应用图形分析法解数学题

耿秉辉　著

YING YONG TU XING FEN XI FA JIE SHU XUE TI

·上海科技教育出版社·

应用图形分析法解数学题

耿秉辉　　编著

上海科技教育出版社

(沪)新登字 116 号

应用图形分析法解数学题

耿秉辉　编著

上海科技教育出版社出版发行
（上海冠生园路393号）
各地新华书店经销　江苏宜兴印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张 8　字数179000
1992年 3 月第 1 版　1992年 3 月第 1 次印刷
印数1—2400
ISBN7-5428-0608-4
G·609
定价：2.65元

前　言

把数量问题转化为图形问题，并通过对图形的分析、推理最终解决数量问题的方法，就是图形分析法。

图形分析法是近几年中学数学界普遍研究、探讨的一种重要的解题方法，已被列为包括高考在内的各类数学考试的内容之一。尽管至今尚未提出图形分析法这个概念，但人们正在研究和使用这种方法。

图形分析法所以成为一种重要的解题方法，是因为通过图形分析法的训练，不仅可以沟通数学各个分支、优化问题的解法、解答其他方法不易解决的问题，而且还可以培养空间想像能力中的创造想像能力。而这些正是传统数学教学所忽视的问题。因此，图形分析法正成为现代中学数学教学中的一个热门的研究课题。

《应用图形分析法解数学题》一书是作者对图形分析法的理论应用进行数年研究的结果。书中既采用了本人在有关刊物上公开发表的部分研究成果，也吸取了同行的一些研究成果，经再加工而写成的。

全书共分九章与两个附录。第一、第二章旨在阐述图形分析法的理论。第三至第八章旨在讨论图形分析法在解数量问题中的应用，第九章旨在说明图形分析法在解图形问题中的应用。附录一介绍了高考题中用图形分析法解答的部分问题实例。附录二是练习题的解答参考。

《应用图形分析法解数学题》一书既有理论的阐述，又有

具体应用的指导。所以本书既可作为中学生高考复习时的课外读物，也可作为中学数学教师研究图形分析法时的参考资料。此外，还可作为师范院校数学专业学生的课外读物。

感谢在编写本书时曾给予我帮助的各位同行和上海科教出版社的编辑同志的帮助和指导。并敬请中学数学界的同行、专家及读者不吝指正。

耿秉辉

1991年秋于上海甘泉中学

目　　录

第一章　图形分析法

图形分析法是中学数学中的一种重要的解题方法，历年高考都将这种解题方法列为考试内容。那么，什么叫图形分析法呢？为了阐明这个问题，需分别讨论以下几点。

第一节　转化观点在解题中的应用

唯物辩证法认为，世界上一切对立的东西，都可以在一定条件下互相转化。

对立面的双方在一定条件下互相转化的观点，在中学数学中的反映是极为普遍的．中学数学中的整数与分数，整式方程与分式方程就是既互相对立，又可以在一定的条件下实现互相转化的两个不同的概念．在以“1”作分母的条件下，整数3就可以转化为分数$\frac{3}{1}$；在应用去分母变形的条件下，分式方程就可以转化为整式方程．

数学中的这种从一种形态转化为另一种相反的形态，正如恩格斯所说：“并不是一种无聊的游戏，它是数学科学最有力的杠杆之一”．解分式方程所以有可能得以实现，就是因为分式方程在一定条件下可以转化为整式方程．因此，我们应自觉地将对立面的双方在一定的条件下可以互相转化的观点应用于解题．为使读者对这一点有所了解，现举几个例子．

【例1】试证对数换底公式$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$　(a、b、$c\in R^+$，$a\neq 1$，$c\neq 1$)．

分析　对数形式与指数形式是两个互相对立的形式，欲证例 1 可先创造条件，将对数形式转化为指数形式。然后再创造条件，将指数形式转化为对数形式。

证　设 $\log_a b = x$，以创造条件将对数形式转化为指数形式 $a^x = b$。

两边取对数，以再创造条件将上述指数形式转化为对数形式 $\log_c a^x = \log_c b$.

因此，$x\log_c a = \log_c b$。

$$\because \log_c a \neq 0,$$

$$\therefore x = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

【例 2】　已知 $\arcsin(\sin\alpha + \sin\beta) + \arcsin(\sin\alpha - \sin\beta) = \frac{\pi}{2}$，试求 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta$ 的值。

分析　三角函数式与反三角函数式是两个互相对立的函数式，解例 2 可先创造条件将反三角函数式转为三角函数式。

略解　已知条件即

$$\arcsin(\sin\alpha + \sin\beta) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin\alpha - \sin\beta).$$

两边取正弦以创造条件，将反三角函数式转化为三角函数式

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sqrt{1 - (\sin\alpha - \sin\beta)^2}.$$

有理式与无理式也是两个对立的形式，我们可通过两边平方，以创造条件将上述无理式转化为有理式

$$(\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 1 - (\sin\alpha - \sin\beta)^2.$$

因此，$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \frac{1}{2}$。

【例 3】 如图1.1所示，在三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中，已知 $AB=BC=AC=2$，$SA=SB=SC=3$，且其截面 AEF 与 SB、SC 分别相交于 F、E，试求截面 AEF 的周长的最小值。

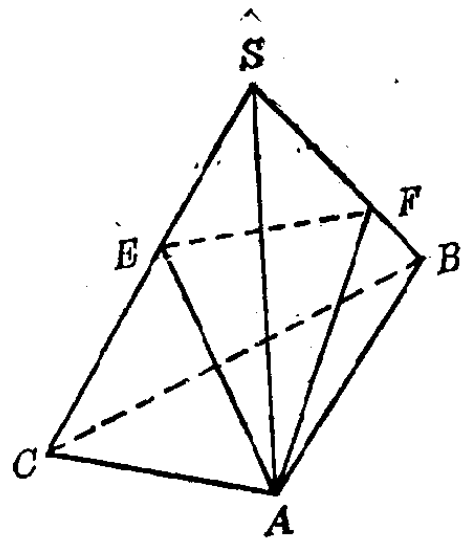

图 1.1

分析 立体图形与平面图形是两种对立的图形。可创造条件将立体图形转化为平面图形。

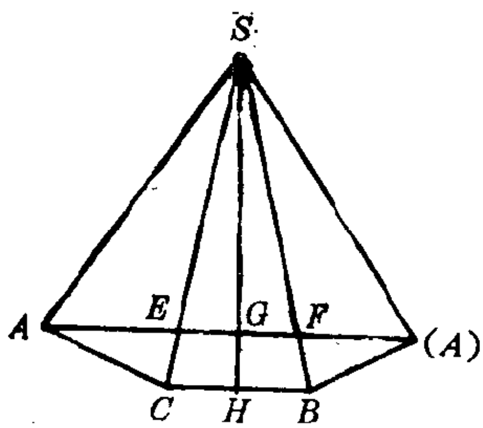

图 1.2

展开图1.1，将原立体图形转化为平面图形，如图1.2所示。

根据平面图形可知，当 A、E、F、(A) 共线时，截面 AEF 的周长即取最小值，且其最小值为 $A(A)$。

略解 作 $SH\perp BC$ 于 H，交 $A(A)$ 于 G。

设 $\angle BSH=\theta$，则 $\angle ASG=3\theta$。

$$\because \sin\theta=\frac{BH}{SB}=\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin3\theta &= 3\sin\theta-4\sin^3\theta\\ &= 3\times\frac{1}{3}-4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\\ &= \frac{23}{27}.\end{aligned}$$

$\therefore AG = SA\sin 3\theta = \frac{23}{9}$，$A(A) = \frac{46}{9}$.

因此，截面 AEF 的周长的最小值为 $\frac{46}{9}$.

综观中学数学，可知其研究对象不外是一些常见的数量关系与简单的图形。数与形不仅是两个相互对立的概念，而且是数学中较其他对立更为引人注目的一种对立。然而，数与形与其他一切对立面的双方一样，也可以在一定条件下实现相互转化。数量问题可以转化为图形问题，图形问题也可以转化为数量问题。

【例4】 已知数 z 满足 $z\cdot\overline{z}=4$，试求 $|z+1+\sqrt{3}i|$ 的最大值与最小值。

这是一个数量问题。如何创造条件将这个数量问题转化为图形问题呢？

分析 为了将这个数量问题转化为图形问题，就必须将它图形化。将数量问题图形化是数量问题转化为图形问题的条件。

$\because$ 由已知条件 $z\cdot\overline{z}=4$，可得 $|z|^2=4$，$|z|=2$，

$\therefore$ 方程 $z\cdot\overline{z}=4$ 的曲线是以原点 O 为圆心，2 为半径的圆。

$\because$ $|z+1+\sqrt{3}i|$

$=|z-(-1-\sqrt{3}i)|$，

$\therefore$ $|z+1+\sqrt{3}i|$ 表示 $\odot O$ 上的点到点 $A(-1, -\sqrt{3})$ 的距离。

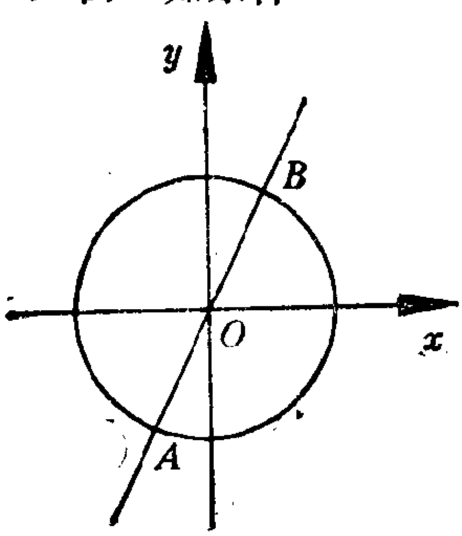

图 1.3

这样，求 $|z+1+\sqrt{3}i|$

的最大值与最小值，即求⊙O上的点到点A的距离d的最大值与最小值。显然，只有将$z\cdot\overline{z}=4$及$|z+1+\sqrt{3}i|$图形化，将原数量问题转化为图形问题的目标才能得以实现。

略解 ∵ $|-1-\sqrt{3}i|=2$，

∴ A在⊙O上。

作直线OA，并设OA与⊙O交于B，则⊙O上的点A到点A的距离最小，⊙O上的点B到点A的距离最大，如图1.3所示。

∵ $|AB|=4$，

∴ $|z+1+\sqrt{3}i|$的最大值为4，最小值为0。

【例5】 已知正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的棱长为a，试求异面直线AD_1与DB的距离。

这是一个图形问题。如何创造条件将它转化为数量问题呢？

分析　为了将原图形问题转化为数量问题，就必须对原图形问题进行量化。对图形问题进行量化，是将图形问题转化为数量问题的条件。

在AD_1上取一点M，并作$MN\perp AD$于N，则由平面$A_1D\perp$平面AC，可知$MN\perp$平面AC。

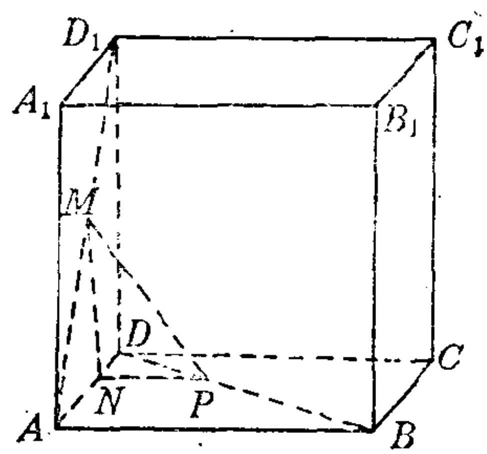

图 1.4

再作$NP\perp DB$于P，并连MP，则求异面直线AD_1与DB的距离，即求MP的最小值，如图1.4所示。

∵ $MP^2=MN^2+NP^2$，

∴ MN与NP是影响MP取值的两个因素。

但由上述作图过程，可知 NP 的取值又取决于MN的取值。所以MN 是影响 MP 取值的唯一独立的因素。因此，可以设$MN=x$，$MP=y$，并确定以x为自变量，y为因变量的函数$y=f(x)$。这样，求异面直线 AD_1 与 BD 的距离，就是求函数 $y=f(x)$ 的最小值。显然，只有对MN及MP进行量化，原图形问题转化为数量问题的目标才能得以实现。

略解 $\because$ 在$Rt\triangle ANM$中，$\angle MAN=45°$，

$\therefore$ $AN=x$，$ND=a-x$。

$\because$ 在$Rt\triangle DPN$中，$\angle DNP=45°$，

$\therefore$ $NP=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-x)$。

$\because$ 在$Rt\triangle MNP$中，

$$y^2=MP^2=MN^2+NP^2=x^2+\frac{1}{2}(a-x)^2=\frac{3}{2}x^2-ax+\frac{1}{2}a^2,$$

$\therefore$ 当$x=-\dfrac{-a}{2\times\frac{3}{2}}=\dfrac{a}{3}$时，$y^2$有最小值

$\frac{3}{2}\times\frac{a^2}{9}-\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{2}=\frac{1}{3}a^2$，$y$有最小值$\frac{\sqrt{3}}{3}a$。

因此，异面直线 AD_1 与BD的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$。

因为数量问题转化为图形问题的条件是将数量问题图形化，图形问题转化为数量问题的条件是对图形问题进行量化，所以研究对数量问题的图形化与对图形问题进行量化，对提高解题能力、加深对图形分析法的理解都是相当必要的，有关这方面的内容，本书将在以下各章节作较详细的讨论，这里就不再展开了。

练 习 一

1．先将下列图形问题转化为数量问题，再进行解答．

（1）如图1.5所示，已知BD、CE为$\triangle ABC$的内角平分线，$AM\perp CE$于M，$AN\perp BD$于N，试证：$MN\parallel BC$．

（2）如图1.6 所示，已知边长为2的正$\triangle SAB$是一圆锥的轴截面，BC是底面圆的一条弦，且$\angle ABC=60°$，试求异面直线SA与BC的距离．

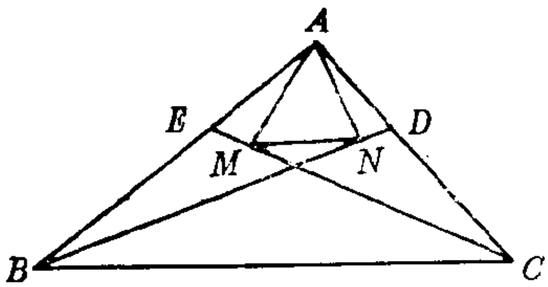

图 1.5

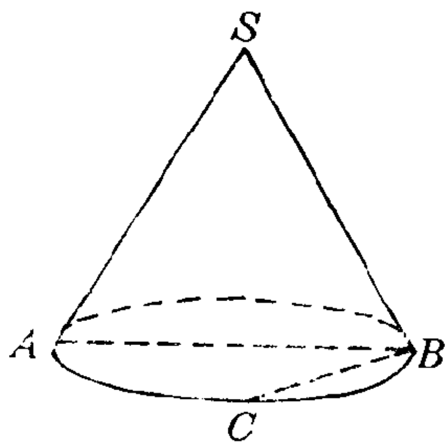

图 1.6

2．先将下列数量问题图形化，再进行解答．

（1）已知复数z满足$|z|=1$，试求$|z-2-2i|$的最大值与最小值．

（2）解不等式$\frac{1}{x^2}>x$．

第二节　图形问题转化为数量问题的主要途径

图形问题转化为数量问题的主要途径有以下三种：

1．应用代数知识将图形问题转化为数量问题；

2．应用三角知识将图形问题转化为数量问题；

3．应用解析几何知识将图形问题转化为数量问题．

一、用代数知识将图形问题转化为数量问题.

【例1】 如图1.7所示，$\odot O$是正三角形ABC的外接圆，P是$\overset{\frown}{BC}$上的任意点，求证：

（1）$PA=PB+PC$；

（2）$PB\cdot PC=PA^2-AB^2$.

分析　由韦达定理可知，证$PB+PC=PA$，$PB\cdot PC=PA^2-AB^2$，即证PB、PC为二次方程$x^2-PA\cdot x+PA^2-AB^2=0$的两个根，亦即证$PB^2-PA\cdot PB+PA^2-AB^2=0$，$PC^2-PA\cdot PC+PA^2-AB^2=0$. 从而将原图形问题转化为方程问题.

略解　$\because$ 在$\triangle APB$中　$\angle APB=\angle ACB=60°$，

$\therefore$ $AB^2=PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cos 60°$，

$\therefore$ $PB^2-PA\cdot PB+PA^2-AB^2=0$.　　　（1）

$\because$ 在$\triangle APC$中$\angle APC=\angle ABC=60°$，

$\therefore$ $AC^2=PA^2+PC^2-2PA\cdot PC\cdot\cos 60°$，

$\therefore$ $PC^2-PA\cdot PC+PA^2-AB^2=0$.　　　（2）

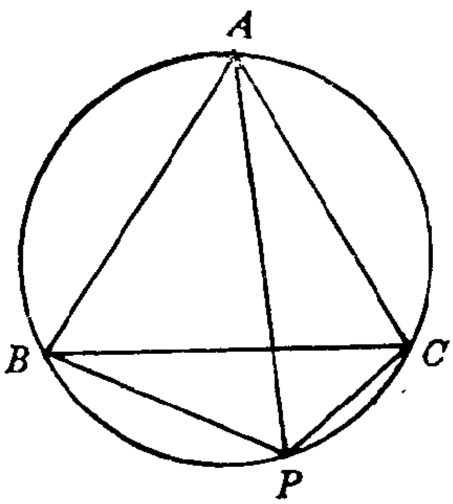

图 1.7

$\because$ 由(1)、(2)可知，PB、PC是方程$x^2-PA\cdot x+PA^2-AB^2=0$的两个根.

$\therefore$ $PB+PC=PA$，$PB\cdot PC=PA^2-AB^2$.

这就是应用代数知识将涉及几何量的相互关系的图形问题，转化为数量问题. 对于涉及位置关系的图形问题，要将其转化为数量问题，一般需先将涉及位置关系的图形问题变为涉及几何量的相互关系的图形问题，再将涉及几何量的相

互关系的图形问题转化为数量问题。

【例 2】 如图1.8所示，已知射线PA、PB、PC不在同一平面内，且$PA=PB=PC$，$\angle BPC=90°$，$\angle APB=\angle APC=60°$，求证平面$ABC\perp$平面$PBC$。

分析 这是一个涉及位置关系的图形问题，应先将它变为涉及几何量的相互关系的图形问题。

作$\triangle PBC$的中线PD，则由$PB=PC$，可知$PD\perp BC$。

连AD，则证平面$ABC\perp$平面PBC，即证$PD\perp$平面ABC，即证$PD\perp AD$。

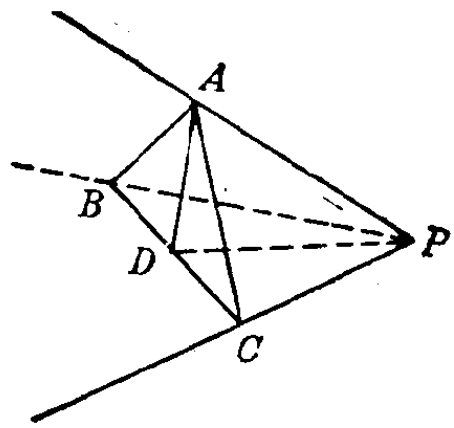

图 1.8

因此，证平面$ABC\perp$平面PBC，即证$PA^2=AD^2+PD^2$。从而将涉及位置关系的图形问题变为涉及几何量的相互关系的图形问题。

如果给定PA的长度，即可相继确定$\triangle ABC$的位置及AD、PD的长度。可先设参变量$PA=a$，再以a分别表示PD与AD，并得$PD=f(a)$，$AD=g(a)$，则证$PD\perp AD$即证$[f(a)]^2+[g(a)]^2=a^2$，从而将涉及位置关系的图形问题转化证等式成立的问题。

略证 $\because$ $PC=PB$，$\angle BPC=90°$，

$\therefore$ $\angle DCP=45°$，$PD=DC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$。

$\because$ $\triangle BPA$与$\triangle CPA$都是正三角形，

$\therefore$ $AB=AC=a$，$AD\perp BC$，

$$AD=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$\because\ PD^2+AD^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$$

$$=a^2=PA^2,$$

$\therefore\ PD\perp AD$.

$\because\ PD\perp AD$, $PD\perp BC$,

$\therefore\ PD\perp$平面ABC，平面$ABC\perp$平面PBC。

由以上几例可知，在将图形问题转化为数量问题的过程中，应将确立参变量作为分析的一个重要内容.

此外，在设参变量时应注意以下几点：

1. 所设的参变量应互相独立；

2. 要有利于将图形问题转化为数量问题；

3. 要有利于简化所得数量问题的解答.

有关参变量的确定问题，本书还将在后面的内容中结合例题作较详尽的阐述.

二、用三角知识将图形问题转化为数量问题

【例3】 设在$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，在三条边上分别向形外作正方形，设它们的中心分别为M、N、P，其中P是斜边上的正方形的中心，如图1.9所示，试证：$MN=CP$.

分析 因为影响MN与PC的因素是M、N、P，影响M、N、P的因素是$Rt\triangle ABC$，影响$Rt\triangle ABC$的因素是AB与$\angle ABC$，所以影响MN与PC的因素是AB与$\angle ABC$. 因此，可先设参变量$AB=c$. $\angle ABC=\alpha$，再以c与α分别表示MN与PC，并得$MN=f(c,\alpha)$，$CP=g(c,\alpha)$.