\varphi(x+1)=\varphi[x(x+1)]$

例 6. 求 $y=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$ 的定义域

解： 要使$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$有意义，必须有：

$1-\dfrac{1}{x}\neq 0$ 且 $x\neq 0$，即 $x\neq 1$ 且 $x\neq 0$

故函数定义域为：

$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

例 7. 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x-4}}$的定义域

解： 要使$\sqrt{\dfrac{x-2}{x-4}}$有意义，必须有：

$\dfrac{x-2}{x-4}\geqslant 0$ 且 $x\neq 4$ 即

$\begin{cases} x-2\geqslant 0 \\ x-4>0 \end{cases}$ 或$\begin{cases} x-2\leqslant 0 \\ x-4<0 \end{cases}$ 从而得

$x>4$ 或 $x\leqslant 2$

故函数定义域为：

$(-\infty,2]\cup(4,+\infty)$

例 8. 求函数 $y=\sqrt{1-x}+\arccos\dfrac{x+1}{2}$的定义域

解： 要使函数表达式有意义，须有：

$1-x\geqslant 0$ 且 $-1\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1$ 即 $x\leqslant 1$

且 $-3\leqslant x\leqslant 1$

故函数定义域为：

$(-\infty,1)\cap[-3,1]=[-3,1]$

例 9. 求函数 $y=\ln(3x+1)$的定义域

解： 要使 $\ln(3x+1)$有意义，须有：

$3x+1>0$ 即 $x>-\frac{1}{3}$

故函数定义域为：

$$\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$$

1. 设函数 $f(x)=\frac{1}{2+x^2}$

求：$f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$f(x^2)$

答案：$f(0)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{9}$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{2x^2+1}, f(x^2)=\frac{1}{2+x^4}$$

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\leqslant 1\\ x+3 & 1<x<3\end{cases}$

求：$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，指出函数的定义域，并作出函数的图形。

答案：$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$.

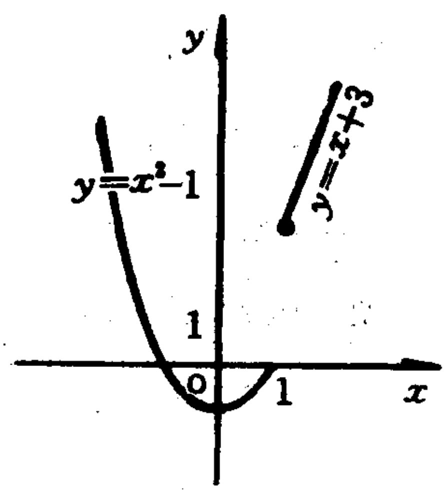
$f(0)=-1$

$f(1)=0$

$f(2)=5$

定义域为$(-\infty,3)$

3. 设 $\varphi(t)=a^t$



第二题图

求证　$\varphi(x)\cdot\varphi(y)=\varphi(x+y)$

证明：因为　$\varphi(x)=a^x,\varphi(y)=a^y$

所以　$\varphi(x+y)=a^{x+y}=a^x\cdot a^y=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$

4. $y=\dfrac{x^2}{x}$与$y=x$是不是相同的函数关系？为什么？

答案：不是相同的函数关系。因为定义域不同。

5. 求下列函数的定义域并用区间表示

(1)　$y=\dfrac{4}{x+1}$　　(2)　$y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，

(3)　$y=\sqrt{3x+4}$　(4)　$u=u(t)=\sqrt{t^2-4}$，

(5)　$y=\sqrt[3]{9-x^2}$　(6)　$y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$。

答案：(1)　$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

(2)　$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

(3)　$[-\dfrac{4}{3},+\infty)$

(4)　$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

(5)　$(-\infty,+\infty)$

(6)　$(-1,0]$

第二节　建立函数关系举例

一、基本内容与学习要求

本节基本内容：

通过几个实例说明建立函数关系的方法。

要求会建立简单应用问题，特别是经济问题的函数关系。

二、内容说明与注意事项

作为本节教材补充，我们介绍几种常用的经济函数：

1. 总成本函数

某产品的总成本是指生产一定数量的产品所需的全部费用总额。它由固定成本与可变成本组成。

总成本的计算公式是：

总成本＝可变总成本＋固定成本

若用 C 表示总成本，K 表示单位产品可变成本，x 表示产量，C_0 表示固定成本，则总成本与产量的函数关系即总成本函数

$$C=C(x)=Kx+C_0$$

若用 $\overline{C}$ 表示平均单位成本，则得平均成本函数

$$\overline{C}=\frac{C(x)}{x}=\frac{Kx+C_0}{x}=K+\frac{C_0}{x}$$

2. 总收入函数

总收入是生产者出售一定量产品所得的全部收入。

若用 R 表示收入，P 表示单位商品售价，x 表示销售量（产量），则得总收入函数

$$R=R(x)=P\cdot x$$

3. 总利润函数

利润即扣除成本以后的纯收入。

总利润函数＝总收入函数－总成本函数

若用 L 表示总利润，则

$$L=L(x)=R(x)-C(x)$$

4. 需求函数

需求是指在一定价格条件下，消费者愿意购买并且有支付能力购买的商品量。

需求是由多种因素决定的。我们不考虑价格以外的其它因素，只研究需求与价格的关系。

若用 Q 表示需求量，P 表示商品价格，则需求与价格的函数关系即需求函数：

$$Q = f(P)$$

一般说来，商品价格低，需求大；商品价格高，需求小。因此需求函数是单调递减的函数。如图 1-6 中曲线 D

5. 供给函数

供给是指在一定价格条件下，生产者愿意出售并且有可供出售的商品量。

供给也是由多种因素决定的。略去价格以外的其它因素，仅反应供给与价格的函数关系称为供给函数。

若用 Q 表示供给量，P 表示商品价格，则有

$$Q=\varphi(P)$$

一般说来，商品价格低，生产者供给量少；价格高，供给量多。因此一般供给函数为单调增加函数。如图 1-6 中曲线 S。

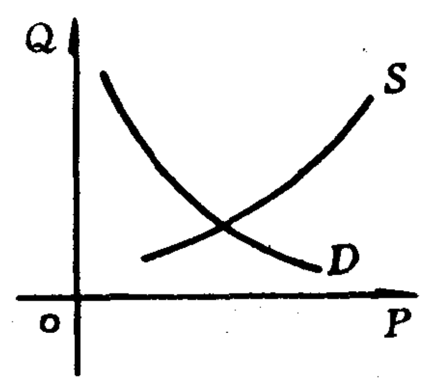


图 1-6

三、例题补充与习题参考答案或提示

例 1.　已知某产品的需求函数为 $P=10-\dfrac{Q}{5}$，成本函数为 $C=50+2Q$（其中 Q 为需求量，P 为价格，C 为成本），若需求量等于供给量，试确定总利润函数 $L(Q)$。

解：总收入函数 $R(Q)=P\cdot Q=(10-\frac{Q}{5})Q$

$$=10Q-\frac{Q^2}{5}$$

所以总利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$

$$=10Q-\frac{Q^2}{5}-50-2Q$$

$$=8Q-\frac{Q^2}{5}-50$$

例 2. 某工厂生产某种产品，固定成本为 20000 元，每生产一单位产品，成本增加 100 元。已知总收入 R 是生产量 Q 的函数

$$R=R(Q)=\begin{cases}400Q-\frac{1}{2}Q^2 & 0\leqslant Q\leqslant 400\\ 80000 & Q>400\end{cases}$$

试确定总利润函数。

解： 总成本函数 $C=C(Q)=20000+100Q$

故总利润函数为：

$$L=L(Q)=R(Q)-C(Q)$$

$$=\begin{cases}300Q-\frac{Q^2}{2}-20000 & 0\leqslant Q\leqslant 400\\ 60000-100Q & Q>400\end{cases}$$

1. 如图，由直线 $y=kx$，x 轴，及平行于 y 轴的直线 AB 围成一个直角三角形，当 AB 线平行移动时，求三解形的面积 S 与 x 的函数关系。

解： 依三解形面积公式，当 AB 平行移动时，三角形面积

$$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|OB|$$

$$=\frac{1}{2}xy$$

$$=\frac{1}{2}x\cdot kx=\frac{1}{2}kx^2$$

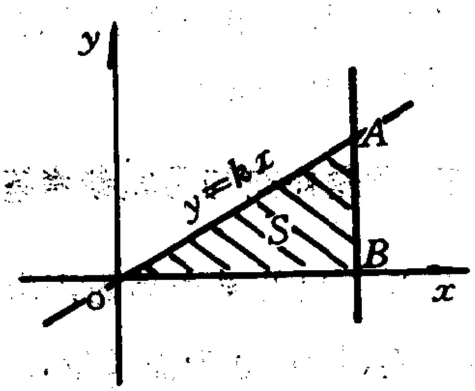


图 1-7