通論 化学工学

杉山幸男監修

長坂克己・黒田正和・架谷昌信 共編

通論 化学工学

杉山幸男監修
長坂克己・黒田正和・架谷昌信 共編

共立出版株式会社

通論 化学工学

定価 2,700 円

検印省略

NDC 571

昭和 52 年 6 月 1 日　初版 1 刷発行

監修者　杉山幸男
編　者　長坂克己
　　　　黒田正和
　　　　架谷昌信
発行者　南條正男
東京都文京区小日向 4 丁目 6 番19号
印刷者　片岡義郎
東京都中央区新川 2 丁目 23 番 9 号

発行所　東京都文京区小日向 4 丁目 6 番19号
電話 東京 947 局 2511 番（代表）
郵便番号 112／振替東京 1-57035 番
共立出版株式会社

印刷・共立印刷　製本・金崎製本　Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会員

3058-810160-1371

序

高度経済成長下において，化学工業の著しい発展は化学工学におうところがきわめて大きかった。すなわち，化学工業の大量生産方式は化学工業を装置産業へと進展させ，大量生産方式の装置の開発，プランニング，それらの合理的操作条件の確立などが，化学工学の学問体系によって成果をおさめたからである。しかしながら，このような大量生産は必然的に物質・エネルギー資源の多量消費につながり，それらの有限性が問題となり，さらに，環境資源の保全が叫ばれるにいたった。

化学工業はいまや，新しい情勢に対応して前進する必要がある。化学工業に寄与し，人類の幸福に貢献せんとする技術者，研究者は省資源，省エネルギー，環境保全の命題のもとで化学工学の従来の学問体系をもう一度しっかりと見直す必要がある。敢えて，通論化学工学を編さんした意図もここにある。

昭和52年4月

編著者を代表して
杉 山 幸 男

目　　次

1章　化学工学計算の基礎

2章　移　動　現　象

3章　流　体　輸　送

4章　熱移動と相変化

5章　断熱ならびに熱交換

6章　熱・物質同時移動

7章　拡散分離

8章 機械的分離

9章 反応操作

10章 プロセス設計と制御

11章　エネルギー資源と熱発生

12章　資源と環境保全

1章　化学工学計算の基礎

本章では，本書で取り扱われる諸計算を理解するてだすけとなる基礎的事項について説明を行なう。化学工学の関与する範囲が比較的広いため，基礎的事項も多方面にわたるが，そのうち共通性の高いもののみを取り扱う。

1・1　単位と次元

工学計算を行なう場合，その計算に関係する諸量を数量的に正しく表わしておく必要がある。そのために，普通，各量ごとにある基準の大きさを定め，その量の大きさが基準の大きさの何倍に相当するかという形で表わす方法が用いられる。このとき，基準の大きさのことを，その量の単位という。

A.　基本単位と単位系

a.　基本単位・誘導単位と次元　一般に，諸量の単位は，そのうちから4個の代表的な量を基本量として選び，その基本量の単位を独立に定めると，他の量の単位はこれら4個の基本量の単位の組み合わせとして誘導される。たとえば，物理学においては，長さ，時間，質量，温度の4量を基本量として選ぶが，これらの単位として，長さを [m]，時間を [sec]，質量を [kg]（温度についてはB節で述べる）と定めると，速度 [m/sec]，密度 [kg/m^3]，力 [kg·m/sec^2] のように，他の量の単位は [m]，[sec]，[kg] などの独立に定めた基本量の単位の組み合わせによって表わすことができる。代表となる4個の基本量の単位を基本単位と呼び，基本単位の組み合わせとして誘導される一般量の単位を誘導単位という。また，別に長さをL，時間をΘ，質量をM，温度をTというように，基本単位をそれぞれ記号で表わせば，誘導単位も，速度 $L\Theta^{-1}$，密度 ML^{-3}，力 $ML\Theta^{-2}$ というように記号化することができる。一般的に，諸量の単位を記号化すると，$L^{a_1}\Theta^{a_2}M^{a_3}T^{a_4}$（$a_1$～$a_4$ は整数）で示されるが，このときこれを次元という（厳密には，べき数 a_1～a_4 を次元といい，$L^{a_1}\Theta^{a_2}M^{a_3}T^{a_4}$ のことを次元式という）。次元は諸量の単位と基本単位との間

の関係を一般形として表わしたものであるということができる。

b.　各量の単位・次元の決定法　4個の基本単位以外の各量の単位，すなわち誘導単位ならびにその次元は，通常，その量の定義に基づいて決定される。たとえば速度は，物体が単位時間あたりに移動する距離と定義されるので，その次元は $L\Theta^{-1}$，また密度は物体の単位体積あたりの質量であるから，その次元は ML^{-3} で表わせる。

≪例題 1·1≫　力の次元が $ML\Theta^{-2}$ であることを求めよ。

≪解≫　ニュートンの法則によって，力 f は，質量 m の物体に加速度 α を与えるに必要な量 $f=m\alpha$ と定義される。したがって，その次元 $[f]$ は質量および加速度の次元 $[m]=M$，$[\alpha]=L\Theta^{-2}$ を用いて，$[f]=[m][\alpha]=ML\Theta^{-2}$ と求められる。

≪例題 1·2≫　流体の粘度 μ は，ニュートンの摩擦の法則 $\tau=-\mu(du/dy)$（τ：剪断応力，u：流体速度，y：流れに垂直な方向の距離）によって定義される量である。粘度の次元 $[\mu]$ を求めよ。

≪解≫　ニュートンの摩擦の法則を次元式で書くと，$[\tau]=[\mu]\{[u]/[y]\}$ となる。ここで，τ, u, y の次元は，それぞれ $[\tau]=ML^{-1}\Theta^{-2}$，$[u]=L\Theta^{-1}$，$[y]=L$ であるので，これらを上式に代入して整理すると

$$[\mu]=[\tau][y]/[u]=(ML^{-1}\Theta^{-2})L/(L\Theta^{-1})=ML^{-1}\Theta^{-1}$$

のように粘度の次元が求められる。

以上のように次元が決定されると，その単位は，L＝[kg]，Θ＝[sec]，M＝[kg] のように，L，Θ，M，T に具体的な基本単位を代入して求める。たとえば粘度を例にとると，[kg/m・sec] のように決められる。

c.　単位系　単位系を構成するためには，最低4個の基本量の単位を基本単位として独立に定める必要があるが，何を基本量として選ぶかはかならずしも固定されたものではなく，また基本量の数も4個以上であればいくらでもよい。しかし，単位はあくまでも諸量を数量的に取り扱うために設けられた約束であるので，煩雑さをさけるためには，できるだけこれを整理，統合しておくことが望ましい。現在，一般に通用している単位系としては，絶対単位系，重力単位系，工学単位系，国際単位系の4通りがあるが，このうち化学工学においては，工学単位系が最も普通に用いられている。

1)　絶対単位系：長さ L，時間 Θ，質量 M，温度 T の4個を基本単位として構成された単位系を絶対単位系という。さきに説明したように，この単位系は物理学の分野において最もよく使用されている。絶対単位系は，また，個々の基本量の具体的な単位に何を

選ぶかによって，次の二つのグループに大別される。

メートル制単位：　L; m, cm　Θ; hr, sec　M; kg, g　T; °C, °K

英国制(絶対)単位：　L; ft, in　Θ; hr, sec　M; lb　T; °F, °R

なお，メートル制単位のうち，[m]，[kg]，[sec] を使用するのを MKS 系，[cm]，[g]，[sec] を使用するのを CGS 系と呼ぶ。

2) 重力単位系：質量 M のかわりに重力 F を基本量に選び，L, Θ, F, T の4個を基本単位として使用する単位系を重力単位系という。重力単位系は，質量を地球上で普通に測定すると，質量は，いったん重力として測定されたのち質量に換算されるので，はじめから重力を基本量としておいた方が便利であるとの考え方に基づいて使用されはじめたものであるが，特に機械工学のように，力そのものを研究の対象としている工学分野で多く用いられる。なお，絶対単位系においては力は $ML\Theta^{-2}$ の次元をもつ誘導量であるが，重力単位系においては，質量が $F\Theta^2L^{-1}$ の次元をもつ誘導量となる。

3) 工学単位系：化学工学の分野では，圧力，仕事などを重力単位系，密度，粘度などを絶対単位系で表わす慣例が強く残っており，一つの計算式の中で両単位系を同時に使用することが多い。このように，L, Θ, M, F, T の5個を基本単位とし，M と F とを混在して使用する単位系を工学単位系という。また，加熱・冷却，相変化，化学反応など，工学計算に熱が関与するときには，多くの場合，L, Θ, M（または F），T のほかに熱量 H を加えた5個（または6個）の基本単位を使用する。このように工学単位系を使用したり，H を基本単位に加えたりするのは，その方が諸量の測定に関連して便利であったり，歴史上の慣例であったりすることに起因している。前述したように，M と F のどちらかを基本量とするとほかは誘導量として表わされ，また H はエネルギーの次元 $ML^2\Theta^{-2}$（または FL）をもつ誘導量である。そのため，これらの単位系を正しく運用するためには，のちに述べる重力換算係数，熱の仕事当量などの換算係数が必要となり，その点で不便であることを忘れてはならない。

上記のほかに，メートル制単位を基本単位とし，いくつかの誘導単位に，力 newton（$=[\mathrm{kg \cdot m/sec^2}]$），仕事 joule（$=[\mathrm{kg \cdot m^2/sec^2}]$）などの固有名称を与え，これらを補助単位として単位系を構成する国際単位系もしばしば用いられる。

d. 重力換算係数　重力換算係数 g_c は，工学単位系を絶対単位系，または重力単位系のいずれかに統一するために使用される。ニュートンの法則によると，《例題 1·1》に示すように物体に働く力 f は，

$$f = m\alpha \tag{1·1}$$

で表わされる。式 (1·1) を計算するときに，絶対単位系または重力単位系を使用する場合には両辺の次元が等しいので問題はないが，工学単位系を使用する場合，そのままでは，左辺 F，右辺 $ML\Theta^{-2}$ と両辺の次元が等しくならないので正しい計算を行なうことができない。しかし，重力の単位 [Kg]，[Lb] などと，絶対単位系の力 [kg·m/sec²]，[lb·ft/sec²] などとの間には，1 Kg＝9.807 kg·m/sec²，1 Lb＝32.16 lb·ft/sec² などの関係があるため，$MLF^{-1}\Theta^{-2}$ の次元をもった次元定数 g_c（重力換算係数）として

$$g_c = 9.807\ \mathrm{kg \cdot m/Kg \cdot sec^2}\ （メートル制単位）$$

$$= 32.16\ \mathrm{lb \cdot ft/Lb \cdot sec^2}\ （英国制単位） \tag{1·2}$$

と与えれば，これを用いて式 (1·1) を

$$f g_c = m\alpha \quad または \quad f = m\alpha / g_c \tag{1·3}$$

のように書き換えられ，式 (1·3) は，工学単位系を使用したとき，両辺の次元が等しい式となる。このことを一般に拡張すると次のことがいえる。

すなわち，工学単位系において，重力 F を含む誘導量に g_c をかけると絶対単位系に，また質量 M を含む誘導量を g_c で割れば重力単位系に，工学単位系をそれぞれ換算統一することができる。なお，単位質量に働く重力は，重力加速度 g が地球上の各地域によって値を異にする分だけ地域差をもつが，工学計算では，g/g_c＝1.0 Kg/kg（＝1.0 Lb/lb）と取り扱ってさしつかえない。

e. 熱の仕事当量　摩擦，圧縮・膨張などの現象が比較的急激に起こるときのエネルギー変化を計算する場合，仕事などの機械的エネルギーと，温度変化に伴う熱エネルギー相互間の変化量を計算する必要がある。このように，仕事と熱とを同時に取り扱うような計算を行なう場合，仕事には $ML^2\Theta^{-2}$（または FL），熱には H が次元として使用されるので，d 項で述べたように，このままでは正しい計算を行なうことができない。

したがって，この場合，$ML^2H^{-1}\Theta^{-2}$（または FLH^{-1}）の次元をもつ換算係数が必要となるため，熱の仕事当量 J として

$$J = 4.184\ \mathrm{kg \cdot m/cal \cdot sec^2}\ (= \mathrm{joule/cal})$$

$$= 426.9\ \mathrm{Kg \cdot m/kcal} \tag{1·4}$$

を定め，これを用いて，熱に J をかけて仕事に換算するか，または仕事を J で割って熱に換算するかして，いずれかに単位を統一する。

B. おもな量の単位

a. 温　度　温度の単位には，大気圧下における純水の氷点を0度，沸点を100度とする摂氏温度 t_C[°C] と，氷点を 32 度，沸点を 212 度とする華氏温度 t_F[°F] とがあり，t_C と t_F には次の関係がある。

$$t_F[°F]=1.8t_C[°C]+32 \tag{1·5}$$

また，絶対0度を基準とする絶対温度（熱力学温度）にも，同じく [°C] に対応したケルビン温度 T_K[°K](=[°C]+273.2) と，[°F] に対応したランキン温度 T_R[°R](=[°F]+459.7) とがあり，T_K と T_R の間には

$$T_R[°R]=1.8T_K[°K] \tag{1·5'}$$

の関係がある。t_C, T_K はメートル制単位，t_F, T_R は英国制単位の基本単位としてそれぞれ使用される。なお，比熱，熱伝導度など，温度差に基づいて定義された量を扱うときは

$$\Delta t_F[F]=1.8\Delta t_C[C],\quad \Delta T_R[R]=1.8\Delta T_K[K] \tag{1·5''}$$

を用いて計算を行なう。

b. 圧　力　圧力（単位面積に働く力）の単位には，絶対単位系では [dyne/cm²] (=[g/cm·sec²]) または [poundal/ft²](=[lb/ft·sec²])，工学単位系では [Kg/m²]，[Kg/cm²] または [Lb/ft²]，[psi](=[Lb/in²]) がよく用いられる。また，このほかに atm（気圧），mmHg，mmH_2O，bar（=10^6 dyne/cm²）など，いろいろの単位が広く使用されている。いま密度 ρ[kg/m³] の液体の柱を考え，この液柱の底面の単位面積あたりにかかる重力と釣合う圧力を p[Kg/m²] とすると，p と液柱の鉛直方向の高さ h[m] との間には，

$$p=(g/g_c)\rho h \tag{1·6}$$

の関係がある。上述した mmHg，mmH_2O は，式 (1·6) を用いて，0°C の水銀柱，15°C の水柱*の高さ [mm] に，それぞれ圧力を換算して表わしたものである。

以上のように，圧力にはいろいろの慣用単位があるので，その取り扱いには十分注意する必要があるが，そのうちおもな単位間の数値的関係を示すと，

$$1\ \text{atm}=1.013\ \text{bar}=1.033\ \text{Kg/cm}^2=14.70\ \text{psi}=760\ \text{mmHg}=10.34\ \text{mH}_2\text{O}$$

となる。また，圧力の表わし方には，絶対真空を基準とする絶対圧力，大気圧を基準とするゲージ圧力の二つの方法があり，両者には

* 4°C を用いることもある。

絶対圧力＝ゲージ圧力＋大気圧

の関係がある。さらに，真空に近い減圧状態に対しては，**真空度**（＝大気圧－絶対圧力）という表わし方が用いられることが多い。この場合，真空度の単位には，普通，mmHg (Torr ともいう) が用いられる。

c. エネルギー　1) **熱量**：熱量の単位として，メートル制単位では [kcal] または [cal]，英国制単位では [Btu]* が多く用いられる。1 kcal（または 1 cal）は，1 kg（または 1 g）の純水を大気圧下で 14.5°C から 15.5°C まで 1°C 温度を上昇させるのに必要な熱量，また 1 Btu は，1 lb の純水を大気圧下で 60.5°F から 61.5°F まで 1°F 温度を上昇させるのに必要な熱量をいう。なお，1 kcal(＝10^3 cal) は 3.968 Btu に相当する。

2) **仕事量**：仕事量の単位として，絶対単位系では [joule](＝[newton·m]＝[kg·m^2/sec^2])，[erg](＝10^{-7} joule＝[dyne·cm]＝[g·cm^2/sec^2]) または [lb·ft^2/sec^2] など，工学単位系では [Kg·m] または [Lb·ft] などが最も多く使用される。なお，1 joule は 0.1020 Kg·m に相当する。このほかに，動力の単位を用いて kWh，PSh（kW，PS については次の d 項参照）などを用いることもある。

d. 動　力　動力（工率または仕事率ともいう）の単位として最も多く使用されているのは，絶対単位系では W(＝[joule/sec]＝[kg·m^2/sec^3])，kW(＝10^3W)，工学単位系では [Kg·m/sec]，[Lb·ft/sec] などである。また，慣用単位としてメートル制馬力 PS，英国制馬力 HP なども使用される。なお，これらの諸単位間には，次の数値的関係がある。

1 kW＝102.0 Kg·m/sec＝860.4 kcal/hr

1 PS＝75 Kg·m/sec＝0.7355 kW

1 HP＝550 Lb·ft/sec＝1.014 PS

e. 比熱・顕熱　ある物質の単位量を 1°C または 1°F 温度を上昇させるのに必要な熱量を**比熱** C_p といい，固体・液体では [kcal/kg·C]，[Btu/lb·F]，また，気体ではこのほかに [kcal/N m^3·C]，[Btu/scf**F](N m^3, scf は標準状態における体積) などが単位として用いられる。また，ある物質の単位量を基準温度 t_0（多くは 0°C または室温）から任意温度 t まで，単純に温度変化させるのに必要な熱量をその物質の保有する**顕熱** i といい，

$$i=\int_{t_0}^{t} C_p\,dt = C_{p_{av}}(t-t_0) \tag{1·7}$$

* British thermal unit の略.

** Standard cubic feet の略.

で表わされる。ただし，C_{pa} はその物質の t_0～t 間の平均比熱。顕熱のほかに，物質に付随した熱の形態として，相変化に伴う潜熱，化学反応に伴う反応熱，溶解，希釈，湿潤などに伴う混合熱などがあるが，これらの各量はいずれも [kcal/kg] または [kcal/Nm^3] の単位をもつ。

f. その他の諸量　a～e 項で説明した諸量を含めて，化学工学計算で使用されるおもな量の単位と次元を，巻末付表2にまとめた。

C. 単位の換算

いままで述べてきたように，単位にはいろいろの単位制，単位系があるため，それらを相互に換算したり，単位を統一したりする必要がしばしば生じてくる。

a. 完全方程式の単位換算　ある現象を，その現象に関係する諸量を用いて理論的に数式化した場合，得られた数式が理論的に正当なものであれば，式の両辺を構成する各項の次元がすべて等しくなければならない。この原則を次元一致の原則，または同次性の原理といい，この原則を満たす数式を，次元的に健全な完全方程式という。完全方程式は，統一単位を用いさえすれば，いずれの単位制，単位系によってもそのままで正しい計算を行なうことができる。完全方程式を単位換算する場合，式中に含まれる各量の単位を巻末付表4に示した各量ごとの単位換算表，重力換算係数，熱の仕事当量などの各換算係数を利用して，それぞれの量ごとに個別に指定された単位制・単位系に換算し，統一してやればよい。なお，各量の単位換算は，基本単位の単位換算率がわかっていれば，次の例題のようにして求めることができる。

《例題 1·3》　ある空気冷却器の総括伝熱係数が 3.50 Btu/ft^2·hr·F であるという。これを [kcal/m^2·hr·C] の単位に換算せよ。

《解》　1 Btu＝0.252 kcal，1 ft＝0.3048 m，1 F＝(5/9) C（温度差）　∴ 1 Btu/ft^2·hr·F＝(1)(0.252 kcal)/{(0.3048 m)^2(1 hr)(0.5556 C)}＝4.882 kcal/m^2·hr·C

∴ 3.50 Btu/ft^2·hr·F＝(3.50)(4.882 kcal/m^2·hr·C)＝17.1 kcal/m^2·hr·C

《例題 1·4》　68.4°F における水の粘度は 6.72×10^{-4} lb/ft·sec である。これを [Kg sec/m^2] に単位を換算せよ。

《解》　1 lb＝0.4536 kg，1 ft＝0.3048 m

∴ 1 lb/ft·sec＝(1)(0.4536 kg)/{(0.3048m)(1 sec)}＝1.488 kg/m·sec

∴ 6.72×10^{-4} lb/ft·sec＝(6.72×10^{-4})(1.488 kg/m·sec)＝0.001 kg/m·sec

これを [Kg·sec/m²] に換算するためには，g_c で割ればよい。

$$6.72\times10^{-4}\,\mathrm{lb/ft\cdot sec}=(0.001\,\mathrm{kg/m\cdot sec})/(9.81\,\mathrm{Kg\cdot m/kg\cdot sec^2})$$
$$=1.02\times10^{-4}\,\mathrm{Kg\cdot sec/m^2}。$$

b.　不完全方程式の単位換算　工学計算では，ある系とか，ある範囲で成立する簡易式や実験式がしばしば用いられている。このような簡易式や実験式は，次元的に健全ではない不完全方程式であることが多い。このため，不完全方程式の単位換算は，完全方程式の場合に比べて間違いやすいので注意を要するが，一般に次の手順で行なわれる。

① 式中に含まれる各量について，もとの単位で表わした場合と新しく換算したい単位で表わした場合との量的関係を，それぞれの単位換算率に基づいて数式化しておく。

② ①で得られた各数式をもとの式に代入し，整理する。

≪例題 1·5≫　1 atm の飽和水蒸気が垂直に立った冷却壁に触れて冷却されるときの熱伝達係数 h は，$h=4\,000\,L^{-1/4}\Delta t^{-1/3}$ の簡易式によって計算される。ただし，h は [Btu/ft²·hr·F]，L は冷却壁の長さ [ft]，Δt は水蒸気と冷却壁面間の温度差 [F]。この式を，h に h'[kcal/m²·hr·C]，L に L'[m]，Δt に $\Delta t'$[C] を用いた式に書き換えよ。

≪解≫　1 kcal/m²·hr·C＝0.2048 Btu/ft²·hr·F，1 m＝3.281 ft，1 C＝1.8 F。

$\therefore$ $h=0.2048\,h'$，$L=3.281\,L'$，$\Delta t=1.8\Delta t'$。この関係をもとの式に代入すると $0.2048h'=4000(3.281L')^{-1/4}(1.8\Delta t')^{-1/3}$ となり，これを整理すると求める式が得られる。

$$h'=\frac{4000}{(0.2048)(3.281)^{1/4}(1.8)^{1/3}}L'^{-1/4}\Delta t'^{-1/3}=1.193\times10^4L'^{-1/4}\Delta t'^{-1/3}$$

D.　次元解析と無次元項

工学上起こる諸現象には，多数の物理量が影響因子として複雑にからみあっている場合が多い。そのため，これを基礎的な諸法則に基づいて理論解析することが困難であったり，かえって不正確であったりする場合が少なくない。このような場合，影響因子となる物理量相互間の関係をある程度予測し，あとを実験で補うことによって，適用性の広い実験式を作成することができれば，工学上かえって好都合なことも多い。この目的のために，通常，最も簡便な方法として次元解析が用いられる。

いま，問題となっている現象を $\varphi_1\sim\varphi_n$ の n 個の物理量の関数として

$$f(\varphi_1,\varphi_2,\cdots\cdots,\varphi_n)=0 \tag{1·8}$$

で表わすとする。式（1·8）に1·1節C項のaで説明した次元一致の原則（同次性の原理）を適用し，《例題 1·6》で述べるような手順に基づいて，各次元間の関係を整理すると，式（1·8）は，$\Pi_1 \sim \Pi_l$ の l 個の無次元項を用いて

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \cdots\cdots, \Pi_l)=0 \qquad (1\cdot9)$$

のように書き換えられる。このとき，無次元項の個数 l は，関与する物理量の個数 n から使用した基本単位の個数 m を差し引いた，$(n-m)$ 個に等しい数となる。このことを Π 定理という。Π 定理に基づけば，次元解析の結果，$\varphi_1 \sim \varphi_n$，n 個の関係が $\Pi_1 \sim \Pi_l$，l 個の関係に簡略化され，そのため実験式の作成にあたって必要な実験の回数を著しく減少できることになる。また，後章で述べるように，$\Pi_1 \sim \Pi_l$ の無次元項はそれぞれ明確な物理的意味をもっているため，得られた実験式を理論と対比する場合にも，次元解析を活用することができる。

《例題 1·6》 直径 d の円管内を密度 ρ，粘度 μ の流体が速度 u で流れている。このとき，流体摩擦によって生ずる管単位長さあたりの圧力損失 $\Delta p/l$（l：管長）を表わす無次元式を，次元解析によって求めよ。

《解》 管長が十分長く，管壁面が平滑な場合，$\Delta p/l$ は，u，ρ，μ，d，g_c* の5個の因子の関数として定められ，次式が成立する。

$$f(\Delta p/l,\ u,\ \rho,\ \mu,\ d,\ g_c)=0 \qquad (1)$$

〔解法 1〕 この場合，$n=6$，$m=4$（L，Θ，M，F）であるので，Π 定理によれば，$l=6-4=2$ となり，式（1）は2個の無次元項 Π_1，Π_2 の関数として置き換えられるはずである。そこで，いま $\Delta p/l$，μ の2個を代表量として選定し（何を代表量とするかは，一般には自由であるが，代表量の選定によって得られる無次元項の形が違うので，理論的補足があれば，それを参考にする），$\Pi_1=(\Delta p/l)/(u^{a_1}\rho^{a_2}d^{a_3}g_c^{a_4})$，$\Pi_2=\mu/(u^{a_5}\rho^{a_6}d^{a_7}g_c^{a_8})$ と表わすとする。これを次元式に書き換えると，次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&(\mathrm{FL}^{-3})/\{(\mathrm{L}\Theta^{-1})^{a_1}(\mathrm{ML}^{-3})^{a_2}(\mathrm{L})^{a_3}(\mathrm{MLF}^{-1}\Theta^{-2})^{a_4}\}=0\\&(\mathrm{ML}^{-1}\Theta^{-1})/\{(\mathrm{L}\Theta^{-1})^{a_5}(\mathrm{ML}^{-3})^{a_6}(\mathrm{L})^{a_7}(\mathrm{MLF}^{-1}\Theta^{-2})^{a_8}\}=0\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

式（2）が成立するためには，L，Θ，M，F のおのおのについて，そのべき数が左右両辺で等しくならなければならない。すなわち

L に関して，　$-3-a_1+3a_2-a_3-a_4=0,\qquad -1-a_5+3a_6-a_7-a_8=0$

Θ に関して，　$a_1+2a_4=0,\qquad -1+a_5+2a_8=0$

Mに関して，　$-a_2-a_4=0,\qquad 1-a_6-a_8=0$

* 工学単位系に次元解析を適用する場合，g_c を影響因子に加える。同様に，熱量を基本単位に用いる場合には，J を影響因子に加える。