现代物理学丛书

相互作用的规范理论

戴元本 著

科学出版社

1987

内 容 简 介

本书系统介绍弱电及强作用的规范理论，包含规范场论的基本概念、量子化与重整化、弱电统一理论、量子色动力学、大统一理论的主要物理内容及计算方法.

读者对象为粒子物理专业的研究生，亦可供理论物理工作者参考.

现代物理学丛书

相互作用的规范理论

戴 元 本 著

责任编辑 张邦固

科 学 出 版 社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987 年 9 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1987 年 9 月第一次印刷 印张：18 5/8

印数：精 1—1,000 插页：精 2 平 2

平 1—2,200 字数：493,000

统一书号：13031・3599

本社书号：5304・13—3

定价： 布脊精装 6.40 元

平 装 5.30 元

前　　言

非 Abel 规范场论是近二十余年中场论的主要发展方向，它已经在解释粒子物理现象上取得很大的成就，成为粒子物理学不可缺少的理论基础. 本书的目的是为粒子物理学的研究生提供规范场论的系统知识，并供研究工作者参考.

本书的内容包括规范场论的基本概念、形式体系和弱电及强相互作用规范理论的物理预言，力求兼顾基本原理、计算方法和物理应用. 阅读本书需要的预备知识包括非 Abel 规范场论发展以前的量子场论，大体相当于 Bjorken-Drell 或 Lurie 书的主要内容；此外还包括粒子物理和群论的基本知识. 为方便读者，在一些章节的开始处对所需要的物理和数学基础作了扼要的回顾. 对一些在规范场论发展以后才被广泛应用的场论工具，如路径积分、维数正规化等，都用专门的章节作了详细的叙述.

限于篇幅和时间，规范场论的有些方面本书未能包括，其中重要的有微分几何和纤维丛方法在规范理论中的应用、格点规范理论、引力理论和超引力理论等.

黄朝商、朱重远、张肇西和张元仲等同志看过本书的部分章节并提出了宝贵的意见，对他们的帮助作者非常感谢.

戴元本

1985 年 11 月

目　　录

第一章 规范场的基本概念和经典理论

1. 引言

在物理学的研究中基本物理规律所包含的对称性起着非常重要的作用. 对称性分为两大类: 一类是时空对称性，它们是与描述物理事件的时空坐标的变换(例如时空坐标的平移和 Lorentz 变换)相联系的;另一类对称性是内部对称性. 在场论中，它们是与不改变时空坐标的场的变换相联系的. 这种变换称为内部空间的变换. 物理学中的变换构成变换群. 物理规律的对称性归结为基本方程在这些变换群下的不变性. 按照 Noether 定理，相应于对称群的每个生成元有物理系统的一个守恒律.

在场论中可以对不同时空点的场作独立的变换，相应的群元素是时空坐标的函数,这种变换称为定域规范变换,常简称为规范变换.规范变换一词最早是 1921 年 Weyl 引入的. 当时他考虑的是各点时空度量的标度变换，企图把电磁场与理论在定域标度变换下的不变性联系起来，建立一个统一描述电磁场与引力场的理论. 但是这种企图并不成功. 在量子力学建立以后，Fock、Weyl 和 Pauli 等人发现带电粒子与电磁场作用的量子力学是一种规范不变的理论[1]，因为在这种理论中运动方程在带电粒子波函数的定域位相变换(同时使电磁势作相应的变换)下保持不变. 位相变换群是内部对称群,数学上它是一种 Abel 群，即可交换群.

1954 年杨振宁和 Mills 把规范不变的理论推广到内部对称的非 Abel 群,即不可交换群[2].虽然他们具体考虑的是同位旋 SU(2) 群，但是他们的工作阐明了规范不变理论的一般结构. 杨振宁和 Mills 的文章中包含了这样一种思想: 定域规范不变的原则应当在物质相互作用的理论中起基本作用. 这种理论的一个重要特点

是，规范不变的要求在相当大的程度上决定了相互作用的形式，因此它在理论上很有吸引力.

Utiyama[3] 及其后的工作阐明了 Einstein 的广义相对论也是一种规范理论，相应的规范变换是广义坐标变换和各时空点上的局部 Lorentz 标架的变换，因此是定域时空变换.

虽然杨振宁和 Mills 的文章发表后就引起很多人的兴趣并做了许多研究，但是当时规范场论有两个基本困难．第一个困难是理论与物理现象的联系．在规范不变的理论中必然存在一些矢量场，这些场称为规范场．正如电磁场是电磁作用的媒介，它们也是相互作用的媒介．在拉氏量中没有规范场的质量项，初看起来它们似乎都必须是零质量的．但是实验上除电磁场外并未发现其他零质量的矢量场，因此理论与实验似乎存在基本的冲突．第二个困难是规范场理论在量子化与重整化方面有一些特殊的问题．在杨振宁和 Mills 的文章发表十年以后理论上取得了几个重大的进展．1964 年发现了对称性自发破缺使规范场得到质量的 Higgs 机制．1967 年 Fadeev 和 Popov 用泛函积分方法首次得到正确的规范场量子化规则． 1971 年以后 't Hooft 等人证明了规范场理论是可重整的．这才使规范场的量子理论臻于完善.

另一方面，对实验结果的唯象分析表明弱作用具有两个流相互作用的结构，好象是由矢量场传递的．实验还显示出，非 Abel 对称性在弱相互作用中起作用． Glashow 在 1961 年提出了一个把弱作用和电磁作用联系在一起的 $SU(2) \times U(1)$ 规范场模型．为了得到一个包含上述性质并且可以重整的弱作用基本理论，1967 年和 1968 年 Weinberg 和 Salam 利用自发破缺的 Higgs 机制提出了完整的 $SU(2) \times U(1)$ 弱电统一规范理论． 这个理论非常成功地描述了低能的弱作用现象． 1983 年发现了这个理论预言的传递弱作用的 $W^{\pm}$ 和 Z^0 矢量粒子． 这些成就证明了规范场论的原则在弱作用现象中是起基本作用的.

七十年代初提出了关于强相互作用的量子色动力学．这个理论描述夸克和相应于“色”量子数的 $SU(3)$ 群规范场的相互作用，

是一种没有对称性自发破缺的规范场论. 没有破缺的非 Abel 规范场论有一个独特的性质,即相互作用在近距离处变弱,这个性质称为渐近自由. 它成功地解释了高能实验中发现的一系列现象,这些现象显示强子是由一些在近距离处作用很弱的点状夸克组成的. 为了解释在实验中没有观察到夸克及零质量的色规范粒子,提出了"色禁闭"的假设. 这个假设的含义是: 在没有自发破缺的非 Abel 规范场理论中,能在远距离处观察到的物理的粒子都不带规范群的量子数, 带这种量子数的粒子被规范作用禁闭在一定范围内形成此量子数为零的集团. 虽然量子色动力学对低能强作用现象的预言还不很清楚, 但有一些令人感到有希望的迹象. 因此人们认为, 量子色动力学有希望成为正确的强相互作用的基本理论.

上述六十年代以来的理论和实验的重要进展表明四种基本作用(电磁作用、引力作用、弱作用和强作用)可能都是规范作用. 在物理学的发展中, 这是人们第一次发现四种基本作用可能有共同的本质, 它们可能与同一物理原则相联系. 这一点有非常重要的意义. 这些成就引导人们去研究把弱电作用和强作用统一描述的理论, 即大统一理论. 人们还企图更进一步把引力作用也和其他三种基本作用统一起来描述. 但这些企图还没有得到实验的支持. 由于规范场理论的重要性,也由于这种理论有它特殊的问题,包含着一系列很有兴趣的现象(例如磁单极、瞬子、θ 真空、守恒流的反常等),二十多年来它成为场论研究的一个中心. 规范场论是粒子物理现有理论基础的重要组成部分.

2. 电磁作用的规范不变性

如前所述,最简单的规范理论是电磁作用的理论. 令 $\psi(x)$ 表示电子场, $A_\mu(x)$ 表示电磁矢量势, m 表示电子的质量, 则这两种相互作用的场的拉氏量密度由下式表示

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (1.1)$$

其中电子的电荷 $e<0$，而

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \tag{1.2}$$

是电磁场的场强．从(1.1)式中的拉氏量密度得到如下的拉氏运动方程

$$\gamma_\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)\psi(x)+m\psi(x)=0, \tag{1.3}$$

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}(x)=-ej_\nu(x), \tag{1.4}$$

其中

$$j_\mu=i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{1.5}$$

是电流密度．

(1.1)式中的拉氏量密度及相应的运动方程(1.3)式在电子场 $\psi(x)$ 的位相变换

$$\psi(x)\to e^{-i\alpha}\psi(x),\qquad \bar{\psi}(x)\to e^{i\alpha}\bar{\psi}(x) \tag{1.6}$$

下是不变的，上式中 α 是与时空坐标 x 无关的常数．参数与时空坐标无关的变换称为整体变换．(1.6)式有时也称为整体规范变换．变换(1.6)式构成U(1)群，它的群元可交换，因此它属于Abel群．(严格来说，数学中定义的U(1)群是紧致的，即参数 α 的限制为 $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$，$\alpha=2\pi$ 与 $\alpha=0$ 看作一点．在下面的讨论中不对位相参数作这样的限制．)与这个对称群相应的Noether守恒流当 α 无穷小时可表为

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\psi_\gamma}\delta\psi_\gamma+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\bar{\psi}_\gamma}\delta\bar{\psi}_\gamma=\alpha i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi=\alpha j_\mu, \tag{1.7}$$

这里 j_μ 正是(1.5)式中的电流密度．

然而拉氏量密度(1.1)式有比整体位相变换(1.6)式更大的不变性．对各时空点上的电子场 $\psi(x)$ 作独立的位相变换

$$\psi(x)\to e^{-i\alpha(x)}\psi(x),\qquad \bar{\psi}(x)\to e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}(x), \tag{1.8}$$

同时对矢量势 $A_\mu(x)$ 作如下的变换

$$A_\mu(x)\to A_\mu(x)-\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \tag{1.9}$$

其中 $\alpha(x)$ 是时空坐标的函数．(1.8)、(1.9)式中的变换称为定域规范变换．以后简称为规范变换．电磁场强 $F_{\mu\nu}$ 在规范变换下不变

$$F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}. \tag{1.10}$$

电子场 $\phi(x)$ 的时空微商 $\partial_\mu\phi$ 在 (1.1) 式中只以组合形式

$$D_\mu\phi \equiv (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \tag{1.11}$$

出现，在规范变换下

$$D_\mu\phi \to e^{-i\alpha(x)}D_\mu\phi. \tag{1.12}$$

D_μ 称为规范协变微商. 由 (1.10)及(1.12)式知拉氏量密度 (1.1) 式及运动方程 (1.3)及(1.4) 式在规范变换下是不变的. 因此由场方程的解作规范变换得到的也是场方程的解. 此外，所有物理量，例如场的能量、动量、角动量、电流和它们的密度都是规范不变的. 理论的这些性质表示各时空点上电子场 $\phi(x)$ 的位相允许独立地任意选取，这相当于按 (1.9) 式重新定义矢量势 $A_\mu(x)$ 而没有任何物理的影响. 不同的 $\alpha(x)$ 称为不同的规范. 规范自由度是非物理的自由度.

电磁作用的规范不变性是与光子静质量为零相联系的. 假如在拉氏量密度中有一个质量项 $-\frac{1}{2}mA_\mu A_\mu$，则规范不变性将不成立.

以上的结论也适用于一般的场 $\phi_i(x)(i=1,2,\cdots,N)$ 的电磁作用理论. 把 $\phi_i(x)$ 看作一列矩阵 $\phi(x)$ 的分量. 设 Q 为电荷矩阵，其本征值为电荷与电子电荷 e 之比. 考虑整体规范变换

$$\phi \to e^{-i\alpha Q}\phi, \qquad \phi^* \to e^{i\alpha Q}\phi^*, \tag{1.13}$$

其中 α 是常数. 设拉氏量密度

$$\mathscr{L}(\partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi^*, \phi, \phi^*)$$

在变换 (1.13) 下不变，则拉氏量密度

$$\mathscr{L}_\phi(D_\mu\phi, D_\mu\phi^*, \phi, \phi^*) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{1.14}$$

在相应的 U(1) 定域规范变换下不变，上式中

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - ieQA_\mu)\phi, \qquad D_\mu\phi^* = (\partial_\mu + ieQA_\mu)\phi^*. \tag{1.15}$$

反过来说，如果我们以 U(1) 规范不变性作为物理原则，则由于要求 ϕ_i 场的动能项不导致规范不变性的破坏，必然存在零质量矢量场 $A_\mu(x)$，它在规范变换下按(1.9)式变换，且拉氏量密

度的形式为

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}(D_\mu\phi,D_\mu\phi^*,\phi,\phi^*,F_{\mu\nu}). \tag{1.16}$$

假设 $\mathscr{L}$ 中包含 A_μ 场的动能项. 如果再假设 $\mathscr{L}$ 中只包含量纲不大于 4 的场量的乘积(如 $\mathscr{L}$ 不满足此条件则量子化的场论是不可重整的),则 (1.16) 式进一步限制为 (1.14) 式. 由(1.14) 式描述的电磁相互作用称为最小耦合. 如果允许量纲大于 4 的项, 则 $\mathscr{L}$ 中还可能有其他的项. 例如 Dirac 场的电磁作用中可以有如下的磁矩耦合项

$$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}Q\psi F_{\mu\nu},$$

这样的项也是规范不变的.

除与整体位相变换不变性相联系的电荷外定域规范不变性并不带来新的守恒量. 为了看清这一点我们把通常求 Noether 流的手续用于规范变换. 设 φ_l 代表所有的场并设拉氏量中不包含场的高于一阶的微商. 考虑一般的变换

$$\varphi(x)\to\varphi'(x')=\varphi(x)+\delta\varphi(x)+\delta x_\mu\partial_\mu\varphi,\quad x'=x+\delta x.$$

在这个变换下四维区域 Ω 内作用量的改变为

$$\begin{aligned}\delta S_\Omega=\delta\int_\Omega d^4x\mathscr{L}&=\int_\Omega d^4x\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_l}\delta\varphi_l+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_l}\partial_\mu(\delta\varphi_l)\right.\\&\qquad\left.+\partial_\mu(\mathscr{L}\delta x_\mu)\right]\\&=\int_\Omega d^4x\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_l}-\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_l)}\right)\delta\varphi_l+\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_l}\delta\varphi_l\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+\mathscr{L}\delta x\right)\right].\end{aligned} \tag{1.17}$$

上式右方第一个圆括号内的量记为 $\dfrac{\delta\mathscr{L}}{\delta\varphi_l}$, 如作用量在此变换下不变,由(1.17)式可得

$$-\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\varphi_l}\delta\varphi_l=\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi_l}\delta\varphi_l+\mathscr{L}\delta x_\mu\right]. \tag{1.18}$$

由拉氏运动方程

$$\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\varphi_l}=0$$

得到守恒流方程

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_l)}\delta\varphi_l+\mathscr{L}\delta x_\mu\right)\propto\partial_\mu J_\mu=0, \tag{1.19}$$

上式中的 J_μ 是 Noether 流. 对于内部对称性,上式中的 $\delta x_\mu=0$.

对于由(1.14)式中的拉氏量描述的带电场 ϕ 与电磁场 A_μ 的作用,在整体无穷小位相变换下利用

$$\delta\phi=-i\alpha Q\phi,\qquad \delta A_\mu=0,$$

由(1.19)式得到守恒的电流密度为

$$ej_\mu=-ei\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}Q\phi-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}Q\phi^*\right)=\frac{\partial\mathscr{L}_\phi}{\partial A_\mu}. \tag{1.20}$$

电磁场运动方程为

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}=-ej_\nu. \tag{1.21}$$

现在考虑规范变换,由(1.9)式、(1.19)式并利用(1.20)式得到守恒流密度为

$$\begin{aligned}&F_{\mu\nu}\partial_\nu\alpha-\alpha(x)ie\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}Q\phi-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}Q\phi^*\right)\\&=F_{\mu\nu}\partial_\nu\alpha+\alpha(x)ej_\mu.\end{aligned}$$

利用场方程(1.21)并考虑到 $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$ 可将上式写为

$$\partial_\nu(F_{\mu\nu}\alpha(x)). \tag{1.22}$$

(1.22)式是一个全散度项,由 Gauss 定律知,如限制在有限的空间区域作规范变换,则相应的守恒荷

$$\int d^3x\partial_i(F_{0i}(x)\alpha(x))=\int d\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}(x)\alpha(x)\qquad(i=1,2,3)$$

为零. 证明了不存在与定域规范变换相联系的守恒荷. 如果 $\alpha(x)$ 在有限的空间区域外为常数,则(1.22)式化为通常的电荷.

电磁作用理论的定域规范不变性虽不导致相应的守恒荷,但是它导致一系列恒等式. 它要求物理量的理论计算结果必须是规范不变的. 在量子化的电磁作用理论中, S 矩阵必须是规范不变的,这是任何合理的近似计算法则所必须满足的要求. 除 S 矩阵外,在量子电动力学中常常需要计算包含光子和电子外线的 Green 函数. Green 函数不是有直接物理意义的量,它们不是规范不变

的. 但是由理论的规范不变性可以导出这些 Green 函数之间的一些关系式,它们被称为 Ward-Takahashi 恒等式. 这些恒等式可以由规范不变性利用量子理论的泛函积分表示方法推导出来. 我们将在第三章中用这种方法推导 Ward-Takahashi 恒等式.在量子电动力学中这些恒等式的等价形式也可以由电流守恒推导出来. 这是由于作用量中电磁场与电荷的作用项为 $e\int d^4xA_\mu(x)j_\mu(x)$. 在规范变换下这项的改变为

$$-\int d^4xj_\mu(x)\partial_\mu\alpha(x)=\int d^4x\partial_\mu j_\mu(x)\alpha(x).$$

因此由流守恒可以得到由规范不变性得到的结果.

现在我们由流守恒推导 Ward-Takahashi 恒等式. 量子化后 $\psi(x)$ 和 $A_\mu(x)$ 成为算符、电荷密度算符 $j_0(x)$ 与场算符的正则对易关系为

$$[j_0(x),\psi(y)]\delta(x_0-y_0)=-\psi(x)\delta^4(x-y), \tag{1.23}$$

$$[j_0(x),\bar{\psi}(y)]\delta(x_0-y_0)=\bar{\psi}(x)\delta^4(x-y), \tag{1.24}$$

$$[j_0(x),A_\mu(y)]\delta(x_0-y_0)=0. \tag{1.25}$$

在量子电动力学中 $A_\mu(x)$ 只能通过电流密度 $j_\mu(x)$ 与电子场 $\psi(x)$ 耦合, 不失一般性可以限于考虑如下的联通 Green 函数

$$\begin{aligned}&G_{\mu;\mu_1\cdots\mu_m}(u;x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n,z_1,\cdots,z_m)\\&=\langle 0|T(j_\mu(u)\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)\cdots\bar{\psi}(y_n)A_\mu(z_1)\\&\qquad\cdots A_{\mu_m}(z_m))|0\rangle_c.\end{aligned} \tag{1.26}$$

设 $A(x)$ 和 $B(x)$ 为任意两个定域算符,其中至少有一个是 Bose 算符,我们有恒等式

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_0}T(A(x)B(x'))&=[A(x),B(x')]\delta(x_0-x_0')\\&\quad+T\left(\frac{\partial}{\partial x_0}A(x)\cdot B(x')\right).\end{aligned} \tag{1.27}$$

利用 (1.23)—(1.27) 式及电流守恒

$$\partial_\mu j_\mu(x)=0 \tag{1.28}$$

得到

$$\frac{\partial}{\partial u_\mu} G_{\mu;\mu_1\cdots\mu_m}(u;x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n,z_1,\cdots,z_m)$$
$$= \sum[-\delta^4(u-x_n)+\delta^4(u-y_n)]G_{\mu_1\cdots\mu_m}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n,z_1,\cdots,z_m), \tag{1.29}$$

其中

$$G_{\mu_1\cdots\mu_m}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n,z_1,\cdots,z_m) = \langle 0|T(\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\bar{\phi}(y_1)\cdots\bar{\phi}(y_n)A_{\mu_1}(z_1)\cdots A_{\mu_m}(z_m))|0\rangle_c. \tag{1.30}$$

引入 Green 函数 (1.26) 和 (1.30)式的富氏变换

$$\delta^4(q+\sum p_i-\sum p_i'+\sum k_j)\widetilde{G}_{\mu;\mu_1\cdots\mu_m}(q;p_i,p_i',k_j)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int G_{\mu;\mu_1\cdots\mu_m}(u;x_i,y_i,z_j)\exp[-i(q\cdot u + p_i\cdot x_i - p_i'\cdot y_i + k_j\cdot z_j)]\cdot d^4u\prod_i d^4x_i d^4y_i\prod_j d^4z_j,$$

$$\delta^4(\sum p_i-\sum p_i'+\sum k_j)\widetilde{G}_{\mu_1\cdots\mu_m}(p_i,p_i',k_j)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int G_{\mu_1\cdots\mu_m}(x_i,y_i,z_j)\exp[-i(p_i\cdot x_i - p_i'\cdot y_i + k_j\cdot z_j)]\prod_i d^4x_i d^4y_i\prod_j d^4z_j.$$

由 (1.29) 式得到 Ward-Takahashi 恒等式

$$iq_\mu\widetilde{G}_{\mu;\mu_j}(q;p_i,p_i',k_j) = -\sum_k[\widetilde{G}_{\mu_j}(p_i+\delta_{ik}q,p_i',k_j) - \widetilde{G}_{\mu_j}(p_i,p_i'-\delta_{ik}q,k_j)]. \tag{1.31}$$

例如对 $n=1$, $m=0$ 的情形，我们有

$$\widetilde{G}(p,p) \equiv -iS_F'(p)$$
$$\widetilde{G}_{\mu_j}(q;p,p') \equiv -iS_F'(p')\Gamma_\mu(p',p)S_F'(p),$$

其中 S_F' 为包含辐射修正的电子全传播子，Γ_μ 为正规顶角. 此时(1.31) 式化为

$$-q_\mu\Gamma_\mu(p',p) = iS_F'^{-1}(p') - iS_F'^{-1}(p).$$

在 $q=p'-p\to 0$ 时，由 (1.32) 式得到通常的 Ward 恒等式

$$\Gamma_\mu(p,p) = -i\frac{\partial}{\partial p_\mu}S_F'^{-1}(p). \tag{1.32}$$

由 (1.31) 式得到

$$
q_\mu \prod_k \frac{i\gamma\cdot p_k+m}{-i}\cdot\frac{i\gamma\cdot p_k'+m}{-i}
\times \tilde{G}_{\mu;\mu_j}(q;p_i,p_i',k_i)\Big|_{i\gamma\cdot p_k+m=i\gamma\cdot p_k'+m=0}=0. \tag{1.33}
$$

3. 非 Abel 群及其李代数

在物理学中有一些非 Abel 对称群起作用，这些群的乘法是不可交换的，例如早年由唯象研究得到的强相互作用的同位旋 SU(2) 和 SU(3) 对称. SU(3) 对称性的研究导致夸克和层子模型的产生. 在夸克的层次除了 SU(3) 对称以外还有本书中将介绍的色 SU(3) 和弱电统一的 SU(2) × U(1) 对称，这些都是非 Abel 对称性.

我们首先回忆有关李群和李代数的一些数学概念和公式. 设 G 为李群,它的元素 g 依赖于 r 个连续实参数 $\alpha^i(i=1,2,\cdots,r)$. 如参数 α^i 的值域是有界的，则群 G 称为紧致的. 设 H 是 G 的子群，h 和 g 分别为 H 和 G 的元素. 如果对所有的 g 和 h，ghg^{-1} 都是 H 的元素，则 H 称为 g 的不变子群. 如 G 不含非平凡不变子群，G 称为单纯群. 单纯群的直积称为半单纯群. N 维转动群 O(N) 是单纯和紧致的，它的群参数可取为表征转轴方向的方位角和绕这个转轴所转过的角度，这些角度都小于 2π 或小于 π. 行列式为 1 的 N 维幺正群 SU(N) 也是单纯和紧致的. 没有行列式为 1 的条件的幺正群 U(N) 是紧致的和半单的. 但它不是单纯群，因为它含有一个与其它元素交换的子群 U(1). $\mathrm{U}(N)=U(1)\otimes \mathrm{SU}(N)$，这里 $\otimes$ 表示直乘. Lorentz 群是单纯的但不是紧致的. 包含三维转动群 O(3) 和平移群的 Euclid 群既不是半单的也不是紧致的，因为它包含非紧致的平移群作为不变子群，这个子群的元素与 O(3) 不可交换.

设 H 是 G 的子群，g_1 和 g_2 是 G 的元素. 集合 g_1H 和 g_2H 或者彼此重合或者不相交. 集合 g_iH 称为 H 的左陪集. 相似地，集合 Hg_i 称为 H 的右陪集. H 的不相重合的陪集的集合 $\{gH\}$ 用 G/H 表示.

陪集 gH 和 Hg 不一定重合. 如对所有属于G的g有 $gH=Hg$ 则有 $gHg^{-1}=H$, 因此H是不变子群. 在这种情况下陪集的集合 G/H 构成一个群,称为商群.

相应于每个参数 α^i 有一个群的生成元 $X_i(i=1,2,\cdots,r)$, 它们满足对易关系

$$[X_i,X_j]=if_{ij}{}^kX_k, \tag{1.34}$$

其中 f_{ij}^k 为实数，它们称为群的结构常数. 对非 Abel 群，f_{ij}^k 不全为零. 由 X_i 张成的线性矢量空间用A表示. 它的元素

$$\alpha=\sum\alpha^iX_i \text{ 及 } \beta=\sum\beta^iX_i$$

的乘法由

$$\alpha\times\beta\equiv[\alpha,\beta]$$

定义. 线性空间A在乘法和加法下封闭，它称为群G的李代数. 我们限制 α^i,β^i 为实数，这时A称为实李代数.

结构常数满足反对称条件

$$f_{ij}{}^k=-f_{ji}{}^k$$

及由 Jacobi 恒等式

$$[X_i,[X_j,X_k]]+[X_j,[X_k,X_i]]+[X_k,[X_i,X_j]]=0 \tag{1.35}$$

得到的条件

$$f_{ij}{}^lf_{lk}{}^m+f_{jk}{}^lf_{li}{}^m+f_{ki}{}^lf_{lj}{}^m=0. \tag{1.36}$$

引入

$$g_{ij}=g_{ji}\equiv f_{il}{}^mf_{jm}{}^l. \tag{1.37}$$

在矢量空间A的基矢 X_i 的线性变换

$$X_i'=c_i^jX_j$$

下 g_{ij} 按张量变换,而两个元素α和β的内积

$$(\alpha,\beta)\equiv\alpha^i\beta^jg_{ij}$$

是不变的. g_{ij} 称为李代数A的度规张量. 由(1.36)式和(1.37)式知由

$$f_{ijk}\equiv f_{ij}{}^kg_{lk} \tag{1.38}$$

定义的常数 f_{ijk} 对三个指标 i,j,k 是全反对称的. 对半单纯紧