结构工程与应用力学数据手册

第二卷　框　　架

(美) Teng H. Hsu 著
黄达民　黄　坚　译
郝锐坤　审校

中国建筑科学研究院教育情报部

结构工程与应用力学数据手册

第二卷　框　　架

(美) Teng H. Hsu 著
黄达民　黄　坚　译
郝锐坤　审校

中国建筑科学研究院教育情报部

译 者 的 话

《结构工程与应用力学数据手册》共四卷，第一卷：梁，第二卷：框架，第三卷：平板，第四卷：薄壳，由（美）Teng H. Hsu著。第一卷梁是根据1988年初版译出。由于水平有限，不妥之处在所难免，望读者批评指正。

译者

1991年1月

手 册 简 介

这套手册共四卷。手册中的数据能尽可能地使工程师们很快地处理复杂和厌烦的问题而不用计算机。

这套手册包括主要结构构件：梁、框架、平板和薄壳。每一卷的内容包括：1）基础理论概述；2）弯矩、剪力、反力和挠度的计算公式；3）为这些计算提供了大量的数据。

第一卷介绍梁。它叙述了梁的基本理论，不同跨度和不同荷载作用下的梁的反力、剪力、弯矩、斜率和挠度的计算实用数据。梁是所有结构中最普通的结构构件。梁或大梁的设计不仅要计算剪力和弯矩，而且要检验挠度。第一卷：梁提供了这些计算所需的数据。

第2卷是平面框架。在这一卷中,首先介绍了框架的理论。它提供了各种框架的弯矩、剪力和反力计算的大量数据。

第3卷是介绍平板。首先介绍了基本弹性理论。随后提供了各种板的设计图例。每一个图例都介绍了挠度、弯矩和剪力公式，以及各种泊松比的大量数据。这本手册给工程师们在进行板的设计中提供了解决复杂问题的公式和数据。

第4卷是薄壳。首先介绍了薄壳的基本理论，接着为各种薄壳的弯矩、剪力和挠度的计算提供了大量的数据。

目　　次

一、框架的原理〔1，2〕

1.导言

框架由纵横杆件组成。框架的节点是杆件的交汇点。节点作为一个单元体由框架杆件保持在相对角度的位置上组合而成。平面框架由位于一个平面的杆件构成并在平面内有对称轴。平面框架的力作用在结构的同一平面上。所有作用在框架上的力偶其力矩矢量垂直于平面。

如果总的反力超过静力平衡条件，这一框架为超静定的。多余的反力和力矩叫超静定反力和力矩，其数值决定了结构的超静定度。这种结构的分析应由变形条件补充，其数值应等于超静定数值。

如果框架处在静力平衡状态下，每一杆件和节点应处在同样的状态。设m和j是杆件数和节点数，那么，静力平衡依赖条件的总数：

$$e=3m+3j+\text{特殊条件} \qquad (1)$$

方程式（1）中的特殊条件是由内部条件，像中间铰，水平支撑等组成。因此，每根杆件端部有6个未知力和2个未知支座反力，超静定数是：

$$n=6m+r-e=3m+r-3j-g$$

式中g是特殊条件数。设n＝0，框架是静定结构；设n＜0，框架是几何不稳定结构。应该指出，节点数j包括内节点和所有支承点。

2.虚功

单元功是作用力矢量及位移矢量的数量积。它表示如下：

$$dU = P \cdot d\Delta$$

$$dU = Q \cdot d\theta$$

式中P和Q是力和力矩矢量，dΔ和dQ分别是线和角位移的矢量。在可变平面体系中，实际位移和变形与体系的外部约束是相协调的。如果体系的每一个虚设力、力矩和应力满足平衡条件，则全部外部虚功等于全部内部虚功。用下面方程表示：

$$\Sigma\ (P'\delta) + \Sigma\ (Q'\theta) + \Sigma\ (R'_r\delta_r) + \Sigma\ (M'_r\theta_r) = \int(\gamma'e + \tau'r)dxdydz \qquad (2)$$

式中P',Q',R'_r和M'_r是虚荷载和反力，γ'和τ'是虚应力。对于支承在刚性基础的结构,同时承受一般荷载的体系,如果忽略轴向和切向变形，则虚功原理导出为单位虚拟荷载法。

如果$P' = 1$和方程式2中的所有虚拟荷载等于零，我们就可以得到：

$$\delta = \Sigma \int \frac{\overline{M}M}{EI} ds$$

同样，设$Q' = 1$和方程2中的所有虚拟荷载等于零，我们可以得到：

$$\theta = \Sigma \int \frac{\overline{M}M}{EI} ds$$

式中$\overline{M}$是由于$P' = 1$或和$Q' = 1$产生的虚弯矩，M是实际弯矩。

3.互等定理

对于在节点i和j受到两个单位荷载作用的弹性结构，作用在节点j的y方向的荷载引起i节点上的x方向位移等于作用在节点i上x方向荷载引起节点j的y方向的位移，这就是Maxwell的互等定理，表示如下：

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

$$\theta_{ij} = \theta_{ji}$$

Maxwell互等定理是由Bett互等定理发展来的。Bett定理是一个弹性结构承受二个荷载体系构成独立的静定平衡，第1体系外力使在第2体系状态位移点作的全部功等于第2体系外力在第1体系状态位移点上作的全部功。

4.应变能

当一个结构受外部荷载作用时，它就产生变形。如果是渐加荷载，由外和内应力作的全部功等于内部能量的变化。它表示为：

$$U = \int F_i d\Delta_i$$

式中U是应变能，F_i和Δ_i是荷载和伴生位移。U对Δ_i的偏导数得出能量法的基本公式。它表示为

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = F_i$$

Castigliano定理表明，如果荷载体系作用于线性弹性结构上而把应变能U表示为荷载作用方向的荷载作用点的位移函数。U对这些位移中的一个位移Δ_i的偏导数等于相应的荷载F_i。对于受一般荷载体系作用和支承在刚性基础上的平面框架，如果轴向和剪切变形忽略不计，我们就可以得到：

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \Sigma \int M \frac{\partial M}{\partial P_i} \frac{ds}{EI}$$

$$\sigma_i = \frac{\partial U}{\partial Q_i} = \Sigma \int M \frac{\partial M}{\partial Q_i} \frac{ds}{EI}$$

5.最小功法

为了满足静力和变形的需要，把特定的结构分为二个体系。基本体系是由去掉超静定部分得到的；辅助体系即去掉使用荷载而保持超静定部分，当参考荷载P_i和Q_i为超静定反力作为辅助体系

中的外部荷载时，对刚性支承来说，超静定反力的位移将等于零。最小功定理说明在辅助体系中所有容许值和超静定力的位置可以假定，使能满足超静定位移，使产生最小的应变能而这同时是唯一准确值。

6.柔度法

当结构分解为基本和辅助体系时，它们就能满足静力平衡条件和几何稳定条件。二个体系叠加也能满足协调条件，其含义是被释放截面的变形代数总和必须等于0或等于规定的位移，如果n是超静定数，D是规定的体系位移矢量，D_0是基本体系的变形矢量，D_x是辅助体系的变形矢量，那么

$$D = D_0 + D_x \qquad (3)$$

方程式（3）可表示相应的柔度矩阵和它们的矢量的矩阵乘积。如果F是超静定作用的柔度矩阵，X是超静定矢量矩阵，L是荷载效应柔度矩阵，W是荷载矢量矩阵，那么

$$D = LW + FX \qquad (4)$$

超静定的矢量X可以由方程式（4）求得。

$$X = F^{-1}(D - LW) \qquad (5)$$

方程式（5）中的F^{-1}代表柔度矩阵的逆矩阵。矩阵D，除了一个或一个以上的超静定力为有位移的支座反力外，通常是零矩阵。当矩阵D为零时，方程式（5）成为

$$X = -F^{-1}(LW)$$

7.刚度法

刚度法引入位移作为未知数。在这逆解法中，基本体系的获得是锁紧每一杆件的末端，防止其产生位移。因而基本体系是高次超静定。辅助体系由移去外部荷载和对满足这一体系自然约束条件的每一杆件引入超静定端部变形而获得。基本体系和辅助体系必须满足协调条件，并是几何稳定体系。两体系的叠加也必须满足静力平衡条件。若A_{DD}代表辅助体系的作用力矢量，A_{DL}为基

本体系的作用力矢量，而A_D为原有体系的作用力矢量，那么

$$A_D = A_{DL} + A_{DD} \qquad (6)$$

方程6可表示为刚度矩阵与作用力矢量的矩阵乘积。若K为超静定作用的刚度矩阵和D为超静定力矢量矩阵，那么

$$A_D = AD + A_{DL}$$

$$D = K^{-1}(A_D - A_{DL}) \qquad (7)$$

方程（7）表示在矩阵形式的位移解。A_D，A_{DL}和K，或者为已知，或者是从约束结构中求得。

在柔度法中，静定的被释放结构是由改变真实结构使其所选择的超静定力为零而获得。在刚度法中，可动的静定结构由改变真实结构,使其所有未知位移为零而获得。由于未知位移是节点的转动和平移，它们可用约束结构在节点的各种位移使其为零，而这样的结构称为被约束结构。

二、平面框架的公式和数据〔2,3〕

1.导言

在这本书中选择了十八种框架形式。每种框架给出6～13种荷载条件的数据和公式，制作了171个基本图例。以图例12-3为例，12表示框架形式，3表示荷载条件。对于所有的框架形式，作用在杆件上的一般荷载都能概括，而每一荷载条件用二个草图来说明。左图表示框架和荷载，右图表示弯矩图和反力。对于每一种荷载条件，公式和数据提供了必要的垂直和水平反力以及节点上的弯矩。图中的轴向力计算和剪力计算是很复杂的。同时给出有关这些力的公式和数据。采用叠加和互等原理，这些图例可以扩展达千种情况，并能够应用于实际设计中。

2.予备数据时的假定

本书中的所有公式和数据以下列假定为基础：支座不产生屈服，没有转动和位移的固定支座，不产生位移的铰支座和不产生垂直下沉的滚动支座。

对于框架结构，轴向力和剪力的影响通常是很小的。本书的数据和公式，仅考虑了弯曲力矩的影响。实际试验表明，除非特殊情况，轴向力可以忽略不计。假定在所有情况下，任何杆件的惯性矩保持为常数，对所有刚性连接杆件的弹性模量E是一样的。

3.正负号的惯用法

下列惯用法将在计算中使用。

荷　载：每一个左边的框架图表示的外力方向假定为正。如果在相反方向荷载起作用，代入公式中使用将是负数。

反　力：每一个右边的框架图所表示的反力的方向，均假设为正。垂直反力向上的为正值，而水平反力是朝结构作用的为正值。

弯　矩：如果一个杆件的内表面产生拉力，弯矩就是正值。这里的正负号习惯用法和实际的转动方向无关。弯矩图画在杆件受拉侧边。对于长度和惯性矩相同的构件，弯矩图是近似准确的。因此，弯矩图表明仅可在一般的情况下应用。对于特殊尺寸或惯性矩变化的复杂框架，实际的弯矩图比给出的弯矩图会很不相同。

剪　力：如果杆件的右端剪切的指向向下，左端向上，剪力为正。剪力的正负与力矩的正负无关。

轴向力：若为压力，则轴向力为正值。

4.计算实例

例1.图1所示空腹框架承受1.0k/ft的均布荷载和承受10.0k（千磅）的集中荷载，求大梁节点和跨中承受的弯矩及支座反力。

可用叠加原理解题。应用从图例15-1和15-13的公式和数据，并进行叠加可得到最终结果。

从图例15-1中查得：

$k_2 = 100/10 = 10.00$

$k_3 = 300/20 = 15.00$

$\alpha = I_3/I_1 = 300/150 = 2.00$

$k = k_3/k_2 = 15/10 = 1.5$

$K_A = 0.72$，$K_B = 4.35$，$K_P = 8.15$，$K_3 = 5.07$

译者注：k（kip）—千磅，ft—英尺，in—英寸；1英寸＝25.4mm，1英尺＝0.3048m，1ft²（1平方英尺）＝0.09293m²

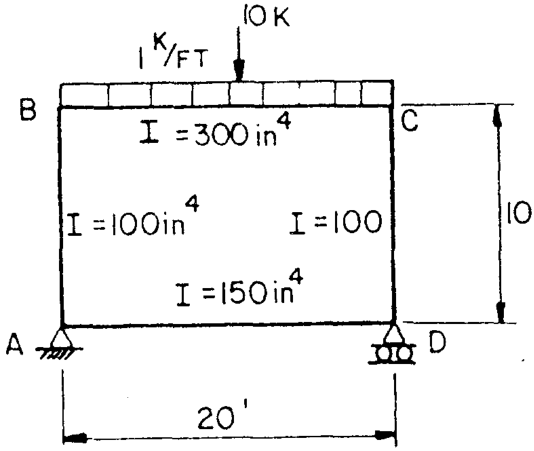

图 1　空腹框架

$M_A = M_D = wl^2/100 \times (k_A) = 1 \times 400 \times 0.72/100 = 2.88$

$= 2.88$ 千磅-英尺

$M_B = M_C = -wl^2/100 \times (k_B) = -1 \times 400 \times 4.35/100 = -17.40$

$M_P = wl^2/100 \times (k_P) = 1 \times 400 \times 8.15/100 = 32.60$ 千磅-英尺

$N_3 = -N_1 = wl^2/h \times k_3/100 = 1 \times 400 \times 5.07/(100 \times 10)$

$= 2.03$ 千磅

$V_A = V_D = 1 \times 20/2 = 10.00$ 千磅

从图例15-13，用插入法（内插法）得：

$K_A = (1.32 + 0.93)/2 = 1.125$

$K_B = (6.58 + 6.48)/2 = 6.530$

$K_3 = (7.89 + 7.41)/2 = 7.650$

$M_A = M_D = Pl/100 \times (K_A) = 10 \times 20 \times 1.125/100$

$= 2.25$ 千磅-英尺

$M_B = M_C = -Pl/100 \times (K_B) = -10 \times 20 \times 6.53/100$

$= -13.06$ 千磅-英尺

$M_P = 10 \times 20/4 - 13.06 = 36.94$ 千磅-英尺

$N_3 = -N_1 \doteq Pl/h \times K_3/100 = 10 \times 20 \times 7.65$ （100×10）

$= 1.53$千磅

$V_A = V_D = 10/2 = 5.00$千磅

用叠加法得：

$\Sigma M_A = \Sigma M_D = 2.88 + 2.25 = 5.13$千磅-英尺

$\Sigma M_B = \Sigma M_C = -17.40 - 13.06 = -30.46$千磅-英尺

$\Sigma M_P = 32.6 + 36.94 = 69.54$千磅-英尺

$\Sigma N_3 = -\Sigma N_1 = 2.03 + 1.53 = 3.56$千磅

$\Sigma V_A = \Sigma V_D = 10 + 5 = 15.00$千磅

用刚度法计算分析，我们可得到下列数值：

$M_A = M_D = 5.01$千磅-英尺

$M_B = M_C = -30.35$千磅-英尺

$M_P = 69.63$千磅-英尺

$N_3 = -N_1 = 3.54$千磅

$V_A = V_D = 15.0$千磅

例2.图 2 为不等高柱的框架，荷载为水平和垂直均布荷载，计算所有节点弯矩和支座反力。

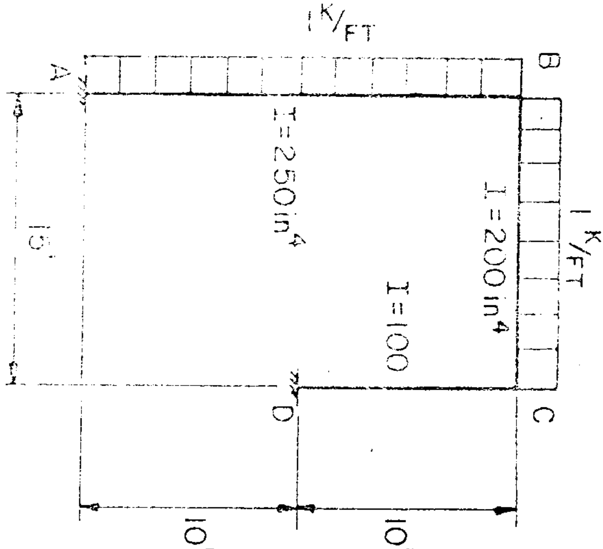

图 2 不等高柱的框架

$k_b = 200/15 = 13.33$

$k_l = 250/20 = 12.50$

$kr = 100 \times 10 = 10.0$

$\alpha = k_b/k_r = 12.5/10.0 = 1.25$

$k = k_b/k_l = 13.33/12.5 = 1.07$

$n = h_2/h_1 = 10/20 = 0.50$

从图例 5 -1中用插入法得:

$K_A = 3.80, K_B = 6.453, K_C = 4.081, K_D = 1.048, G_A = 5.237,$

$J_A = 1.026$

$M_A = wl^2/100 \times K_A = 1 \times 15^2 \times 3.8/100 = 8.55$千磅-英尺

$M_B = -wl^2 \times K_B = -1 \times 15^2 \times 6.453/100 = -14.52$千磅-英尺

$M_C = -wl^2/100 \times K_C = -1 \times 15^2 \times 4.081/100 = -9.18$千磅-英尺

$M_D = wl^2/100 \times K_D = 1 \times 15^2 \times 1.048/10 = 2.36$千磅-英尺

$V_A = wl/10 \times G_A = 1 \times 15 \times 5.237/10 = 7.86$千磅

$H_A = wl \times J_A = 1 \times 15 \times 1.026/10 = 1.54$千磅

从图例5-4中，用插入法得:

$K_A = 17.167,\ K_B = 1.446,\ K_C = 6.171,\ K_D = 9.522,$

$J_A = 6.862,\ G_A = 0.763$

$M_A = -wh_1{}^2/100 \times K_A = -1 \times 400 \times 17.167/100$

$= -68.67$千磅-英尺

$M_B = wh_1{}^2/100 \cdot \times K_B = 1 \times 400 \times 1.446/100$

$= 5.78$千磅-英尺

$M_C = -wh_1{}^2/100 \times K_C = -1 \times 400 \times 6.171/100$

$= -24.68$千磅-英尺

$M_D = wh_1{}^2/100 \times K_D = 1 \times 400 \times 9.522/100$

$= 38.09$千磅-英尺

$H_A = -wh_1/10 \times J_A = -1 \times 20 \times 6.862/10 = -13.72$千磅

$V_A = -wh_1/l \times G_A/10 = -1 \times 400 \times 0.763(10 \times 15)$

$= -2.03$千磅

用叠加法得:

$\Sigma M_A = 8.55 - 68.67 = -66.12$千磅-英尺

$\Sigma M_B = -14.52 + 5.78 = -8.74$千磅-英尺

$\Sigma M_C = -9.18 - 24.68 = -33.86$千磅-英尺

$\Sigma M_D = 2.36 + 38.09 = 40.45$千磅-英尺

$\Sigma H_A = 1.54 - 13.72 = -12.18$千磅

$\Sigma V_A = 7.86 - 2.03 = 5.83$千磅

用刚度法计算分析得：

$M_A = -60.29$千磅-英尺

$M_B = -8.30$千磅-英尺

$M_C = -34.31$千磅-英尺

$M_D = 39.70$千磅-英尺

$H_A = -12.60$千磅

$V_A = 5.77$千磅

例3.图 3 为承受水平均布荷载的人字形山墙框架。计算节点的弯矩和支座反力：

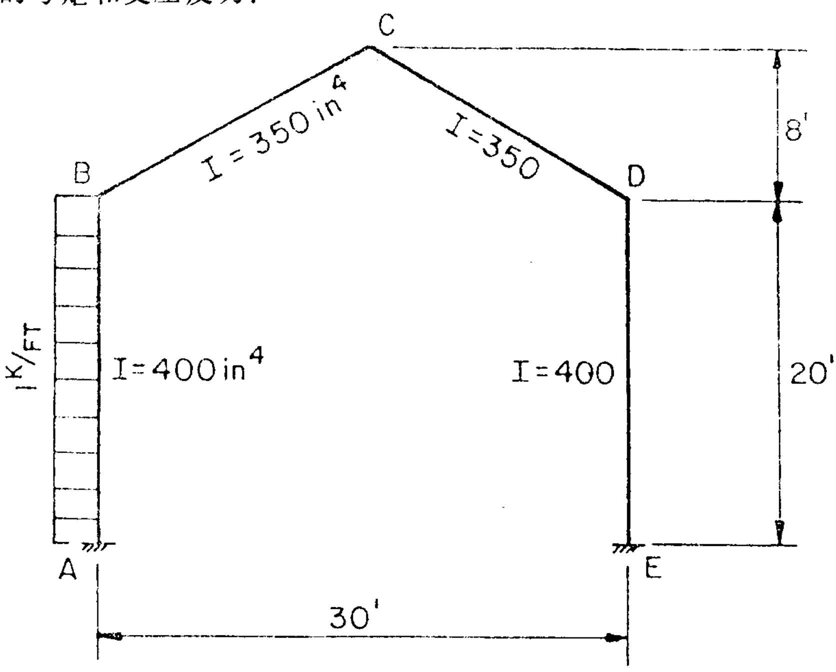

图 3　人字形山墙框架