# 电 动 力 学

张民宽　石开屏　主编

谢持中　于国安
徐由均　周培德　编



河南大学出版社

**电　动　力　学**

**主编**　张民宽　石开屏

责任编辑　姜伟林

河南大学出版社出版

（开封市明伦街85号）

河南省新华书店发行

中国科学院开封印刷厂印刷

开本：850×1168毫米　1/32　印张：10.375　字数：260千字

1990年 11 月第 1 版　1990年 11 月第 1 次印刷

印数：1—3000　定价：2.65元

ISBN 7-81018-462-8/O·25

# 序　言

电动力学研究的对象是电磁场的基本属性，我们要处理的是场的运动，同学们在这里将第一次碰到用场的观念来讨论问题，这是本课程的一个特点．但由于初学者对矢量分析等数学工具掌握不够熟练，于是这个特点也就往往成为读者的一个难点．为了解决这个问题，本书作者把这部分内容纳入正文，作为第一章，从物理角度详述了有关的基本概念，这对学习本课程是大有帮助的．之外，本书内容取舍适度，既突出了重点，又适当注意拓宽知识面，增加了国内外教学研究进展的新内容．本书叙述细致，便于阅读，力求做到物理概念清晰，增强学生的直观感受能力．本书可作为高等师范院校及综合性大学物理系各专业电动力学课程的试用教材，也可供其他有关专业的师生参考．

本书的编写者都是工作在教学第一线多年的教师．看得出，作者已把他们多年的教学经验和体会揉和到有关的章节中去了．另外，本书的出版也是高校合作编写教材的成果．在本书即将出版之际，我乐于写上几句，以志祝贺，并期望他们能进一步合作，为发展我国的教育事业作出更大的贡献．

蔡圣善

1988.10.25.

# 编 者 的 话

电动力学是大学物理系本科学生必修的一门重要的基础理论课，也是一门比较难学的课．对于初学者而言，“难”主要表现在：对该课程所用的数学工具难掌握；其基本概念和基本理论难理解；习题难做．为帮助同学们克服学习电动力学中遇到的上述困难，这便是我们编写这本教材的主要目的．

本书是编者们在其讲授多年电动力学讲稿的基础上经多次讨论，认真取舍，通力合作而写成的．具体分工是：第一章由张民宽执笔；第二章由谢持中执笔；第三章由于国安执笔；第四章由徐由均执笔；第五章由周培德执笔；第六章由石开屏执笔．全书最后经张民宽、石开屏统一整理完成．定稿时谢持中也付出了辛勤劳动．本书稿承复旦大学物理系蔡圣善先生审阅，提出不少宝贵意见并写了序言，对此我们表示由衷的谢意．

本书所用的物理学名词．均以全国自然科学名词审定委员会公布的《物理学名词》为准．

由于我们水平有限，错误和不当之处在所难免，切望读者批评、斧正．

编 者

1989.11.

# 目　　录


第一章　场的数学理论……………………………………………………（ 1 ）

§1.1　矢量代数………………………………………………………（ 1 ）

§1.2　标量场的梯度　矢量场的散度和旋度……………………（ 6 ）

§1.3　矢量场中的一些常用定理…………………………………（ 13 ）

§1.4　哈密顿算符∇及其运算公式………………………………（ 19 ）

§1.5　三维正交曲线坐标系………………………………………（ 26 ）

§1.6　张量的初步知识……………………………………………（ 39 ）

第二章　电磁现象的普遍规律………………………………………（ 50 ）

§2.1　静电场的基本方程…………………………………………（ 50 ）

§2.2　稳恒磁场的基本方程………………………………………（ 55 ）

§2.3　麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式…………………………（ 60 ）

§2.4　介质中的麦克斯韦方程组…………………………………（ 65 ）

§2.5　边值关系……………………………………………………（ 72 ）

§2.6　电磁场的能量和能量的传输………………………………（ 78 ）

§2.7　电磁场的动量………………………………………………（ 83 ）

§2.8　矢势与电磁场的动量………………………………………（ 88 ）

第三章　静电场和稳恒电流的磁场…………………………………（ 95 ）

§3.1　静电势方程及边界条件……………………………………（ 95 ）

§3.2　唯一性定理…………………………………………………（ 98 ）

§3.3　镜象法………………………………………………………（ 102 ）

§3.4　分离变量法…………………………………………………（ 109 ）

§3.5　多极展开法…………………………………………………（ 116 ）

§3.6　静电能和静电力　带电体系在外场中的能量……………（ 122 ）

§3.7　磁矢势………………………………………………………（ 129 ）

§3.8　矢势的多极展开　磁偶极子………………………………（ 133 ）

§3.9 磁标势……………………………………………………（139）
§3.10 磁镜象法……………………………………………………（145）
第四章 电磁波的传播……………………………………………（156）
§4.1 电磁场的波动性……………………………………………（156）
§4.2 单色平面波在介质中的传播……………………………（162）
§4.3 电磁波在介质分界面上的反射与折射…………………（170）
§4.4 单色平面波在导体中的传播……………………………（180）
§4.5 等离子体中的电磁波………………………………………（190）
§4.6 波导装置中的导行电磁波…………………………………（194）
第五章 电磁波的辐射……………………………………………（210）
§5.1 电磁场的矢势和标势 推迟势……………………………（210）
§5.2 电偶极辐射 磁偶极辐射…………………………………（217）
§5.3 天线辐射……………………………………………………（230）
§5.4 运动带电粒子的辐射………………………………………（236）
§5.5 似稳电磁场和似稳电路……………………………………（244）
第六章 狭义相对论………………………………………………（250）
§6.1 伽利略相对性原理…………………………………………（250）
§6.2 狭义相对论产生的历史背景………………………………（256）
§6.3 狭义相对论的基本原理……………………………………（259）
§6.4 洛伦兹变换…………………………………………………（262）
§6.5 狭义相对论时空观…………………………………………（269）
§6.6 狭义相对论的四维表示……………………………………（286）
§6.7 相对论电动力学……………………………………………（295）
§6.8 相对论力学…………………………………………………（309）

# 第一章 场的数学理论

电动力学的主要任务是在电磁学的基础上，从场的观点进一步深入研究宏观电磁现象和带电粒子运动的基本规律．因此，要比较顺利地学习电动力学必须预先掌握一定的场的数学描述方法．这部分的主要内容是矢量代数、矢量分析和张量的初步知识等．本章拟扼要地讲述这些数学工具，但不做详细讨论，更不企求数学的完备性和逻辑的严谨性．

## §1.1 矢量代数

### 1．矢量及其表示方法

矢量与标量(只有数值大小的量)的性质是不同的．例如力、加速度、电场强度、磁场强度等，都属于矢量．

一个由大小和方向共同确定的物理量，称为矢量，记作$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$等．

在几何上，矢量用一有向线段表示．有向线段的起点$O$和终点$P$分别称为矢量的起点和终点．记$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{OP}$，如图1-1示．

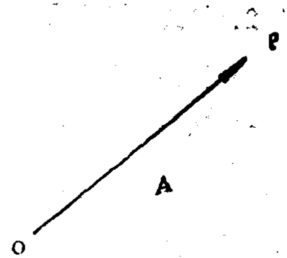


图1-1

矢量的大小是指该有向线段的长度，称为矢量$\boldsymbol{A}$的绝对值，也叫该矢量的模，记为$A=|\boldsymbol{A}|$．矢量的模是一个正数．当矢量的模为1时，称该矢量为单位矢量，记

为 $e=\frac{A}{|A|}$；当矢量的模为零时，称该矢量为零矢量，简单记为 $0$.

在直角坐标系中，一个矢量$\boldsymbol{A}$可由基本单位矢量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$唯一地表示成

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}. \tag{1.1-1}$$

其中

$$\begin{cases}A_x=A\cos\alpha,\\A_y=A\cos\beta,\\A_z=A\cos\gamma.\end{cases}$$

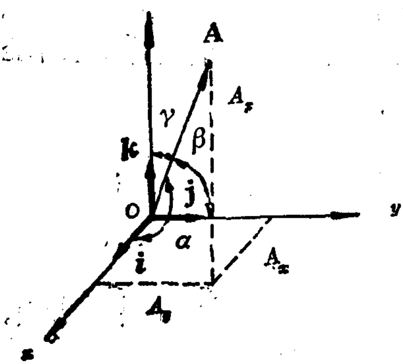

图1-2

分别为$\boldsymbol{A}$在$x$，$y$，$z$轴上的分量；$\alpha,\beta,\gamma$分别为$\boldsymbol{A}$与$x$，$y$，$z$轴之间的夹角，而$\cos\alpha$ $\cos\beta$，$\cos\gamma$叫方向余弦（如图1-2）.

空间任一点$P$的位置，可用$P$点对某一固定点$O$的径矢表示，这径矢称为$P$点对$O$点的位置矢量$\boldsymbol{r}$.显然，

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

**2. 矢量的标量积（点乘）**

设两矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$之间的夹角为$\theta$，则定义两矢量的标量积为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta. \tag{1.1-2}$$

在几何上，两矢量的标量积可视为任一矢量（如$\boldsymbol{A}$）的模与另一矢量（如$\boldsymbol{B}$）在该矢量方向上的投影的乘积（如图1-3）．在物理上，若一个矢量表示力，另一个矢量表示位移，则标量积表示力所做的

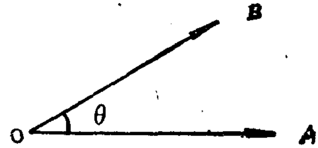

图1-3

功.

根据定义式(1.1-2)，基本单位矢量的标量积，有下列关系

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

应用这些关系，可得

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z. \qquad (1.1\text{-}3)$$

标量积满足下列性质

(1) 交换律 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$. (1.1-4)

(2) 分配律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}==\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$. (1.1-5)

(3) 结合律 $\lambda(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\lambda\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot(\lambda\boldsymbol{B})$. (1.1-6)

(4) 若$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$ 则$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$. ($\boldsymbol{A}\neq0$, $\boldsymbol{B}\neq0$). (1.1-7)

### 3. 矢量的矢量积(叉乘)

设两矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$之间的夹角为$\theta$，则定义两矢量的矢量积为矢量$\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=AB\sin\theta\boldsymbol{n}. \qquad (1.1\text{-}8)$$

其中$\boldsymbol{n}$为垂直于$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$所在平面的单位矢量，且$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{n}$组成右手螺旋系.

矢量的大小$C=AB\sin\theta$，在几何上表示以两矢量为邻边所组成的平行四边形的面积(图1-4)。在物理上，若$\boldsymbol{A}$表示电流密度$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{B}$表示磁感应强度，则$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$表示该磁场对电流作用的力密度$\boldsymbol{f}$.

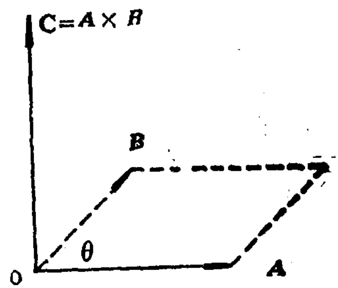


图1-4

根据定义式(1.1-8)，基本单位矢量的矢量积有下列关系

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0.$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}.$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}.$$

应用这些关系不难得出

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}. \qquad (1.1\text{-}9)$$

矢量积满足下列性质

(1) 不服从交换律 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$. (1.1-10)

(2) 分配律 $\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}$. (1.1-11)

(3) 结合律 $\lambda(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\lambda\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times(\lambda\boldsymbol{B})$. (1.1-12)

(4) 若 $\boldsymbol{A}\parallel\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$. (1.1-13)

### 4. 矢量的混合积

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为任意三矢量，定义

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=|\boldsymbol{C}||\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|\cos\theta.$$

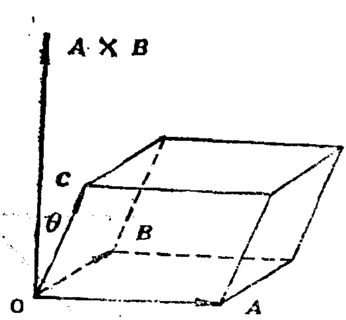

图1-5

为三矢量的混合积(其中 $\theta$ 是 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 之间的夹角)．它是一个矢量．其几何意义，由图1-5不难看出．混合积的绝对值，等于以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为棱所构成的平行六面体的体积．在物理上，若 $\boldsymbol{A}$ 表示电场强度，$\boldsymbol{B}$ 代表磁场强度，$\boldsymbol{C}$ 代表面积矢量，则混合积的数值表示电磁能量对时间的变化率．

矢量的混合积满足下列性质

（1）轮换性　$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$

$$=-\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})$$
$$=-\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}). \qquad (1.1\text{-}14)$$

（2）坐标表示式

$$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \qquad (1.1\text{-}15)$$

（3）三矢量共面条件　$\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0.$　(1.1-16)

**5．矢量的三重积**

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为三个任意矢量，我们定义 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 为矢量的三重积．它仍是一个矢量．三重积具有下列性质

(1)　$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}.$

(2)　$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}.$　(1.1-17a)

$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}.$　(1.1-17b)

性质（1）说明三重积不满足结合律；性质（2）进一步指出，因 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的结合不同，三重积得到的矢量在大小和方向上都不相同．下面仅对(1.1-17a)式加以证明．

设　$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}).$

其中　$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}.$

先求 $\boldsymbol{f}$ 的 $x$ 分量 $f_x$，

$$f_x=A_yD_z-A_zD_y.$$

而上式中的 $D_y$ 和 $D_z$ 分别为：

$$D_y=B_zC_x-B_xC_z;\quad D_z=B_xC_y-B_yC_x.$$

$$\therefore\ f_x=A_y(B_xC_y-B_yC_x)-A_z(B_zC_x-B_xC_z)+A_xB_xC_x-A_xB_xC_x$$
$$=(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)B_x-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)C_x$$
$$=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})B_x-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})C_x.$$

同理可得

$$f_y=(A\cdot C)B_y-(A\cdot B)C_y,\quad f_z=(A\cdot C)B_z-(A\cdot B)C_z.$$

于是得

$$f=A\times(B\times C)=(A\cdot C)B-(A\cdot B)C.$$

(1.1-17b)式可用同理证明.

## §1.2 标量场的梯度 矢量场的散度和旋度

### 1. 场的概念

物理上所指的场都是同发生一定的物理现象相联系的. 例如空间的点电荷 $q$ 在其周围必激发电场，空间各点电场强度的大小和方向都是不同的. 电场强度既然有大小和方向，它就是一个矢量. 但要描写点电荷在空间各点激发的电场分布情况，就不能只用一个矢量，也即是说在空间的每一点都对应着一个矢量，这些矢量的总体(集合)叫做矢量场. 标量场也有类似的定义，不过空间的每一点只须用一个数值便可唯一确定了.

从数学角度来看，所谓的场，一般说来是一个以空间位置 $(x,y,z)$ 和时间 $(t)$ 为自变量的函数.

如果描写场的函数是标量函数

$$\varphi=\varphi(x,y,z,t).$$

这个场就称为标量场. 如温度场 $T(x,y,z,t)$，密度场 $\rho(x,y,z,t)$ 等.

如果描写场的函数是矢量函数

$$A=A(x,y,z,t),$$

这个场就称为矢量场. 如电场 $E(x,x,z,t)$，磁场 $B(x,y,z,t)$，电流密度场 $j(x,y,z,t)$ 等.

为简单计，常用 $x$ 或 $r$ 代表一组数 $(x,y,z)$. 所以把场写成

$$\varphi(x,t);\quad A(x,t)$$

不随时间变化的场叫稳恒场，记为

$$\varphi(x)；\quad A(x)$$

不随空间位置变化的场叫均匀场，记为

$$\varphi(t)；\quad A(t)$$

为了进一步把握标量场和矢量场的特性，需要引入标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的概念，以便对这两种场的空间变化率和它们之间的关系进行讨论，从而使我们对场有一个统一地认识．

### 2．标量场的梯度

梯度是描述标量场各点最大空间变化率的量，它是一个矢量．

设有一标量场 $\varphi$，为描述某一点附近 $\varphi$ 的变化情况，我们研究任意方向的空间位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 改变 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 时 $\varphi$ 的增量 $\mathrm{d}\varphi$．由偏微分理论

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathrm{d}z\\ &=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k})\\ &=(\mathrm{grad}\varphi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=|\mathrm{grad}\varphi|\mathrm{d}r\cos\theta. \end{aligned}\tag{1.2-1}$$

其中已令 $\mathrm{grad}\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$；而 $\theta$ 为矢量 $\mathrm{grad}\varphi$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 之间的夹角．

由(1.2-1)式知，$\mathrm{d}\varphi$ 与 $\mathrm{d}r$ 成正比，与方向的关系表现为有一个因子 $\cos\theta$．当 $\cos\theta=1$（即 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与 $\mathrm{grad}\varphi$ 的方向一致）时，函数沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 方向的空间变化率 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$（也叫方向导数）有最大值 $\left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)_{\text{最大}}=|\mathrm{grad}\varphi|$；当 $\cos\theta\neq1$（即 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与 $\mathrm{grad}\varphi$ 的方向不一致）时，$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}=$

$|\mathrm{grad}\varphi|\cos\theta$，此时 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}<|\mathrm{grad}\varphi|$．因此，我们以 $\left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)_{\text{最大}}$ 为准定义一个矢量 $\mathrm{grad}\varphi$，称为标量场 $\varphi$ 的梯度．它的大小为函数 $\varphi$ 空间变化率的最大值，其方向为函数变化率（增加率）最大的方向．

也可将(1.2-1)式改写成 $\mathrm{d}\varphi=(\mathrm{grad}\varphi)\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\mathrm{d}r$．所以，沿任意方向的方向导数为

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}=(\mathrm{grad}\varphi)\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}=(\mathrm{grad}\varphi)\cos\theta=(\mathrm{grad}\varphi)_r\qquad(1.2\text{-}2)$$

其中 $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ 为沿 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量．(1.2-2)式表明，标量场 $\varphi$ 沿任意方向的方向导数，等于其梯度在该方向的投影．因此，只要知道标量场 $\varphi$ 在某点的梯度，$\varphi$ 在该点沿任意方向的方向导数也随之确定了．

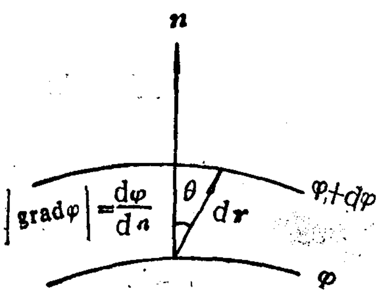


图1-6

如果画出标量场的等值面（$\varphi=$ 常数的点连成的面），显然，梯度的方向就是沿该点等值面的法线方向，梯度的数值是法线方向上的空间变化率（图 1-6）．即

$$\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n}.\qquad(1.2\text{-}3)$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为等值面法线方向的单位矢量，而 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ 称为沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数．

为了简便，引入一个矢量算符，称作哈密顿算符(nabla)．在直角坐标系中定义为

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad (1.2\text{-}4)$$

则梯度表示为

$$\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}. \qquad (1.2\text{-}5)$$

我们以电势场 $\varphi$ 为例来说明梯度的物理意义．若将单位正电荷放在电场中，此电荷必将受到电场力作用而运动．可以想见，这个电荷运动的趋向是由数值较大的等势面指向数值较小的等势面，而且取最短路径（即沿等势面法线方向）．梯度恰好能反映这一现象．此单位正电荷在某点所受的电场力，就等于该点电势梯度的负值．即

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi.$$

### 3．矢量场的散度

矢量场的散度描述了矢量场的一种空间变化率，它本身是一个标量，其数值表征了矢量场中任一点源的流（发）散程度．

为了描述矢量场$\boldsymbol{A}$在某点的发散情况，可围绕此点作一闭合曲面$S$，该曲面所围的体积为 $\Delta V$．当 $\Delta V\to 0$（表示曲面所围之体积以任意方式收缩为一点）时，$\boldsymbol{A}$对$S$的通量$\oint_s \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$与$\Delta V$的比值之极限，被定义为矢量场$\boldsymbol{A}$在该点的散度，记为 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$．

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_s \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}. \qquad (1.2\text{-}6)$$

它表示通量相对于体积的变化率．如果用算符 $\nabla$ 表示，在直角坐标系中，散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \qquad (1.2\text{-}7)$$

这表明矢量场在某点的散度是矢量场$\boldsymbol{A}$在各坐标轴上的分量沿各自坐标的变化率之和．

当 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}>0$ 时，表明某点处是发出矢量线的源(源头)；

当 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}<0$ 时，表明某点处是吸收矢量线的沟(尾闾)；

当 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ 时，表明某点处既无源，也无沟，矢量线在该点不会间断.

在矢量场$\boldsymbol{A}$中，若每一点皆有 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}\neq0$，则该场称为有源场；反之，若每一点皆有 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，则该场称为无源场(也叫横场). 在矢量场$\boldsymbol{A}$中，若在某一区域内的每一点 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}\neq0$，则该区域称为有源区；若在某一区域内的每一点 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，该区域称为无源区.

我们以静电场为例来进一步说明散度的物理意义. 若电荷连续分布在任意闭合面所围的某一空间区域内，则此空间区域某点处电场的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\lim_{\Delta V\to0}\frac{\oint_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}=\frac{q/\varepsilon_0}{\Delta V}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

可见静电场某点的散度决定于该点的电荷密度 $\rho$，在静电场中，因为 $\rho\neq0$，所以静电场是有源场. $\rho$ 的数值和围绕该点的单位体积内发出(或吸收)电场线的条数有关.

### 4. 矢量场的旋度

旋度是矢量场中另一个基本概念. 它也是一种最大空间变化率，但它是描述矢量场中每一点涡旋(旋转)强弱程度的量，是一个矢量.

为描述矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中某点的涡旋性质，可在该点取一小面元 $\Delta\boldsymbol{S}$，面元的法线方向为$\boldsymbol{n}$，边线为$L$($L$为任意形状的闭合曲线，其环绕方向与 $\boldsymbol{n}$ 方向成右螺旋系). 当$\Delta S\to0$ 时，$\boldsymbol{A}$对 $L$ 的环量 $\oint_L\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$与$\Delta S$之比的极限，被定义为一个矢量$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$沿$\boldsymbol{n}$方向的分量. 即