国际数学竞赛题解

1-20

陕西科学技术出版社

国际数学竞赛题解

〔德〕H·D·霍恩舒赫　编

潘振亚　刘季宗
徐启华　张鸿刚　译

游兆永
葛人溥　欧斐君　审校

陕西科学技术出版社

国际数学竞赛题解

〔德〕H·D·霍恩舒赫 编

潘振亚 刘季宗
徐启华 张鸿刚 译

游兆永
葛人溥 欧斐君 审校

陕西科学技术出版社出版
（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行 西安新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 7.375 字数 155,000

1981年2月第1版 1981年2月第1次印刷

印数 1—53,500

统一书号：7202·6 定价：0.53元

译 者 的 话

每年一次的国际数学竞赛，于1959年在罗马尼亚首次举行。最初参加的国家只有七个，现在已增加到二十几个。竞赛地点及试题由参加国协商决定。竞赛一般在每年七月进行。竞赛者为在校中学生（每国派出 8 人），每次竞赛有 6 题，用两个上午共 8 小时答完，按总分决定名次。

本书译自[德] H·D·霍恩舒赫编的德意志联邦共和国慕尼黑曼茨(Manz)公司1977 年出版的《国际数学竞赛题解》(Internationale Mathematik-Olympiaden)。书中收入了1—18 届（1959—1976 年）国际数学竞赛试题（题后国名为出题国）及全部题解；每题只给了一种解法，可供中等学校的师生或数学爱好者参考。

原书试题与题解分开，为便于读者学习，译时我们把它合在一起了。对原文中的一些错误，作了订正；个别地方作了小的增删。同时，我们还补充了 19—21 届的试题及题解（19—20届选自航空专业教材编写组编写的《1978年八省市数学竞赛资料汇编》，第21届选自1980年《数学通报》第七期）。1 —10届由潘振亚、刘季宗翻译，11—18届由徐启华、张鸿刚翻译。

本书在翻译过程中，西北工业大学汤文及教授、孙家永副教授；西北电讯工程学院陈开周副教授、胡三立讲师对译稿提出了宝贵意见，在此表示感谢。由于译者水平有限，难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

目　录

第一届国际数学竞赛试题及题解

1959年于罗马尼亚

试题1 （波兰）

求证： 对于任意自然数n，分数$\frac{21n+4}{14n+3}$都不可约。

证明：

因为n是任意自然数，所以可将题给的假分数化为真分数与1的和

$$\frac{21n+4}{14n+3}=1+\frac{7n+1}{14n+3}.$$

如果题给的分数可约，则此真分数也可约，它的倒数$\frac{14n+3}{7n+1}$也可约。

但是，$\frac{14n+3}{7n+1}=2+\frac{1}{7n+1}$，

由于$\frac{1}{7n+1}$不可约，所以其它几个分数同样不可约。可知$\frac{21n+4}{14n+3}$也不可约。

试题 2 (罗马尼亚)

x 是何实数时，方程

(1) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$,

(2) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$,

(3) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$

成立？这里的平方根取非负值。

解：

当 $x\geqslant\frac{1}{2}$时，

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sqrt{2x-1}+1\right|,$$

$$\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sqrt{2x-1}-1\right|,$$

因为等式两边平方相等，又所有的平方根须取非负值。

对于 $x\geqslant\frac{1}{2}$，下列函数成立：

$$y=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\sqrt{2x-1}+1\right|+\left|\sqrt{2x-1}-1\right|\right).$$

下面讨论$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 和 $1<x<\infty$这两种情况。

第一种情况：

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\sqrt{2x-1}+1\right)+\left(1-\sqrt{2x-1}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

第二种情况：

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sqrt{2x-1}+1)+(\sqrt{2x-1}-1)]$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}.$$

综合得

$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$时，$y=\sqrt{2}$，

$1<x<\infty$时，$y=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}$。

本题的解为：

（1）$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=\sqrt{2}$。

（2）无论 x 是什么值都不能满足 $y=1$，因为函数 y 的最小值是$\sqrt{2}$。

（3）$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2x-1}=2$， 即 $x=\frac{3}{2}$时，$y=2$。

试题 3 （匈牙利）

已知：x 是一角度（实数），a、b、c 是任意实数；实数 cosx 满足二次方程

$$a\cdot\cos^2x+b\cdot\cos x+c=0.$$

求作：cos2x 所满足的二次方程。

在$a=4$，$b=2$，$c=-1$ 的情况下，比较这两个方程式。

解：

将题给的方程写成

$$a\cdot\cos^2x+c=-b\cdot\cos x. \qquad ①$$

将①式平方，乘以4，可得

$$a^2\cdot4\cos^4x+(4ac-2b^2)\cdot2\cos^2x+4c^2=0. \qquad ②$$

显然，a、b、c、cosx 也满足此方程。

因为 $2\cos^2x=\cos2x+1,$ ③

将③式代入②式得

$$a^2(\cos2x+1)^2+(4ac-2b^2)(\cos2x+1)+4c^2=0.$$

整理，得

$$a^2\cos^22x+(2a^2+4ac-2b^2)\cos2x+(a^2+4ac-2b^2+4c^2)=0.$$

此式显然是 cos2x 的二次方程。

在$a=4$，$b=2$，$c=-1$时，

$a^2=16$，$2a^2+4ac-2b^2=8$，$a^2+4ac-2b^2+4c^2=-4$，

所以 cos2x 的方程为

$$4\cos^22x+2\cos2x-1=0.$$

此 cos2x 的方程与 cosx 的方程的系数相同。

试题 4 （匈牙利）

已知斜边 c，求作一直角三角形，使斜边上的中线为两直角边的等比中项。

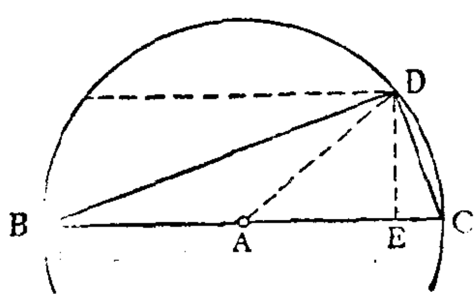

图 1

作图：

取 BC 等于c，以 BC 的中点A为圆心，$\frac{c}{2}$ 为半径作圆。

在距 $\overline{BC}$ 为$\frac{c}{4}$处作 BC 的平

行线，交圆于D。连接B、D和C、D，则△BCD就是所求的直角三角形。

证明：

$$\overline{BD}\cdot\overline{DC}=2S_{\triangle BCD}=4S_{\triangle ACD}=\frac{4\cdot\overline{AC}\cdot\overline{DE}}{2}=\frac{c^2}{4},$$

因为$\overline{AC}=\frac{c}{2}$，$\overline{DE}=\frac{c}{4}$。

而$\overline{AD}$也等于$\frac{c}{2}$，即$\overline{AD}^2=\frac{c^2}{4}=\overline{BD}\cdot\overline{DC}$。又$\angle BDC$是直角，所以△BCD就是所求的直角三角形。

试题5　（罗马尼亚）

已知线段AB内有一点M，在AB的同侧分别以AM和MB为边，作正方形AMCD和MBEF，圆P和圆Q分别是两正方形的外接圆，它们交于M、N两点。过A、F两点和过B、C两点的直线交于点N′。

（1）求证：N和N′两点重合。

（2）求证：无论M点取在何处，直线MN必定通过一个定点。

（3）如果M在A、B间移动，求线段PQ中点的轨迹。

解：

取直角坐标XAY，使A、B、M点的坐标分别为(o,o)，(a,o)，(m,o)。

可知：

（1）P、Q的坐标分别为$\left(\frac{m}{2},\ \frac{m}{2}\right)$、$\left(\frac{a+m}{2},\right.$

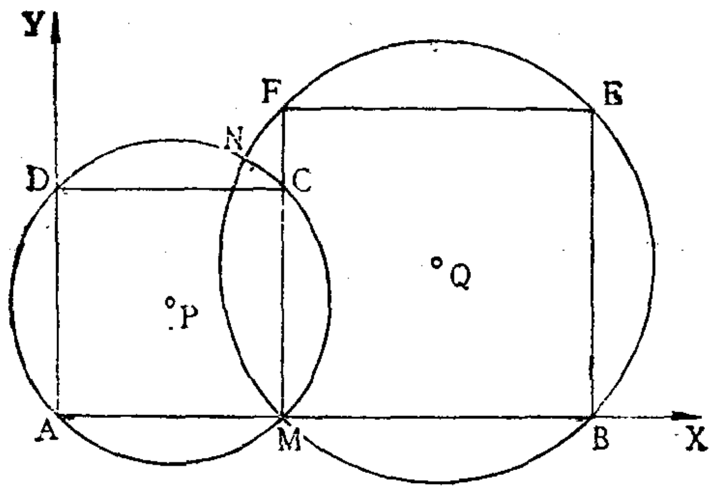

图 2

$\left.\frac{a-m}{2}\right)$，因此P圆的方程是

$$\left(x-\frac{m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{m}{2}\right)^2=\frac{1}{2}m^2，即$$

$$x^2-mx+y^2-my=0, \quad ①$$

Q圆的方程是

$$\left(x-\frac{a+m}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a-m}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(a-m)^2，即$$

$$x^2-(a+m)x+y^2-(a-m)y+am=0. \quad ②$$

①式减②式，得

$$ax+(a-2m)y-am=0. \quad ③$$

M、N点的坐标满足①和②式，同样也满足③式。将③式化为x的表达式，代入①式，且乘以a^2，得

$$(2a^2-4am+4m^2)y^2-2am(a-m)y=0.$$

其二根为

$$y_1=0, \quad ④$$

$$y_2=\frac{am(a-m)}{a^2-2am+2m^2}.\qquad ⑤$$

将 y_1，y_2 代入③式，得

$x_1=m$,

$$x_2=\frac{am^2}{a^2-2am+2m^2}.$$

这样，M点可表示为(x_1,y_1)，N点可表示为(x_2,y_2).

显然，N点的坐标满足方程

$(a-m)x-my=0$,

而这个方程就是过A和F两点的直线的方程.

过$B(a,o)$和$C(m,m)$两点的直线的方程是

$mx+(a-m)y-am=0$,

N点坐标显然满足此方程，所以过A和F两点以及过B和C两点的两直线相交于$N'=N$.

（2）因为点M和点N的坐标满足方程③，所以它表示过M和N两点的直线. 将这个方程写为

$a(x+y)=m(2y+a)$,

显然，点 $(x,y)=\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2}\right)$满足这个直线方程，而与m无关. 即这个点为所有直线MN的公共点.

（3）因为P点坐标是$\left(\frac{m}{2},\ \frac{m}{2}\right)$，Q点坐标是$\left(\frac{a+m}{2},\ \frac{a-m}{2}\right)$，所以线段PQ中点的坐标是$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{a+m}{2}\right)$,

$\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{a-m}{2}\right)$；

即 $(x,y)=\left(\frac{a+2m}{4},\ \frac{a}{4}\right)$.

如果 $o<m<a$，则 PQ 中点在点 $\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{3a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$ 之间的线段上移动。

这条线段平行于AB，与AB的距离是 $\frac{a}{4}$，长度是 $\frac{a}{2}$.

试题 6　（捷克斯洛伐克）

已知平面 P 与 Q 相交于直线 p，平面P 内有一点A，平面Q内有一点C，这两个点都不在直线 p 上。

求作一个含内切圆的等腰梯形 ABCD（AB ∥ CD），使 B 点在平面 P 内，D 点在平面 Q 内。

解：

仅当 A、C 满足一定条件时，本题才有解。

梯形 ABCD 及其内切圆在平面 R 内。因为 AB 平行于 CD，而且这两条直线也平行于直线 p，所以 R 平面也平行于 p。R 平面内平行于 p 的直线 p′ 决定了 AB 和 CD 的方向。如果直线 p′ 通过A点，则B点也在p′ 上。D 点必在通过C点、且与 p′ 平行的直线上。

作图：

作直线 g，其上取一点 A。另作直线 h 与 g 平行，且与 g 的距离为 AE，并在直线 h 上取一点 C。作有内切圆的梯

形ABCD，使B在g上，D在h上。

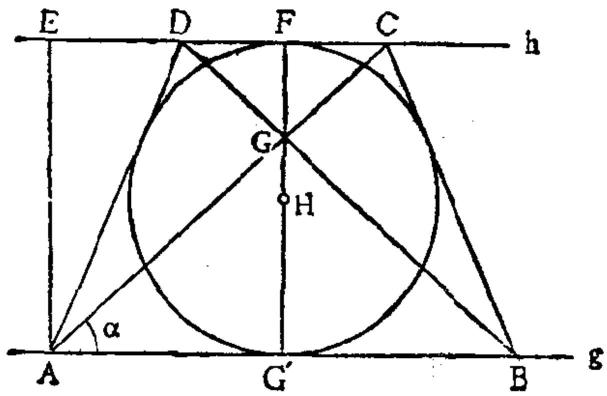

图 3

自A作垂线AE交h于E，以A为圆心，EC为半径作圆交直线h于D。将DC二等分，得F。自F作垂线FG′交g于G′，与AC的交点是G。连接D、G并延长之，交g于B。以G′F的中点H为圆心，$\frac{AE}{2}$为半径所作的圆即为梯形ABCD的内切圆。

证明：

根据圆外切四边形定理，只需证明其对边之和相等即可。

$$因为 2\overline{AD} = 2\overline{EC} = 2\overline{EF} + 2\overline{FC} = 2\overline{AG'} + 2\overline{DF} = \overline{AB} + \overline{DC},$$

所以梯形ABCD为H圆的外切四边形。

由图可知，仅在$\alpha \leqslant 45°$时，本题有解。

第二届国际数学竞赛试题及题解

1960年于罗马尼亚

试题 1　（保加利亚）

有3位数，除以11所得的商等于原3位数各数字的平方和。

求所有这种3位数。

解：

如果一个n位数各位数字之和 $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$ 或等于零，或可被11整除，则这个n位数

$$z = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

能被11整除。

可以写成 $z = 100a + 10b + c$（a、b、c是各位的数字）且能被11整除的3位数，必然满足 $c - b + a$ 等于零或可被11整除的条件。即

$$a - b + c = 0 \qquad ①$$

或 $$a - b + c = 11, \qquad ②$$

其它情况，例如：$a - b + c = 22$，是不可能出现的，因为 $a - b + c$ 必大于或等于 -9，而且最大可以等于 $+18$。

所求数的各位数字必须满足的方程是

$$100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2)。 \qquad ③$$

情况1：

从①式得 $b=a+c$，代入③式得

$100a+10a+10c+c=11(2a^2+2ac+2c^2)$，

从而得 $10a+c=2(a^2+ac+c^2)$。 ④

$10a+c$ 必是偶数，c 也必是偶数。

$$a^2+(c-5)a+c^2-\frac{c}{2}=0, \quad ⑤$$

$$a=-\frac{c-5}{2}\pm\sqrt{\frac{c^2-10c+25}{4}+\frac{c}{2}-c^2}$$

$$=\frac{5-c}{2}\pm\sqrt{\frac{-3c^2-8c+25}{4}}$$

$$=\frac{5-c}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{25-8c-3c^2}.$$

需要讨论下列各种情况：

$c=0$，$c=2$，$c=4$，$c=6$，$c=8$。

$c=0$ 时，$a=\frac{5}{2}\pm\frac{5}{2}$，

$a_1=5$，

$a_2=0$（不合题意）。

$c\geqslant 2$ 时，根为虚数。

由 $a=5$ 和 $c=0$ 可得所求数是550。经验算，满足要求。

情况2：

自②式得 $b=a+c-11$，代入③式得

$100a+10a+10c-110+c=11[a^2+(a+c-11)^2+c^2]$，

从而得

$$10a+c=131+2(a^2+c^2+ac-11a-11c), \quad ⑥$$

式中 c 必为奇数。

$$a^2+(c-16)a+c^2+\frac{131}{2}-\frac{23c}{2}=0, \quad ⑦$$

$$a=-\frac{c-16}{2}\pm\sqrt{\frac{c^2-32c+256}{4}-\frac{131}{2}+\frac{23c}{2}-c^2}$$

$$=\frac{16-c}{2}\pm\sqrt{\frac{c^2-32c+256-4c^2+46c-262}{4}}$$

$$=\frac{16-c}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-6+14c-3c^2}.$$

需要讨论下列各种情况：

$c=1$，$c=3$，$c=5$，$c=7$，$c=9$。

$c=1$ 时，a 不是自然数。

$c=3$ 时，$a=\frac{13}{2}\pm\frac{3}{2}$，

$a_1=8$，

$a_2=5$，无意义，因为此时 b 为负数。$c\geqslant5$时，根为虚数。

由 $a=8$ 和 $c=3$ 可得所求数为 803。经验算，同样满足要求。

试题 2　（匈牙利）

x 为何值时，不等式$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9$成立？

解：