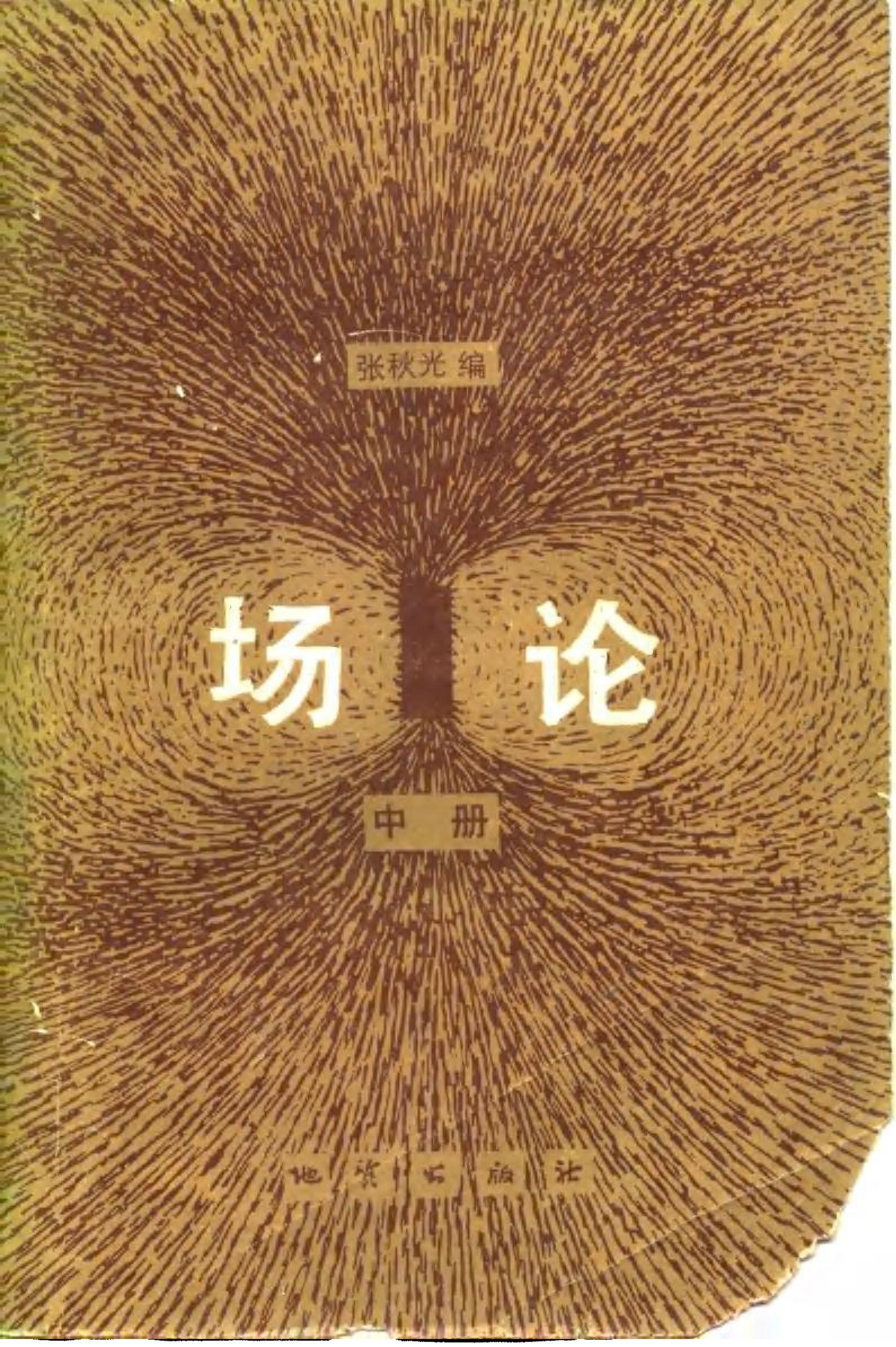

张秋光 编

场论

中册

地质出版社

场　　论

中　册

张秋光　编

地质出版社

场　论

中　册

张秋光　编

*

责任编辑：张怀素　王文孝

地质出版社出版

（北京西四）

地质出版社印刷厂印刷

（北京海淀区学院路29号）

新华书店北京发行所发行·全国新华书店经售

*

开本：850×1168 1/32 印张：17 13/16 字数：472,000

1985年7月北京第一版·1985年7月北京第一次印刷

印数：1—6,510册　定价：4.80元

统一书号：15038·新1055

目　录

A.贝塞耳方程的解

B.贝塞耳函数的基本性质

A.直角坐标系

B.球坐标系

C.柱坐标系

D.椭球坐标系

第四章　解析函数与平面场

有关解析函数的理论是在大量实际问题（如流体力学、弹性力学、电磁学中的许多实际问题）的要求和推动下逐步建立和发展起来的，它是研究各种平面场（即二度场）的一个强有力的数学工具。本章将对解析函数的基本理论作简要的介绍；同时举例说明它在研究平面稳定电磁场时的具体应用，其中许多内容对引力场也是适合的。

§1　复　　数

在初等数学中❶，已经较详细地叙述过复数的概念、复数的表示法及其运算规则，此处不再重复，仅将主要内容集录在下面备查。

形如 $x+iy$ 的式子叫做**复数**，简记作 z。式中，$i=\sqrt{-1}$ 称为**虚数单位**；x、y 为实数，分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记作

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z。$$

两个复数相等是指它们的实部和虚部分别相等。如果一个复数的实部和虚部同时为零，则称此复数等于零。

将复数 $z=x+iy$ 的虚部变号所得到的复数 $x-iy$ 叫做 z 的**共轭复数**，通常用 $\bar{z}$（或 z^*）表示。显然，$\bar{\bar{z}}=z$，说明共轭是相互的。

设　$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，复数的四则运算规则如下：

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2),\tag{1}$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),\tag{2}$$

---

❶ 例如，可参阅物探工人自学参考读物《数学》第一卷（初等数学）第11章（地质出版社，1981）。

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}。(z_2\neq 0) \qquad (3)$$

复数的加法和乘法满足交换律、结合律和分配律。

如果用具有直角坐标 (x, y) 的点表示复数 $z=x+iy$，便可以在全体复数和 xoy 平面上的全体点之间建立起一一对应的关系。因此，常把复数z叫做点z，表示复数的xoy平面称之为**复平面**或z平面，ox、oy 轴分别称作**实轴**和**虚轴**（图1）。

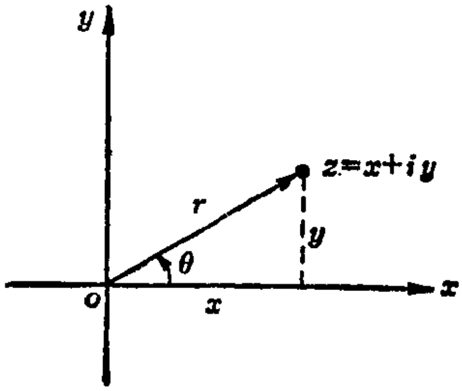

图 1

复数 z 也可以用从原点指向点 z 的矢量来表示（图1）。矢量的长度称为 z 的模或绝对值，记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2};$$

矢量与实轴正向的交角叫做 z 的辐角，记作

$$\mathrm{Arg}z=\theta。$$

值得注意的是：$\mathrm{Arg}z$ 的值不是唯一的，可以加上 2π 的任意整数倍。我们把属于区间$[0,2\pi)$的值称之为**辐角的主值**，记作$\arg z$。于是有

$$\mathbf{Arg}z=\mathbf{arg}z+2k\pi \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

当$z=0$时，$|z|=0$，但辐角不确定。

由于$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，也可以将复数 $z=x+iy$写成三角形式

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta);$$

引用欧拉公式❶

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,$$

则可进一步写作指数形式

$$z=re^{i\theta}。$$

❶ 其实，欧拉公式是一种规定。容易直接验证

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2),$$

于是有 $e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$，表明这种规定是合理的。

容易证明，如果将表示 z_1、z_2 的矢量按平行四边形法则相加减（图2），则所得的结果与（1）式完全一致。由于三角形两边之和（差）不小（大）于第三边，可得出以下两个重要的不等式：

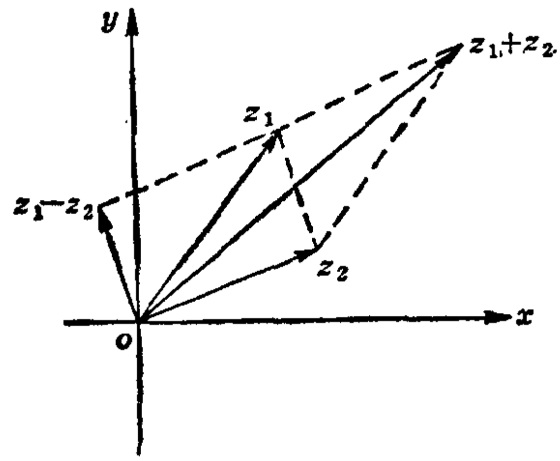

图 2

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|, \tag{4}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|。 \tag{5}$$

若记 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$，则复数的乘、除运算法则(2)、(3) 可改写成

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)], \tag{6}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]。 \tag{7}$$

复数 $z=re^{i\theta}$ 的n次乘方与n次方根（n 为正整数）按以下公式计算：

$$z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta), \tag{8}$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-1)。 \tag{9}$$

最后，谈一谈**复数球面**和**无穷远点**。

在解析函数论中，除离原点有限远的点（或有限的复数）外，还需补充一个无穷远点（或无穷大复数），其模大于任何正数，辐角不定。

关于无穷远点，可以这样理解：如图 3 所示，在复平面上放置一个球，使球面与复平面相切于原点o（南极S），过南极S作复平面的垂线，它与球面的另一交点记作N（北极）。对于复平面

上的任一点z，作z与N的连线，它与球面相交于P。这样，便在复平面上的点与去掉了北极的球面上的点之间建立起一一对应的关系。对于每一个复数z都有球面上唯一的点P与之对应；反之，对于球面上（除N外）任一点P，也有唯一的复数z与之对应。但是，与北极N对应的复数不存在。如果让点z以任何方式无限远离原点o，则相应的点P就无限趋近北极N。因此，可以假想在复平面上有一无穷远点∞与球面的北极N相对应。包括无穷远点在内的复平面称之为**扩充了的复平面**，又称为闭平面，它与整个球面（称为复数球面或黎曼球面）形成一一对应。今后，谈到复平面，如未加上“闭”字，均指不包括∞点在内。

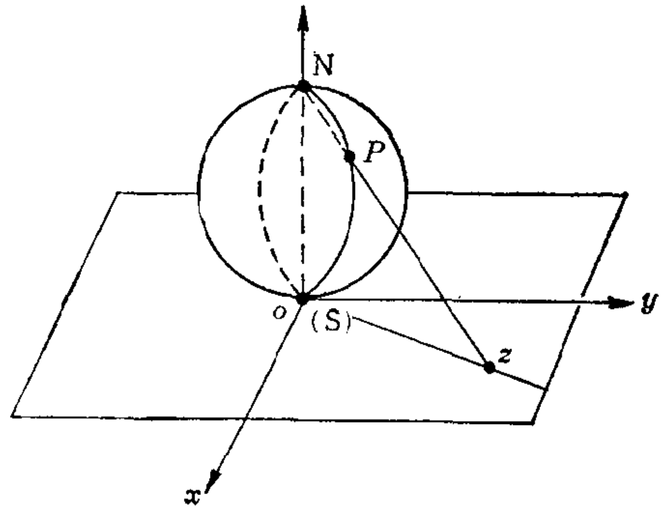

图 3

习题1　求下列复数的实部、虚部、模及辐角：

(1) $\dfrac{1-i}{1+i}$，(2) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$，(3) $\sqrt[4]{1+i}$。

习题2　试证明实系数n次代数方程的复根必以共轭形式成对出现。

习题3　与复数z相比较，下列复数的模与辐角有何改变？

$$3z,\ iz,\ -z,\ ze^{-i\frac{\pi}{2}},\ (1+i)z,\ \frac{z}{3+4i}。$$

习题4　在什么情况下$z^2=|z|^2$？

习题5　试问（参看图3）：

(1)复平面上以原点为中心的圆周在复数球面上相应的图形是什么？

(2)复平面上从原点发出的射线在复数球面上相应的图形是什么？

§2 复变函数

复变函数是实变函数的推广，实变函数是复变函数的特殊情形，它们的不少基本定义和定理在形式上是类似的，但在内容上又有实质性的区别。本节先阐述区域的概念；然后给出复变函数的定义，讨论复变函数的极限和连续性；最后介绍常用的几种复变数的初等函数。

一、区 域

我们知道，$|z-z_0|$代表z、z_0两点间的距离，于是$|z-z_0|=\delta$代表以z_0为圆心、δ为半径的圆周；而$|z-z_0|<\delta$代表此圆周内部的点的集合，称之为点z_0的一个δ邻域。

复平面上的一个点集D，如果满足以下两个条件，便叫做一个**区域**：（1）D中每一点都有一个完全属于D的邻域；（2）D中任意两点，都可以用一条由D内的点所构成的折线联接起来。

凡本身不属于区域D，而在它的任何邻域内都含有属于D的点的那种点，叫做区域D的界点。区域D的所有界点的集合，称为此区域的边界。区域D连同它的边界一起，叫做**闭区域**，记作$\bar{D}$。如果区域D可以被包围在一个以原点为中心的圆内，则称D是有界的；否则称为无界的。

两个实连续函数

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

组成的方程组代表一条平面连续曲线。若令

$$z(t)=x(t)+iy(t),$$

则此连续曲线可用一个方程

$$z=z(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

来代表，称之为平面连续曲线的复数表示式。若连续曲线$x=x(t)$，$y=y(t)$（$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$）上的点与参数$t$的值一一对应（$t$取$\alpha$、$\beta$时可除外），则称这样的连续曲线为简单曲线。若简

单曲线的起、终点重合，则叫做简单闭曲线。若凡属于区域D的简单闭曲线的内部仍然属于D，则称此区域为**单连通区域**（图4）。非单连通区域叫做**多连通区域**（图5）。

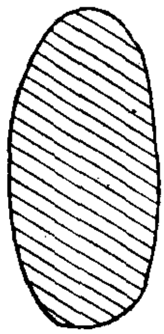

图 4　单连通区域

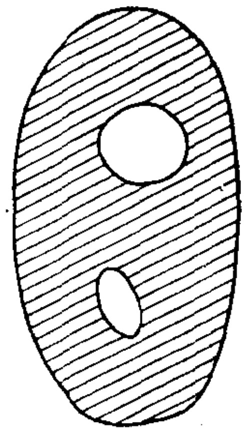

图 5　多连通区域

简单曲线如果具有连续变动的切线❶，则称为**光滑曲线**。由有限条光滑曲线所组成的简单曲线称为是**分段光滑**的。

今后，我们只考虑光滑或分段光滑的曲线以及由光滑或分段光滑的闭曲线所围成的区域。

二、复变函数

定义　设E为一复数集合，如果对于属于E的每一个复数z，按照某一规律，有一个或多个复数w与之对应，就称w**是**z**的函数**，记作

$$w=f(z)。$$

集合E叫做函数的定义集合，与E中所有z值对应的一切w值的集合F则称为值集合。如果对E内的每一个复数z，只有唯一的复数w与之对应，则称函数$f(z)$是单值的；若有多个复数w与之对应，则称函数$f(z)$是多值的。今后，如无特别声明，所论函数

❶ "具有连续变动的切线"这一条件可以解析地表示为：在区间$[\alpha,\beta]$上，$x'(t)$及$y'(t)$连续且

$$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq0。$$

均为单值的。此外，常用的复变函数的定义集合E和值集合F多为平面区域，称之为定义域和值域。

由于$z=x+iy$，$w=u+iv$，显然，给定一个复变函数$w=f(z)$就相当于给定了两个实变函数

$$u=u(x,y),v=v(x,y)。$$

例如，由$w=z^2$，得

$$u+iv=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i(2xy),$$

说明复变函数$w=z^2$与二个实变函数

$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy$$

等价。反之，若给定了两个实变函数$u=u(x,\ y)$及$v=v(x,y)$，则$w=u(x,\ y)+iv(x,y)$就构成了$z=x+iy$的一个复变函数。

如果把自变量z与因变量w的值分别用两个复平面（称之为z平面和w平面）上的点来表示，那么，一个复变函数在几何上可看作是一个映射，它将z平面上的一个点集（定义集合）映射成w平面上的一个点集（函数值集合）。如果函数值集合属于w平面上一个以原点为中心的圆域，则称该复变函数是有界的。

三、复变函数的极限和连续性

定义 设函数$f(z)$在z_0点的某邻域（z_0点可除外）有定义。若对于任给的正数ϵ，总存在一个正数δ，当$0<|z-z_0|<\delta$时，恒有

$$|f(z)-A|<\epsilon,$$

则称A是当z趋于z_0时$f(z)$的极限，记作

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A。$$

进一步，如果$f(z)$还在z_0点有定义且$A=f(z_0)$，即

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0),$$

就说$f(z)$在z_0点连续。如果$f(z)$在区域D内各点均连续，则称**$f(z)$在D内连续**。

记$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$z_0=x_0+iy_0$，$A=u_0+iv_0$，

可以证明：$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$的充要条件是

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0。$$

进一步还可以推知：$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$在点$z_0 = x_0 + iy_0$连续的充要条件是$u(x, y)$及$v(x, y)$均在点$(x_0, y_0)$连续。

由于复变函数的极限定义与实变函数的极限定义在形式上相同，所以关于实变函数的和、差、积、商等极限定理对复变函数也成立。又连续复变函数的和、差、积、商（分母不为零）及其复合函数仍然连续。再者，在有界闭域$\bar{D}$上连续❶的函数必有界，即存在正数M，对于所有属于$\bar{D}$的点z，都有$|f(z)| < M$；且$|f(z)|$在$\bar{D}$上可取到最大值和最小值；此外，$f(z)$还在$\bar{D}$上一致连续，即任给$\varepsilon > 0$，总存在$\delta > 0$，使得对于$\bar{D}$上满足$|z_1 - z_2| < \delta$的任意两点，恒有$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$。

四、初 等 函 数

1．幂函数 $w = z^n$ 及 $w = \sqrt[n]{z}$（n为正整数）

按（8）、（9）式，这两个函数已经对于一切复数z规定过了。前者为单值函数，后者当$z \neq 0$时是n值函数。

2．指数函数和对数函数

复指数函数定义为

$$w = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y)。\tag{10}$$

这样做，既把原来的实变指数函数作为一个特殊情形（当$y=0$时）包括在内，而且实变指数函数的一系列性质❷都保留下来了。同时，也使指数函数增添了一些新的性质，例如，复指数函数e^z是以$2\pi i$为周期的周期函数，这是因为

---

❶ 设z_0为区域D的界点。如果任给正数ε，总可以找到正数δ，当$|z - z_0| < \delta$且$z \in \bar{D}$时，恒有$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$，则称$f(z)$在界点$z_0$连续。

❷ 根据(10)式，读者不难直接验证：$\mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1 + z_2}$仍然成立；对于复平面上的一切点，$\mathrm{e}^z$均不为零；等等。