

78809

TM13

1044:2

基本电路理论

(下 册)

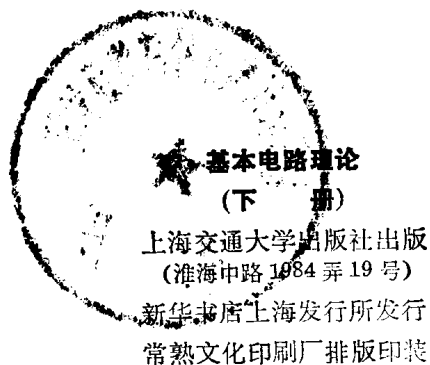
王 葛 主编

上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书是上海交通大学电工基础教研组在使用国外教材(C. A. 狄苏尔和葛守仁合写的《电路基本理论》)取得了一定经验的基础上编写而成的。全书分上、下两册。上册包括:集中参数电路和基尔霍夫定律、电路元件、线性定常电阻性网络的直接分析法及其形式的变换、电阻性网络的节点分析和网孔分析、电阻性网络的回路分析和割集分析、网络定理、一阶电路、二阶电路和高阶电路、正弦稳态分析、三相电路等十章。下册包括:非正弦周期信号作用下电路的稳态分析、拉普拉斯变换、网络函数、双口与多口网络、状态变量法、非线性电路、磁路等七章。书中各章均附有一定数量的例题和习题。

本书可作为普通高等院校电类专业“电路”课程的教材,也可供夜大学等成人高校电类专业的学生、自学者和有关科技人员参考。



开本 787×1092 毫米 1/16 印张 18.75 字数 460,000

1987年1月第1版 1987年1月第1次印刷

印数 1—9,000

统一书号: 15324.215

科技书目: 142—250

定价: 3.10 元

目 录

第十一章 非正弦周期信号作用下电路的稳态分析

§ 11.1 非正弦周期信号的三角级数展开	1	§ 11.5 非正弦周期信号作用下电路中的功率	16
§ 11.2 非正弦周期信号的频谱	7	§ 11.6 在非正弦周期电压和电流作用下电路的谐振	20
§ 11.3 非正弦周期信号的有效值、平均值	11	§ 11.7 对称三相电路中的高次谐波	25
§ 11.4 非正弦周期信号激励下线性定常电路的稳态响应	13	习题	29

第十二章 拉普拉斯变换

§ 12.1 拉氏变换的定义	34	12.5.6 复频域等效网络	57
§ 12.2 拉氏变换的基本性质	37	12.5.7 复频域阻抗和复频域导纳	58
12.2.1 唯一性	37	§ 12.6 冲激响应、零状态响应和卷积定理	60
12.2.2 直线性	37	§ 12.7 复频域分析的一般方法	63
12.2.3 微分规则	38	12.7.1 稀疏表格分析法	63
12.2.4 积分规则	40	12.7.2 改进的节点分析法	66
12.2.5 时域平移(延时)性质	40	12.7.3 由稀疏表格方程导出改进的节点方程	69
12.2.6 复频域平移性质	42	§ 12.8 网络定理在复频域分析中的应用	71
12.2.7 初值定理	42	12.8.1 戴维宁定理和诺顿定理在复频域分析中的应用	71
12.2.8 终值定理	43	12.8.2 互易定理在复频域分析中的应用	74
§ 12.3 拉氏反变换	43	§ 12.9 固有频率	76
12.3.1 部分分式展开法	44	12.9.1 固有频率的定义	76
12.3.2 用留数定理求拉氏反变换	48	12.9.2 网络方程和网络固有频率	76
§ 12.4 积分微分方程的拉氏变换	49	12.9.3 零固有频率	81
§ 12.5 电路基本规律的复频域形式	54	12.9.4 网络固有频率和网络变量的固有频率	84
12.5.1 基尔霍夫定律的复频域形式	54	习题	86
12.5.2 电阻器特性方程的复频域形式	55		
12.5.3 电容器特性方程的复频域形式	55		
12.5.4 电感器特性方程的复频域形式	56		
12.5.5 耦合电感器特性方程的复频域形式	57		

第十三章 网络函数

§ 13.1 网络函数的定义和分类	93	13.4.1 一阶网络函数的频率特性	103
§ 13.2 网络函数的零点、极点和网络函数的图解求值	95	13.4.2 二阶网络函数的频率特性	106
13.2.1 网络函数的零点和极点	95	§ 13.5 网络函数的零点对频率特性和冲激响应的影响	112
13.2.2 网络函数的图解求值	97	§ 13.6 RC 有源滤波器	113
§ 13.3 网络函数和冲激响应	99	习题	115
§ 13.4 网络函数的频率特性	103		

第十四章 双口和多口网络

§ 14.1 多端网络和多口网络	120	§ 14.5 具有端接的双口网络	142
§ 14.2 双口网络不含独立电源时的方程及其参数	121	§ 14.6 双口网络含独立电源时的方程	143
14.2.1 含短路导纳参数的双口方程	124	§ 14.7 双口网络的等效电路	146
14.2.2 含开路阻抗参数的双口方程	126	§ 14.8 多口网络的方程及其参数	148
14.2.3 含混合参数的双口方程	127	14.8.1 不含独立电源时的多口网络方程	149
14.2.4 含传输参数的双口方程	129	14.8.2 参数矩阵间的换算关系及互易性判据	153
§ 14.3 双口网络各参数间的换算关系和互易性判据	131	14.8.3 含独立电源时的多口方程	159
§ 14.4 双口网络的相互连接	135	§ 14.9 多口网络在网络分析中的应用简介	160
14.4.1 并联连接	135	习题	163
14.4.2 串联连接	137		
14.4.3 串-并联和并-串联连接	138		
14.4.4 级联连接	139		

第十五章 状态变量法

§ 15.1 概述	171	15.4.1 时域解法	190
§ 15.2 状态和状态变量	172	15.4.2 复频域解法(拉氏变换法)	202
§ 15.3 状态方程的列写方法	177	§ 15.5 冲激响应矩阵与网络函数矩阵的关系以及矩阵 A 的特征值与网络固有频率的关系	204
15.3.1 视察法	177	习题	207
15.3.2 系统法	181		
15.3.3 抽出法	187		
§ 15.4 状态方程的解法	190		

第十六章 非线性电路

§ 16.1 非线性电阻性电路方程的列写	213	16.1.2 改进的节点方程	215
16.1.1 节点方程	213	16.1.3 稀疏表格方程	218

§ 16.2	牛顿-拉夫逊法 ·····	221	§ 16.6	非线性动态电路状态方程的列写 ·····	236
§ 16.3	非线性电阻性电路的分段线性化法 ·····	225	§ 16.7	分析非线性动态电路的相平面法 ·····	243
§ 16.4	非线性电阻性电路的图解法 ···	229	§ 16.8	分析非线性动态电路的分段线性化法 ·····	249
16.4.1	用图解法求电路的驱动点特性图 ·····	229	§ 16.9	非线性动态电路的小信号分析 ·····	253
16.4.2	用图解法确定电路的工作点 ·····	231	习题	·····	255
16.4.3	用图解法求电路的转移特性图 ···	233			
§ 16.5	非线性电阻性电路的小信号分析 ·····	234			

第十七章 磁 路

§ 17.1	磁场的基本物理量和基本定律 ·····	263	17.4.1	无分支磁路的计算 ·····	271
§ 17.2	铁磁质的磁化 ·····	264	17.4.2	有分支磁路的计算 ·····	276
§ 17.3	磁路的基本定律 ·····	267	§ 17.5	交变磁通下的铁芯损失 ·····	279
17.3.1	磁路的欧姆定律 ·····	268	§ 17.6	铁芯线圈的电压、磁通和电流 ···	283
17.3.2	磁路的基尔霍夫第一定律 ·····	270	§ 17.7	铁芯线圈的相量图和等效电路 ·····	284
17.3.3	磁路的基尔霍夫第二定律 ·····	271	习题	·····	288
§ 17.4	恒定磁通磁路的计算 ·····	271	参考书目	·····	291

第十一章 非正弦周期信号作用 下电路的稳态分析

在实践中,常会遇到由非正弦信号激励的电路,例如在无线电技术、自动控制技术和计算机技术中,有的电路就是由一种称为脉冲的非正弦信号激励的。另外,即使那些所谓由正弦信号激励的电路,严格地说,也是由非正弦信号激励的,因为人们很难制作出产生标准正弦信号的信号源。在非正弦信号中,有的具有周期性,有的不具有周期性。前者称为非正弦周期信号,后者称为非正弦非周期信号。本章只研究非正弦周期信号作用下电路的稳态分析。讨论的主要内容是非正弦周期信号的三角级数展开、有效值、平均值、电路的功率、稳态响应的计算以及对称三相电路中的高次谐波等。

§11.1 非正弦周期信号的三角级数展开

本书的第二章里曾经指出,任一周期为 T 的周期函数 $f(\cdot)$ 只要满足狄里赫利条件(即在每个周期上,(1) $f(\cdot)$ 连续或者具有有限个第一类间断点;(2) $f(\cdot)$ 具有有限个最大值和最小值),便可展开成三角级数

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{km} \cos k\omega t + B_{km} \sin k\omega t) \quad (11.1)$$

上述的三角级数是人们所熟知的傅里叶级数。级数中诸项的系数称为傅里叶系数,利用三角函数的正交性可以导出有关这些系数的公式:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (11.2)$$

$$A_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt, \quad k \neq 0, \quad (11.3)$$

$$B_{km} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt, \quad k \neq 0. \quad (11.4)$$

其中, T 为原周期函数 $f(t)$ 的周期; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 为原周期函数的(角)频率。

显然,一旦按上列公式 11.2、11.3 和 11.4 定出诸系数 A_0 、 A_{km} 、 B_{km} , 表达原周期函数的傅里叶级数也就完全确定了。在实践中,我们所用到的非正弦周期信号,诸如电压、电流等,一般都满足狄里赫利条件,因此可以按照上述数学结论和计算公式,把它们展成完全确定的傅里叶级数。在电路理论中,习惯于把级数中的常数项称为直流分量(或恒定分量),把诸正弦项和余弦项称为谐波分量。其中,频率同于原信号频率的谐波分量称为基波分量(或基波),频率为基波频率整数倍的谐波分量一概称为高次谐波。在高次谐波中,又按为基波频率之倍数分为二次谐波、三次谐波等等。

在求一非正弦周期信号的傅里叶级数时,主要的计算工作量是求傅里叶系数。然而,如果利用周期函数的某些性质,计算过程将会得到明显的简化。这一点已在高等数学中详细论述

过,这里根据讨论的需要仅提及几点。

已知函数 $f(t)$, 若 $f(-t) = f(t)$, 则 $f(t)$ 为偶函数; 若 $f(-t) = -f(t)$, 则 $f(t)$ 为奇函数。偶函数的波形对称于纵轴而奇函数的波形对称于原点(见图 11.1)。

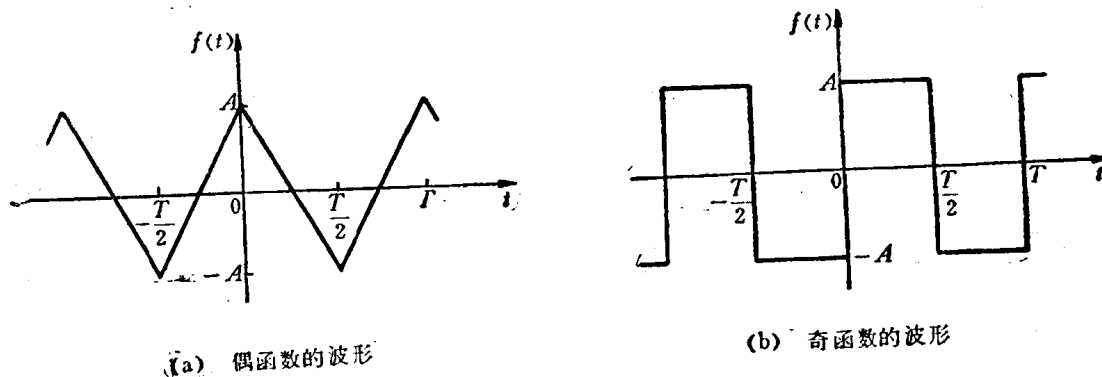


图 11.1 偶函数和奇函数的波形

定理 若非正弦周期性信号是偶函数, 则其傅里叶级数中的傅里叶系数

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt, \quad (11.5)$$

$$A_{km} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt, \quad (11.6)$$

$$B_{km} = 0; \quad (11.7)$$

若是奇函数, 则其傅里叶系数

$$A_0 = 0, \quad (11.8)$$

$$A_{km} = 0, \quad (11.9)$$

$$B_{km} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt. \quad (11.10)$$

此定理读者可以自行证明。

由定理可知, 只要判别出一个非正弦周期信号的奇偶性, 就能断定其傅里叶级数的系数何者为零, 何者非零。当然, 为零者不必再去计算。另外, 根据级数中系数为零的项不再出现, 可推知, 当非正弦周期信号为偶函数时, 其傅里叶级数中不含正弦项(正弦谐波分量), 只含常数项(直流分量)和余弦项(余弦谐波分量); 而当非正弦周期信号为奇函数时则反之, 即只含正弦项(正弦谐波分量), 不含常数项(直流分量)和余弦项(余弦谐波分量)。

除了可以利用函数的奇、偶性质(也可以说成是对称性质)外, 还可利用函数的半波横轴对称性质。具有这种性质的函数其波形的正半波无论是后移或前移半个周期皆与负半波互成镜像, 图 11.2 所示的信号波形便是一个例子。具有这种性质的函数其数学表达式是 $f(t) = -f\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$ 。

定理 半波横轴对称的非正弦周期信号, 其傅里叶级数中的诸系数分别为

$$A_0 = 0, \quad (11.11)$$

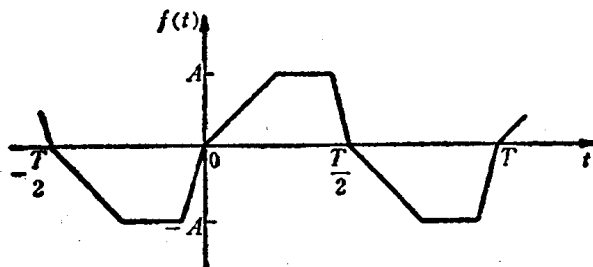


图 11.2 横轴对称的波形

$$A_{km} = \begin{cases} 0, & \text{当 } k \text{ 为偶数,} \\ \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt, & \text{当 } k \text{ 为奇数;} \end{cases} \quad (11.12)$$

$$B_{km} = \begin{cases} 0, & \text{当 } k \text{ 为偶数,} \\ \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt, & \text{当 } k \text{ 为奇数。} \end{cases} \quad (11.13)$$

证: (1) $A_0 = 0$ 是显而易见的。

(2) 根据公式

$$\begin{aligned} A_{km} &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T f(t) \cos k\omega t dt, \end{aligned}$$

上式右边的第二个积分可变为

$$\frac{2}{T} \int_0^{T/2} f\left(t + \frac{T}{2}\right) \cos k\omega\left(t + \frac{T}{2}\right) dt.$$

由于

$$f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t)$$

和

$$\begin{aligned} \cos k\omega\left(t + \frac{T}{2}\right) &= \cos(k\omega t + k\pi) \\ &= \begin{cases} -\cos k\omega t, & \text{当 } k \text{ 为奇数,} \\ \cos k\omega t, & \text{当 } k \text{ 为偶数,} \end{cases} \end{aligned}$$

所以又有

$$\frac{2}{T} \int_0^{T/2} f\left(t + \frac{T}{2}\right) \cos k\omega\left(t + \frac{T}{2}\right) dt = \begin{cases} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt, & \text{当 } k \text{ 为奇数;} \\ -\frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt, & \text{当 } k \text{ 为偶数。} \end{cases}$$

将此式代入原公式可得

$$A_{km} = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt, & \text{当 } k \text{ 为奇数,} \\ 0, & \text{当 } k \text{ 为偶数。} \end{cases}$$

同理可得

$$B_{km} = \begin{cases} \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt, & \text{当 } k \text{ 为奇数;} \\ 0, & \text{当 } k \text{ 为偶数。} \end{cases}$$

由此定理可知,具有这种性质的非正弦周期信号不含偶次谐波分量和直流分量,只含奇次谐波分量。由于这类信号只含奇次谐波分量,故其所对应的函数又称奇谐波函数。

利用移动坐标原点或将任意一非正弦周期性函数分解成奇函数与偶函数之和的作法也能使计算变得简易,有关这方面的情况,在下面的例题中将有所说明。

例 11.1 试将图 11.3 中所示的非正弦周期信号(称为方波信号)展成傅里叶级数。

解 根据图上所示信号的波形,可知其既对称于纵轴,又具有半波对称性质,所以它是兼有奇谐波函数性质的偶函数。依照上述定理,此信号的傅里叶级数中必定只含有余弦的奇次谐波项,因此只需按公式

$$A_{km} = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt$$

计算 A_{km} 。

对图上的波形图可以写出

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < \frac{T}{4}; \\ -A, & \frac{T}{4} < t \leq \frac{T}{2}. \end{cases}$$

将上式代入 A_{km} , 使得

$$\begin{aligned} A_{km} &= \frac{4}{T} \left[\int_0^{T/4} A \cos k\omega t dt - \int_{T/4}^{T/2} A \cos k\omega t dt \right] \\ &= \frac{4A}{T} \int_0^{T/4} \cos k\omega t dt - \frac{4A}{T} \int_{T/4}^{T/2} \cos k\omega t dt \\ &= \frac{4A}{T k \omega} \left\{ \sin k\omega t \Big|_0^{T/4} - \sin k\omega t \Big|_{T/4}^{T/2} \right\} \\ &= \begin{cases} \frac{4A}{k\pi}, & k=1, 5, 9, \dots; \\ -\frac{4A}{k\pi}, & k=3, 7, 11, \dots. \end{cases} \end{aligned}$$

于是,信号的傅里叶级数

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots \right).$$

例 11.2 试求图 11.4 所示三角波信号的傅里叶级数。

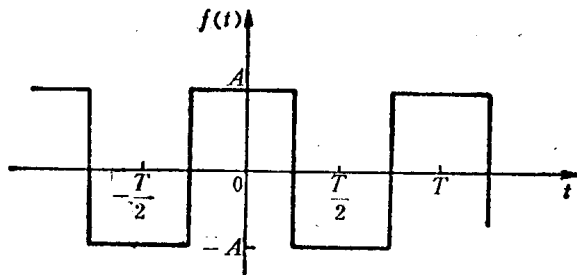


图 11.3 方波信号

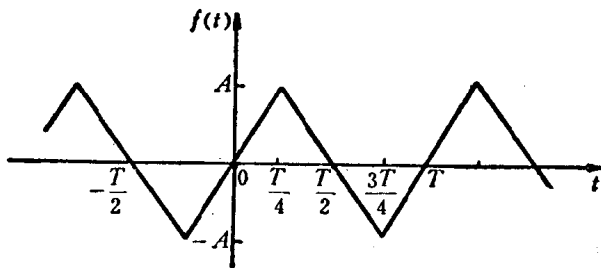


图 11.4 三角波信号

解 观察一下所给的波形可以知道,它既是原点对称又是半波横轴对称。因此,其傅里叶级数仅由正弦奇次谐波分量组成。由于

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4A}{T} t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{4}, \\ -\frac{4A}{T} t + 2A, & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2}, \end{cases}$$

故有

$$B_{km} = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \frac{4A}{T} t \sin k\omega t dt - \frac{4}{T} \int_{T/4}^{T/2} \left(\frac{4A}{T} t - 2A \right) \sin k\omega t dt .$$

参照积分公式

$$\int x \sin ax dx = -\frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{1}{a} x \cos ax$$

可算出

$$B_{km} = \begin{cases} \frac{8A}{k^2\pi^2}, & k=1, 5, 9, \dots; \\ -\frac{8A}{k^2\pi^2}, & k=3, 7, 11, \dots. \end{cases}$$

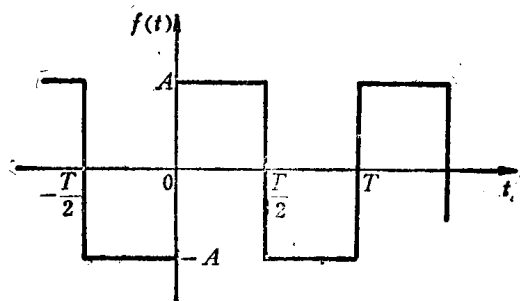


图 11.5 例 11.3 用图

于是, 所欲求的傅里叶级数

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega t - \frac{1}{7^2} \sin 7\omega t + \dots \right).$$

例 11.3 已知一如图 11.5 所示的信号波形, 试求其傅里叶级数。

解 此信号对原点对称, 是奇函数, 并且又是半波横轴对称, 所以其傅里叶级数仅由正弦奇次谐波分量组成。由于

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 < t \leq \frac{T}{2}, \\ -A, & \frac{T}{2} < t \leq T, \end{cases}$$

故有

$$\begin{aligned} B_{km} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} A \sin k\omega t dt = -\frac{4A}{Tk\omega} \left\{ \cos k\omega t \Big|_0^{T/2} \right\} \\ &= \frac{4A}{k\pi}, \quad k=1, 3, 5, 7, \dots, \end{aligned}$$

于是, 所求级数

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right).$$

如果我们将本例的波形与例 11.1 的波形比较一下, 可以立即发现, 本例只不过是把例 11.1 中的坐标原点左移 $\frac{T}{4}$ 距离的结果。若以 t 记本例的时间变量, t' 记例 11.1 的时间变量, 则有

$$t' = t - \frac{T}{4}.$$

已知

$$f(t') = \frac{4A}{\pi} \left[\cos \omega t' - \frac{1}{3} \cos 3\omega t' + \frac{1}{5} \cos 5\omega t' - \frac{1}{7} \cos 7\omega t' + \dots \right],$$

所以进行变量代换后便可得出本例所要求的傅里叶级数

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{4A}{\pi} \left[\cos \omega \left(t - \frac{T}{4} \right) - \frac{1}{3} \cos 3\omega \left(t - \frac{T}{4} \right) + \frac{1}{5} \cos 5\omega \left(t - \frac{T}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{7} \cos 7\omega \left(t - \frac{T}{4} \right) + \dots \right] \\
 &= \frac{4A}{\pi} \left[\cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{3} \cos \left(3\omega t - \frac{3}{2} \pi \right) + \frac{1}{5} \cos \left(5\omega t - \frac{5}{2} \pi \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{7} \cos \left(7\omega t - \frac{7}{2} \pi \right) + \dots \right] \\
 &= \frac{4A}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right].
 \end{aligned}$$

显然,经这样处理后所得的结果与上面的结果完全相同。

例 11.4 试求图 11.6a 所示信号波形的傅里叶级数。

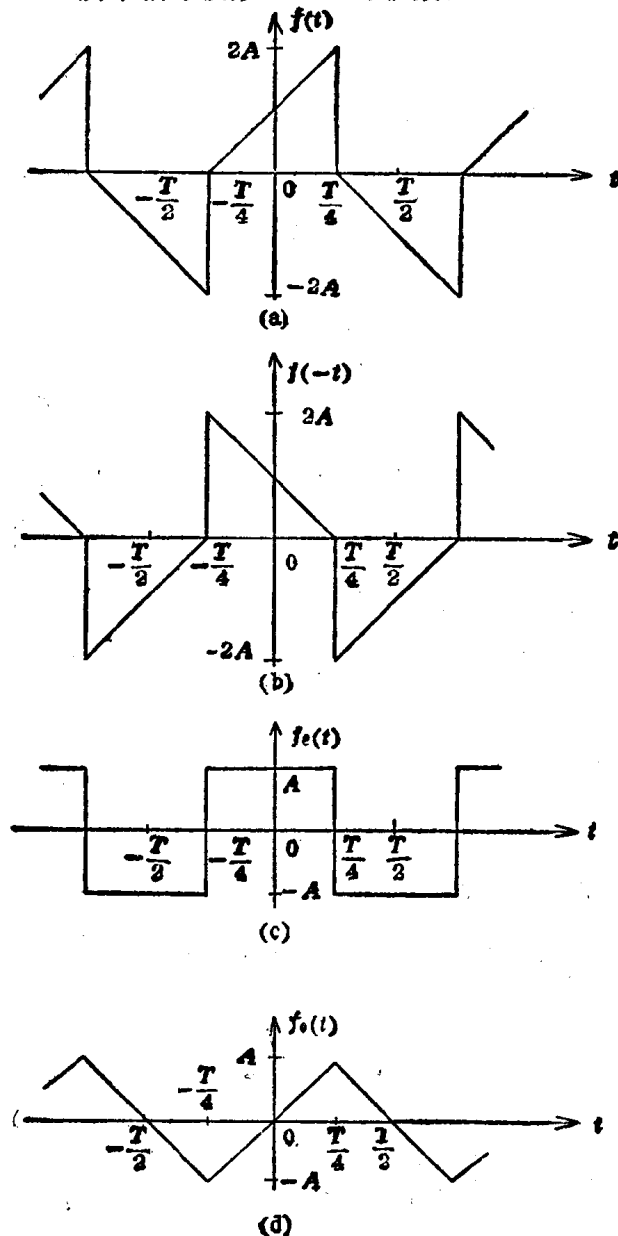


图 11.6 (a) $f(t)$ 的波形; (b) $f(-t)$ 的波形; (c) $f_e(t)$ 的波形; (d) $f_o(t)$ 的波形

解 此波形既非对原点对称又非对纵轴对称,但具有半波横轴对称性质。这说明 $f(t)$ 的傅里叶级数中所有偶次谐波(包含正弦和余弦)皆为零。由于 $f(t)$ 不是偶函数也不是奇函数,计算傅里叶系数时会遇到不少麻烦。为了避免这一点,现采用先把 $f(t)$ 分解成一个偶函数和一个奇函数,再分别求这两个函数的傅里叶级数,最后进行迭加得出 $f(t)$ 的傅里叶级数的办法。

这样处理的依据是:一个偶函数与一个奇函数之和

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

在一般情况下,既非偶函数又非奇函数。上式中的偶函数 $f_e(t)$ 称为 $f(t)$ 的偶部,奇函数 $f_o(t)$ 称为 $f(t)$ 的奇部。由于

$$f(-t) = f_e(-t) + f_o(-t) = f_e(t) - f_o(t),$$

所以

$$f_e(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)], f_o(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)].$$

按照上面二式,由已知的 $f(t)$ 波形不难作出 $f_e(t)$ 和 $f_o(t)$ 的波形。

本例的 $f_e(t)$ 和 $f_o(t)$ 波形分别如图 11.6c 和图 11.6d 所示。图 11.6b 上的波形是 $f(-t)$, 画出此图是为了求 $f_e(t)$ 和 $f_o(t)$ 。

根据例 11.1 可以求出

$$f_e(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t - \frac{1}{7} \cos 7\omega t + \dots \right);$$

根据例 11.2 可以求出

$$f_o(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega t - \frac{1}{7^2} \sin 7\omega t + \dots \right);$$

最后求出

$$\begin{aligned} f(t) &= f_e(t) + f_o(t) \\ &= \frac{4A}{\pi} \cos \omega t + \frac{8A}{\pi^2} \sin \omega t - \frac{4A}{3\pi} \cos 3\omega t - \frac{8A}{9\pi^2} \sin 3\omega t \\ &\quad + \frac{4A}{5\pi} \cos 5\omega t + \frac{8A}{25\pi^2} \sin 5\omega t - \frac{4A}{7\pi} \cos 7\omega t \\ &\quad - \frac{8A}{49\pi^2} \sin 7\omega t + \dots \end{aligned}$$

把上式中相应的正弦项与余弦项进行合并,可使其进一步简化。这一工作请读者自己完成。

§11.2 非正弦周期信号的频谱

上节探讨了一个非正弦周期信号在何种条件下可以展成傅里叶级数以及如何展开,并且阐述了傅里叶级数的各项分别代表信号的不同频率的谐波分量。

本节着重讨论非正弦周期信号的频率特性,即谐波的振幅、相位与角频率的关系。有关一个信号频率特性的信息可以通过所谓信号频谱来获得。频谱是根据傅里叶级数做出的,下面我们来讨论作法的细节。

将式 11.1 中的同频正弦项和余弦项合并可得出新的表达式

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \sin(k\omega t + \psi_k), \quad (11.14)$$

其中

$$C_{km} = \sqrt{A_{km}^2 + B_{km}^2}, \quad (11.15)$$

$$\psi_k = \operatorname{tg}^{-1} \frac{B_{km}}{A_{km}}. \quad (11.16)$$

式 11.14 是表达傅里叶级数的另一种形式。式中只含直流分量和正弦谐波分量，而这些正弦谐波分量的振幅和相角分别为 C_{km} 和 $\psi_k (k=1, 2, \dots)$ 。

不难想象，如果以谐波振幅(包括直流分量)和角频率构成一个平面，并以平面上横轴作为角频率轴，纵轴作为振幅轴，则式 11.5 中每项的振幅和角频率便构成此平面上的点。由这些点各作垂线并终止于横轴的相应频率点上，便得到一种由长短不同但间距相同的线段组成的图像。这种图像即所谓振幅频谱；同理可以作出表征相位与频率关系的相位频谱。

例 11.5 试作出例 11.2 和例 11.3 所示信号的振幅频谱和相位频谱。

解 根据已得到的傅里叶级数，再按照上面所说的作法，便可得出相应的频谱。现将它们分别表示在图 11.7a、b 上。

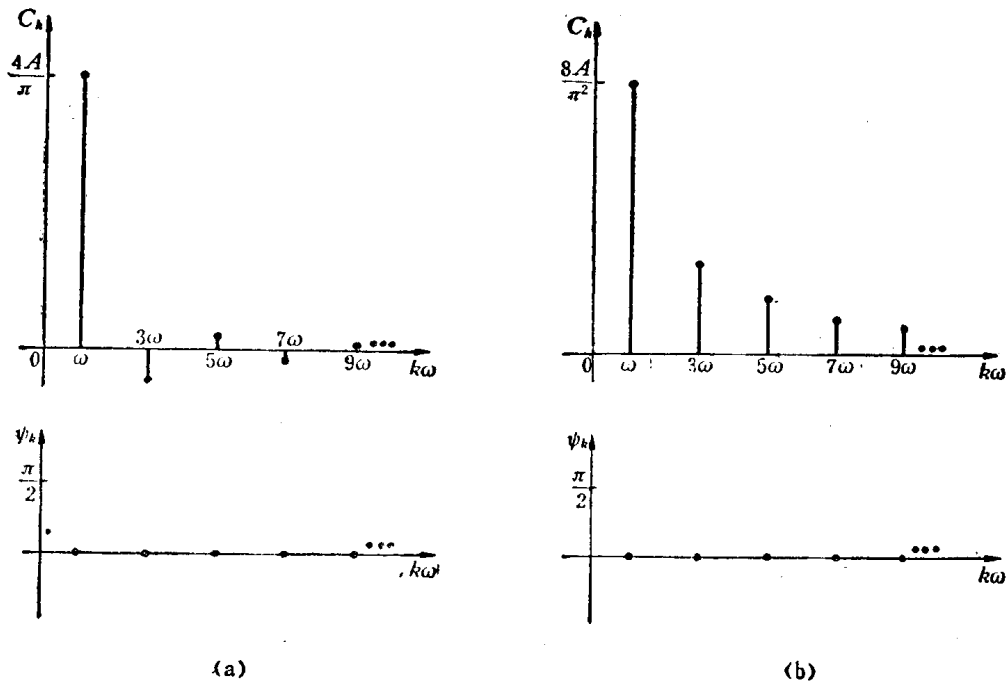


图 11.7 振幅频谱和相位频谱图

比较一下方波信号和三角波信号的频谱，不难看出，两者的谱线衰减的快慢程度不同。这种情况表明了信号的波形不同，其傅里叶级数的收敛速度也不同。例如方波信号的谐波幅度按 $1/k$ 的速度收敛，而三角波信号的谐波幅度却按 $1/k^2$ 的速度收敛。在工程计算中往往允许在规定误差下作适当的近似。一个信号的傅里叶级数按理说应有无穷多项，但对无穷多项进行计算是不现实的。所以只能是在保证不超过规定的误差下取有限项数。根据上面所说，三角波信号的傅里叶级数比方波信号的傅里叶级数衰减得快，所以在相同的误差下前者可取较少的项数。

方波信号的傅里叶级数比三角波信号的收敛得慢,其原因是方波信号本身有间断点,而三角波信号本身无间断点,但其一阶导数有间断点。尚可验证,信号出现间断点的导数的阶数越高,它的傅里叶级数收敛得越快。象抛物线波信号,因其二阶导数才出现间断点,所以所展成的级数收敛得更快,收敛速度是 $1/k^3$ 。总之,信号曲线越光滑,其级数收敛便越快,高次谐波的幅度便越小。正弦信号曲线最光滑,所以不含任何高次谐波。

信号的傅里叶级数还能写成复数形式(指数形式)。与此相应,又能作出所谓复数(指数)频谱。根据欧拉公式,可得

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_{km} \left(\frac{e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}}{2} \right) + B_{km} \left(\frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2j} \right) \right] \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_{km} - jB_{km}}{2} e^{jk\omega t} + \frac{A_{km} + jB_{km}}{2} e^{-jk\omega t} \right] \\ &= \dot{F}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{F}_{km} e^{jk\omega t} + \dot{F}_{km}^* e^{-jk\omega t}) \end{aligned} \quad (11.17)$$

式中

$$\dot{F}_0 = A_0, \quad (11.18)$$

$$\dot{F}_{km} = \frac{1}{2} (A_{km} - jB_{km}) = F_{km} e^{-j\psi_k}, \quad (11.19)$$

$$\dot{F}_{km}^* = \frac{1}{2} (A_{km} + jB_{km}) = F_{km} e^{j\psi_k}, \quad (11.20)$$

$$\psi_k = \text{tg}^{-1} \frac{B_{km}}{A_{km}} \circ \quad (11.21)$$

按*

$$A_{-km} = A_{km}, \quad B_{-km} = -B_{km},$$

所以有

$$A_{-km} - jB_{-km} = A_{km} + jB_{km},$$

即

$$\dot{F}_{-km} = \dot{F}_{km}^* \circ$$

于是,式 11.17 变为

$$\begin{aligned} f(t) &= \dot{F}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{F}_{km} e^{jk\omega t} + \dot{F}_{km}^* e^{-jk\omega t}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{F}_{km} e^{jk\omega t}, \end{aligned} \quad (11.22)$$

而

$$\begin{aligned} \dot{F}_{km} &= \frac{1}{2} (A_{km} - jB_{km}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) (\cos k\omega t - j \sin k\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \circ \end{aligned} \quad (11.23)$$

请注意,在上述二式中已包括了 \dot{F}_0 。

式 11.22 称为傅里叶级数的复数形式(指数形式), \dot{F}_{km} 称为该级数的复振幅。利用 \dot{F}_{km} 的模可以作出振幅频谱。利用 \dot{F}_{km} 的幅角可以作出相位频谱。由于此时频率展布在整个频率轴上,故作出的频谱对纵轴对称,而且振幅频谱的谱线仅为前边所讲的振幅频谱谱线的一半。因此,只有把纵轴两边互为镜像的两条谱线相加才能代表谐波振幅的大小。

* 在求 A_{km} 和 B_{km} 的公式中将 k 换成 $-k$, 便可证实。

例 11.6 有一宽度为 τ 的周期脉冲信号如图 11.8 所示, 试求其傅里叶级数的复数形式和振幅频谱。

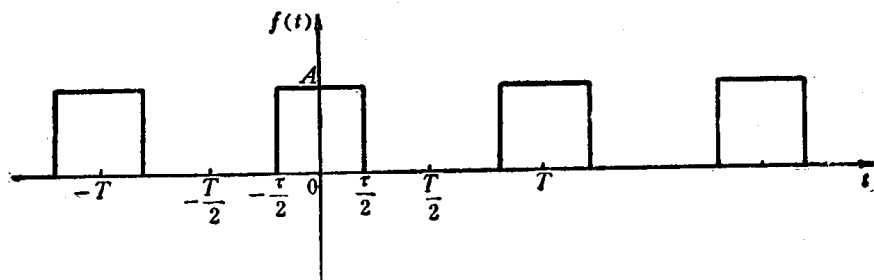


图 11.8 例 11.6 用图

解 由图所示的波形可知, 其在时域的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} < t < -\frac{\tau}{2}; \\ A, & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2}; \\ 0, & \frac{\tau}{2} < t < \frac{T}{2}. \end{cases}$$

将 $f(t)$ 代入式 11.23, 经积分得*

$$\begin{aligned} \dot{F}_{km} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{A}{-Tjk\omega} e^{-jk\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{k\pi} \left(\frac{e^{jk\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-jk\omega \frac{\tau}{2}}}{2j} \right) \\ &= \frac{A}{k\pi} \sin k\omega \frac{\tau}{2}. \end{aligned}$$

再根据式 11.22 有

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A}{k\pi} \left(\sin k\omega \frac{\tau}{2} \right) e^{jk\omega t},$$

从 \dot{F}_{km} 的表达式可看出它是实数, 因受限于 $\sin k\omega \frac{\tau}{2}$, 故有时取正值, 有时取负值。若再将 \dot{F}_{km} 写成

$$\dot{F}_{km} = \frac{A\tau}{T} \frac{\sin k\omega \frac{\tau}{2}}{k\omega \frac{\tau}{2}},$$

则 \dot{F}_{km} 的模

$$F_{km} = |\dot{F}_{km}| = \frac{A\tau}{T} \left| \frac{\sin k\omega \frac{\tau}{2}}{k\omega \frac{\tau}{2}} \right|.$$

所以根据上式可作出振幅频谱(如图 11.9a 所示)。

根据 \dot{F}_{km} 为正, 幅角为零, \dot{F}_{km} 为负, 幅角为 π , 故相位频谱如图 11.9b 所示。

* 为了适应本题所给出的波形, 这里将式 11.23 的积分上下限作了改变。

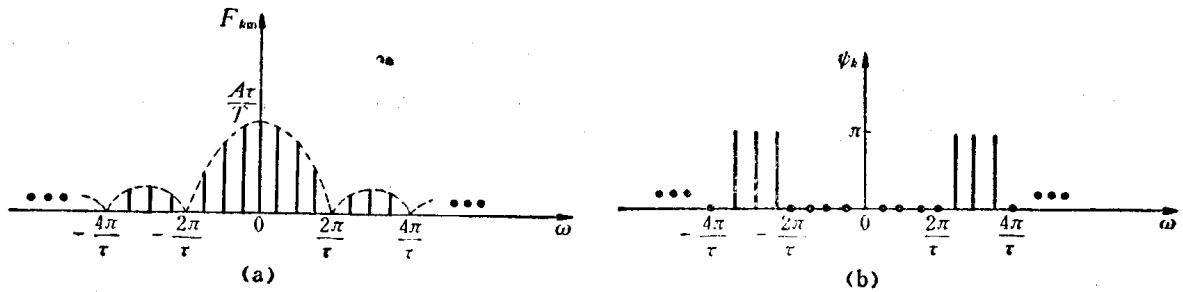


图 11.9 (a) 振幅频谱; (b) 相位频谱

最后指出:

1. 上面所讲的频谱都是离散的。从振幅频谱图上可以看出,频率越高,信号的周期越短,谱线越稀;反之则越密。由此推知,非周期信号(可视为周期 T 为 ∞ 的周期信号)的频谱必为连续谱。

2. 从变换的角度来看,非正弦周期信号展成复数形式的傅里叶级数也是一种变换,式 11.23 可看成是把连续周期时间函数变换为离散的复频谱函数,而式 11.22 则是前者的反变换——把复频谱函数变换为周期时间函数。

§ 11.3 非正弦周期信号的有效值、平均值

非正弦周期信号的有效值的定义同于正弦信号的有效值,即

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} .$$

其中 F 代表信号的有效值。若信号是电流,则有

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} .$$

按

$$\begin{aligned} i &= I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \phi_k) \\ &= i_0 + i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots, \end{aligned}$$

其中

$$i_k = I_{km} \sin(k\omega t + \phi_k) .$$

所以

$$i^2 = \sum_{k=0}^{\infty} i_k^2 + \sum_{\substack{q=0, s=0 \\ q \neq s}}^{\infty} 2 i_q i_s$$

和

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum i_k^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sum 2 i_q i_s dt \\ &= \sum \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt + \sum \frac{1}{T} \int_0^T 2 i_q i_s dt . \end{aligned}$$

根据正弦函数的正交性,上式的第二项中的积分为零,所以有

$$\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \sum \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots$$