格论基础

胡长流 宋振明

河南大学出版社

格 论 基 础

胡长流 宋振明 编

河南大学出版社

内容提要

格论是代数学的一个分支，是研究代数、几何、拓扑、逻辑、测度、泛函、组合学、数字计算机及Fuzzy数学的重要工具。本书是格论的基础教程，全书共十章。第一章介绍集合与关系；第二章介绍偏序集；第三章介绍格的基本知识；第四章至第九章分别介绍一些特殊格类，包括完备格（第四章）、模格与半模格（第五章）、有补模格与几何格（第六章）、分配格（第七章）、Boole格（第八章）与自由格（第九章）；最后在第十章中简单介绍近年来格在其它数学分支中的渗透（包括格群、格环、拓扑分子格及格上的测度）。

本书叙述全面，推理详尽，由浅入深，循序渐进，每节后面配有适量的习题。本书可供大学高年级学生及有关专业的研究生作为教材或参考书。

格论基础

胡长流　宋振明　编

责任编辑　程庆

河南大学出版社出版
（开封市明伦街85号）
河南省新华书店发行
中国科学院开封印刷厂印刷

开本：787×1092毫米 1/32　印张：10.25　字数：222千字
1990年8月第1版　1990年8月第1次印刷
印数：1—2000　定价：2.20元

ISBN 7-81018-339-7/O·17

部分符号说明

$\mathbf{N}$	自然数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{C}$	复数集
$\Rightarrow$	蕴涵
$\Leftrightarrow$	等价（当且仅当）
$\forall$	对每一个
$\exists$	存在
$\exists!$	存在唯一的
$\in$	元素属于某集合
$\bar{\in}$	元素不属于某集合
$\subseteq$	含于
$\varnothing$	空集
$P(A)$	A的幂集
1_A	集合A上的恒等映射
$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{n}$元链
O	（泛界）零元
I	（泛界）单位元
$\cap$	集合交
$\cup$	集合并
$\vee$（或sup）	上确界
$\wedge$（或inf）	下确界
$\bar{\wedge}$	转置
$\sim$	射影

$\barwedge$　透视，c为透视轴

$\cong$　同构

$\mathrm{Ker} f$　同态f的核

前　言

格论来源于数论、逻辑、几何等领域．近代格论大体形成于1935年前后．近年来由于在代数学、组合学、拓扑学、Fuzzy数学、泛函分析、概率论、测度论及数字计算机等领域的广泛应用，使得格论有了长足的发展．它已成为数学的一个重要分支，是许多数学领域研究工作的重要工具．除了由董克诚先生在1964年翻译的《格论》（[日]中山　正著，上海科技出版社出版）一书以外，国内有关格论的中文教材至今尚未见到．本书正是为弥补这方面的不足而编写的．

编者近年曾为数学系研究生讲授格论课程，本书在此讲稿的基础上修改整理而成．作为基础教程，在编写过程中我们注意到以下几点：

一、注重格论本身代数理论的阐述，对于格在其它数学领域的渗透和应用仅作简单介绍．

二、除去少数例子用到抽象代数、拓扑的初步知识外，所有涉及格论本身的概念和论据力求自给自足，勿须另外参考其它书籍．对于重要的概念及定理的引进，注意前后联系，有本有源，推理尽可能详尽．

三、本书主要参考了文献[1]．编者对其中某些内容作了适当的调整和改进，使某些相关概念统一起来（如独立、M-独立及序列独立），改进了某些定理的证明（如§2.4定理4，§9.4定理1），并且注意吸收最新的研究成果（如§7.3定理6，及第十章中的§10.2、§10.3及§10.4诸节）．

四、充分发挥习题的作用．习题是本书的一个重要的组成

部分．为不增加篇幅，我们把一些重要的命题及结论有机地编成习题，以加宽加深对正文内容的理解．

为反映近几年来格论对其它数学分支的渗透与影响，本书第十章简单介绍了格的应用，包括格群、格环、分子格、F格及拓扑分子格（王国俊教授在这方面做了开创性的工作），最后简要介绍了本书作者之一宋振明在格的测度方面做的一些工作．

本书第十章由宋振明编写．第一章至第九章由胡长流编写，并负责全书的总纂定稿．

本书在编写过程中，承蒙孙荣光教授自始至终的热情鼓励和关怀，并且认真审阅了原稿．特此表示衷心的感谢！

由于水平有限，错误不当之处在所难免，恳请读者不吝赐教！

作　者

一九八八年九月

目　录

第一章 集合 关系

本章介绍一些必要的预备知识，包括集合（§1.1）、映射（§1.2）、关系（§1.3）等基本概念及其性质，进而讨论等价关系与集合的分类（§1.4），最后介绍选择公理（§1.5）.

§1.1 集 合

所谓一个**集合**是指具有某一特定性质的事物(或对象)的全体．这是数学上的一个最基本的概念，通常只用它的各种同义语来解释，而不用比它更简单的概念来定义．

组成一个集合的每个事物(或对象)叫做这个集合的**元素**(简称**元**).

一般用大写拉丁字母A，B，C，…表示集合，用小写拉丁字母a，b，c，…表示元素．若a是集合A的一个元素，则说a属于A(或者A包含a)，记作$a\in A$(或者$A\ni a$)．若a不是集合A的元素，则说a不属于A(或者A不包含a)，记作$a\overline{\in} A$(或者$A\overline{\ni} a$).

所谓给定一个集合，就是规定这个集合由哪些元素组成．通常的方式有两种，一是列举出这个集合的全部元素，二是给出该集合的元素所具有的特征性质．例如

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

表示由1，2，3，4，5五个数字组成的集合，

$$B=\{x \mid x\text{是整数，且}x\geqslant 4\}$$

表示由大于或等于 4 的所有整数组成的集合．当写出若干个元素就可以看出该集合的组成规律时，可用“…”表示其余的元素．例如

$$\mathrm{N}=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

表示由全体自然数组成的集合，

$$\mathrm{Z}=\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \cdots\}$$

表示由全体整数组成的集合．

只含有限多个元素的集合叫做**有限集**；否则，称为**无限集**．例如上面的A是有限集，B，N及Z都是无限集．

不含任何元素的集合叫做**空集合**（简称**空集**），记作$\varnothing$．例如集合

$$\{x \mid x\in \mathrm{Z}, \text{且}x^2=11\}$$

就是一个空集合．

若集合A与集合B所包含的元素完全一样（即$x\in A\Longleftrightarrow x\in B$），则$A$与$B$实质上表示的是同一个集合，这时说$A$和$B$为**集合相等**，记作$A=B$．

若集合B的每一个元素都属于集合A，则称B是A的**子集**（或者A是B的**扩集**），记作$B\subseteq A$（或者$A\supseteq B$），读做“B含于A”（或者“A包含B”）；否则，就说B不是A的子集，记作$B\nsubseteq A$（或者$A\nsupseteq B$）．

空集合$\varnothing$被认为是任何一个集合的子集．

若B是A的子集，但$A\neq B$，则称B是A的**真子集**，记作$B\subset A$（或者$A\supset B$）．

根据定义，对任意集合A和B，显然有

$$A\subseteq B\Longleftrightarrow \forall x\in A, \text{必有}x\in B;$$

$$A \subsetneqq B \Longleftrightarrow \exists x \in A, \text{ 使得} x \notin B;$$

$$A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A.$$

下面介绍集合的几种运算.

给定集合A与B. 由一切既属于A又属于B的元素组成的集合叫做A与B的**交集**(或**交**), 记作$A \cap B$;由一切属于A或者属于B的元素组成的集合叫做A与B的**并集**(或**并**), 记作$A \cup B$;由一切属于A但不属于B的元素组成的集合叫做A与B的**差集**(或**差**), 记作$A - B$, 特别, 若B是A的子集, 则差集$A - B$叫做B在A内的**余集**(或**补集**), 记作B'_A(在不致于混淆时, 也可简记为B'). 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

集合的这三种运算可用图形表示如下:

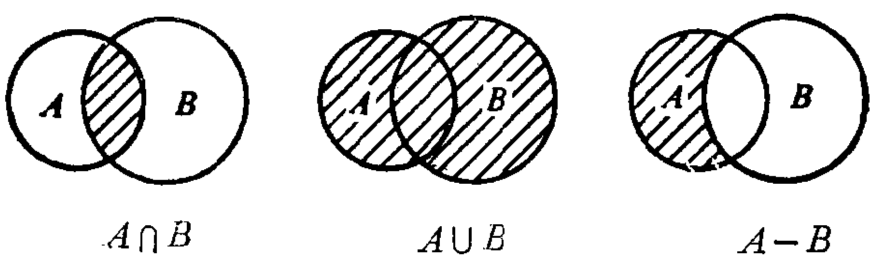

图 1.1.1

集合的运算满足以下算律:

定理1 任意给定集合A, B, C, 则有

(1) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$;(幂等律)

(2) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$;(交换律)

(3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;(结合律)

(4) $A\cap(A\cup B)=A\cup(A\cap B)=A$;(吸收律)

(5) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;(分配律)

(6) 若$A\subseteq C$，则$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$;(模律)

若A，B是X的子集，则

(7) $A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$,

$A\cap X=A$，$A\cup X=X$;(泛界)

(8) $A\cap A'=\varnothing$，$A\cup A'=X$;(互补性)

(9) $(A')'=A$;(对合律)

(10) $(A\cap B)'=A'\cup B'$，$(A\cup B)'=A'\cap B'$.

(De Morgan律)

其中余集皆指在X内的余集.

证 我们仅证(5)、(10)中的第一式，其余留作练习.

设$x\in A\cap(B\cup C)$，则$x\in A$且$x\in B\cup C$. 由$x\in B\cup C$知$x\in B$或者$x\in C$. 再由$x\in A$知$x\in A\cap B$或$x\in A\cap C$，即$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 反之，设$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则$x\in A\cap B$或者$x\in A\cap C$，即$x\in A$且$x\in B$或者$x\in A$且$x\in C$. 无论哪种情况，均有$x\in A$且$x\in B\cup C$，即$x\in A\cap(B\cup C)$. 因此(5)中第一式成立.

设$x\in(A\cap B)'$，则$x\in X$，但$x\overline{\in}A\cap B$. 由$x\overline{\in}A\cap B$知$x\overline{\in}A$或者$x\overline{\in}B$. 再由$x\in X$知$x\in A'$或者$x\in B'$，即$x\in A'\cup B'$. 反之，设$x\in A'\cup B'$，则$x\in A'$或$x\in B'$. 由$x\in A'$知$x\in X$且$x\overline{\in}A$;由$x\in B'$知$x\in X$且$x\overline{\in}B$. 无论哪种情况，均有$x\in X$且$x\overline{\in}A\cap B$，即$x\in(A\cap B)'$. 因此(10)中第一式成立. ∎

设A，B是两个集合，若$A\cap B=\varnothing$，则说A与B不相

交.

集合的交、并概念可以推广到任意多个集合上去. 给定一族集合A_i($i\in I$, I是下标集), 定义集合族$\{A_i|i\in I\}$的交为

$$\bigcap_{i\in I} A_i=\{x\mid \forall i\in I,\ x\in A_i\},$$

集合族$\{A_i\mid i\in I\}$的并为

$$\bigcup_{i\in I} A_i=\{x\mid \exists i\in I,\ x\in A_i\}.$$

当下标集$I=\{1, 2, \cdots, n\}$是有限集时, 上述交、并也可记作

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n,$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n.$$

若下标集$I=\varnothing$是空集时, 规定

$$\bigcap_{i\in I} A_i=X,\qquad \bigcup_{i\in I} A_i=\varnothing,$$

其中X表示在我们讨论的范围内, 由所有的对象组成的集合(称为**万有集合**).

多个集合的交、并满足以下算律:

定理2 设$\{A_i|i\in I\}$是任意集合族, I是下标集,

(1)若I_t($t\in T$)是I的子集, 且$I=\bigcup_{t\in T} I_t$, 则

$$\bigcap_{t\in T}\Big(\bigcap_{i\in I_t} A_i\Big)=\bigcap_{i\in I} A_i,\qquad \bigcup_{t\in T}\Big(\bigcup_{i\in I_t} A_i\Big)=\bigcup_{i\in I} A_i;$$

(一般结合律)

(2)若A是任意集合, 则

$$A\cap\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)=\bigcup_{i\in I}(A\cap A_i),$$

$$A\cup\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)=\bigcap_{i\in I}(A\cup A_i);\qquad \text{(无限分配律)}$$

(3)设X是万有集合, 余集皆指在X内的余集, 则

$$(\bigcap_{i\in I} A_i)' = \bigcup_{i\in I} A_i', \quad (\bigcup_{i\in I} A_i)' = \bigcap_{i\in I} A_i'.$$

(De Morgan律)

证明留作练习. ▮

由集合A的所有子集组成的集合叫做A的**幂集**，记作$P(A)$(或2^A)，即

$$P(A)=\{B \mid B\subseteq A\}.$$

例如设$A=\{a, b, c\}$，则

$$P(A)=\{\varnothing, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\},$$

包含$2^3=8$个元素(即A的子集)．一般地，n元有限集的幂集所含元素的个数为

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

设A_1, A_2, $\cdots$, A_n是任意n个集合，由所有的有序元素组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$(a_i\in A_i, 1\leqslant i\leqslant n)$组成的集合叫做$A_1$, A_2, $\cdots$, A_n的**笛卡尔积**(或者**加氏积**)，记作$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$(简记为$\prod_{i=1}^{n} A_i$)，即

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n) \mid a_i\in A_i, i=1,2,\cdots, n\}.$$

其中两个元素$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$与$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$说是相等(记为$(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$)当且仅当$a_i=b_i$, $i=1, 2, \cdots, n$，即对应的分量相同．例如在一个平面上取定直角坐标系后，每个点可用它的坐标表示，这时该平面上所有点的集合可以看作是实数集R和自身作的加氏积

$$\mathrm{R}\times\mathrm{R}=\{(x, y) \mid x\in\mathrm{R}, y\in\mathrm{R}\}.$$

集合的笛卡尔积的概念可以推广到任意(无限)多个集合

上去.

练　习

1. 设$A=\{x\mid x\in \mathrm{R},|x|\geqslant 5\}$, $B=\{x\mid x\in \mathrm{R},-6\leqslant x<0\}$, 求$A\cap B$, $A\cup B$, $A-B$, $B-A$, 并用图形表示.

2. 证明：对任意集合A, B,

(1) $A\subseteq B\Longleftrightarrow A\cup B=B\Longleftrightarrow A\cap B=A$;

(2) $A=B\Longleftrightarrow A\cup B=A\cap B$.

3. 设$A=\{x\mid x\in Z,\ x^2-3x+2=0\}$, 写出$P(A)$.

4. 若A, B是两个集合，称$(A-B)\cup(B-A)$为A与B的**对称差**. 证明：

$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B).$$

5. 补证本节定理1和定理2.

§1.2　映射　代数运算

设A, B是给定的两个集合，所谓A到B的一个**映射**是指一个对应法则φ，使得对于每一个$a\in A$，依此法则唯一确定一个$a'\in B$与之对应. a'叫做a在φ下的**象**，记作$\varphi(a)$；a叫做a'的一个**原象**(或者**逆象**). A叫做φ的**定义域**，B叫做φ的**值域**. 上述事实通常记作

$$\varphi:\ A\longrightarrow B,$$
$$a\longmapsto a'$$

其中$a\longmapsto a'$(或$\varphi(a)=a'$)表示具体的对应法则，a代表A中任意元素.

若$S\subseteq A$，称B的子集