应用数学丛书

应用离散数学

陈文德 编著

国防工业出版社

应用数学丛书

应用离散数学

陈文德　编著

国防工业出版社

（京）新登字106号

内容简介

离散数学是计算机科学与信息科学的数学基础。本书系统介绍了离散数学的若干基本知识，并着重论述了与计算机、通信、控制、系统理论有关的某些应用离散数学分支。全书共分七章，内容包括：数论及其应用，各种代数结构，图论，图灵机与其它自动机，纠错码与伪随机码，离散控制系统的代数理论，离散系统理论中的某些问题等方面。

本书可供从事计算机科学、信息科学与应用数学的工程技术人员，科研设计人员，大专院校师生参考。

应用数学丛书
应用离散数学
陈文德 编著
*
国防工业出版社出版、发行
（北京市海淀区紫竹院南路23号）
（邮政编码 100044）
新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
850×1068 1/32 印张$12^1/_4$ 323千字
1991年12月第一版 1991年12月第一次印刷 印数：0,001—1,000册

ISBN 7-118-00465-0/O·32 定价：9.95元

应用数学丛书目录

第 一 批

*1. Z变换与拉普拉斯变换		关肇直	王恩平	编著
*2. 常微分方程及其应用		秦化淑	林正国	编著
*3. 实变函数论基础			胡钦训	编著
*4. 正交函数及其应用			柳重堪	编著
*5. 沃尔什函数与沃尔什变换		关肇直	陈文德	编著
*6. 圆柱函数			刘 颖	编著

第 二 批

*7. 集合论			程极泰	编著
*8. 图 论			王朝瑞	编著
*9. 概率论			狄昂照	编著
*10. 矩阵理论		王耕禄	史荣昌	编著
*11. 复变函数论			杨维奇	编著
*12. 逼近论	徐利治	周蕴时	孙玉柏	编著
*13. 矢量与张量分析	冯潮清	赵愉深	何浩法	编著
14. 模糊数学		汪培庄	刘锡荟	编著
15. 编码理论			肖国镇	编著
*16. 应用泛函分析			柳重堪	编著

第 三 批

17. 偏微分方程			丁夏畦	编著
18. 球函数及其应用			楼仁海	编著
*19. 椭圆函数及其应用			高本庆	编著
*20. 应用离散数学			陈文德	编著
*21. 拓扑理论及其应用		王则柯	凌志英	编著
*22. 网络理论			张正寅	编著

23.	广义函数及其解析表示		李邦河	李雅卿	编著
24.	群　论			刘木兰	编著
*25.	数理逻辑			沈百英	编著
*26.	线性系统与多变量控制			叶庆凯	编著
27.	最优化计算方法	马仲蕃	应玫茜	陈光亚	编著
28.	实用数理统计		李国英	吴启光	编著
29.	多项式与多项式矩阵		王恩平	王朝珠	编著
30.	索伯列夫空间			丁夏畦	编著
31.	旋转群与四元素方法			毕大川	编著
32.	信息论与最优编码			章照止	编著
33.	场的数学理论及物理应用			杜　珣	编著
34.	系统的动态辨识			张永光	编著
35.	非线性系统分析与应用			司徒荣	编著
36.	数学物理数值方法		应隆安 滕震环	韩厚德 黄禄平	编著
*37.	误差理论与数据处理			贾沛璋	编著
38.	可计算性与计算复杂性			李　未	编著
*39.	随机过程理论及应用			熊大国	编著
40.	估计理论与随机控制			卢伯英	编著
41.	应用组合数学			刘振宏	编著
42.	渐进分析方法及应用		徐利治	陈文忠	编著
43.	有限元方法			应隆安	编著
44.	经济数学		苑凤歧	林　寅	编著
45.	预测的数学方法			张有为	编著
46.	粘性流体理论		吴望一	韩厚德	编著
47.	塑性理论			黄筑平	编著
48.	变分法及其应用		叶庆凯	郑应平	编著

* 为已出版或即将出版的书。

出 版 说 明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相联，相辅相成，尤其是近年发展起来的边缘学科，更与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成系统，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　言

计算机科学与信息科学的迅猛发展正在深刻地改变人类生活的面貌。一场新的技术革命势不可挡。计算机，通信，控制在这场新技术革命浪潮中扮演着三个重要的“角色”，有些著名的科学家称它们为三C（因为这三者的英文词：Computer, Communication, Control）的第一个字母恰好都是C）。离散数学是计算机科学与信息科学的数学基础，国际上已经出版了多种“离散数学”与“应用离散数学”的学术刊物。本书介绍了离散数学的一些基本内容，特别侧重于介绍与三C及三论（控制论，信息论，系统论）直接有关的应用离散数学的一些分支。

第一章介绍了与组合数学密切有关的初等数论及数论中几个著名的猜想，同时还阐述了以计算机及保密通信为背景的数论应用的三个方面。第二章开始简单介绍了集合论，然后讨论了各种基本的与有用的代数结构。第三章是关于图论的简单介绍。前三章为后面应用性更强的四章打下了基础。

第四章介绍了计算机的抽象数学模型——图灵机与其它自动机。第五章阐述了编码理论，三十多年来，它是通信理论与信息论的一个重要方面，并带有显著的离散特征。第六章讨论了与计算机控制密切有关的离散时间与离散值的现代控制理论，重点是线性系统的代数理论。四，五，六三章介绍的自动机，编码通信系统，离散控制系统都是一般离散系统的特殊情况，第七章讨论了更一般，更普遍的离散系统理论中的某些问题。

本书一方面介绍了应用离散数学的一系列基本知识；另一方面，对某些工程应用理论问题作了较详尽，较深入的研究与讨论。

本书每章都或多或少地包含了作者本人的一些理论或应用研究成果。

目　录

第一章 数　　论

自然数 1， 2， 3…可能是人类最早接触的离散数学对象之一，数论中的相当大的一部分内容是研究整数及其规律的，因此数论是离散数学的一个自然的组成部分。

数论中有一些著名的猜想，它们的结论是如此的简单与完美，往往对中学生都一说就懂，但证明猜想的方法，却是如此的深刻与深奥，以至耗费了大数学家的许多不眠之夜。本章 § 1 介绍了几个具有代表性的，曾轰动一时，闻名世界的猜想。

初等数论是数论中的基础部分，它的应用日益广泛，它与组合数学有着密切的联系，本章 § 2 介绍了初等数论的一些知识。

1947 年第一台电子计算机问世以后，在计算机科学与数字技术的推动下，数论在计算方法与数字通信方面得到了重要应用，本章 § 3 简要介绍了数论的三个重要应用领域——近似分析、数论变换与公开密钥。

中华民族是擅长数论的。从春秋战国时期孙子发现光辉的《中国剩余定理》到华罗庚《堆叠素数论》[1]的出版，中间有过多少杰出的发现与创造！今天，中华数论科学的接力棒已经传到了 80 年代数论工作者的手中，深信它必将发展得更加灿烂辉煌，并在世界数论舞台上永葆其美妙的青春！

§ 1.1　几个著名的猜想

在介绍猜想以前，先说明一下素数的概念。只能被自身与 1 除尽的正整数称为素数。我们特别规定：1 不是素数。显然，除 2 以外，所有的素数都是奇素数。素数是数论的主要研究对象之一，也是最困难的研究对象之一。不少猜想都与素数有关。

一、费尔马（Fermat）问题

这是著名的悬赏十万马克问题。

数学家费尔马（1601～1665）是一个业余数学家，他在看书的时候经常写下自己的心得，他在丢番图（Diophantus）著的一本书的空白处写道：**一般说，除平方以外的任何次乘幂都不能分解为两个同次幂的和，我已经找到这定理的奇妙证明，但这里的地方太小，写不下了。**

后来的数学家翻遍了费尔马所有的笔记和著作却找不到这个证明。许多大数学家尝试去证明它，但都失败了。于是在1907年，为此悬赏十万马克，征求这个问题的解。这一下子，轰动了数学界与社会，形成了解这个问题的热潮。就是对数论十分冷淡的人都怀着好奇心来想这个问题，但是三年内，只得到了上千个错误的证明，这个问题直到今天仍未解决。

费尔马问题是说：对 $n>2$，$x^n+y^n=z^n$ 不可能有整数解；这里 n 可以归结为4和所有的奇素数 p。因为若 $n=pm$，则由 $x^p+y^p=z^p$ 无整数解，显然可推出：$(x^m)^p+(y^m)^p=(z^m)^p$ 亦无整数解。当 $n=4$ 时，可以用一种初等的无穷递降法证明费尔马猜想，当 n 为奇素数时，不能得到一般的证明，对某些特殊的 n 的证明，也要用到很机智的技巧和代数数论的知识。

费尔马问题又可以改写成下面的问题：数论中已经证明：若有整数 x，y，z 使 $x^p+y^p=z^p$ 则素数 p 有以下性质：p^2 能整除 $2^{p-1}-1$ 和 $3^{p-1}-1$。于是解决费尔马问题归结为证明：任意奇素数都不具有上述性质，这一点对小于100的 n 是容易验证的，于是当 n 小于100时，费尔马问题解决了。以后 p 的性质又得到了改进：从 2^{p-1}，3^{p-1} 扩充成 2^{p-1}，3^{p-1}，$4^{p-1}\cdots\cdots47^{p-1}$。并证明了 $p\leqslant253747889$ 时必有一个不大于47的 m 使 p^2 除不尽 $m^{p-1}-1$。这使费尔马问题对更多的 n 得到了解决。

有一次，费尔马问题竟被数学家卡莫（Kammen）宣布解决了。他用了巧妙的代数数论工具。然而，当他把稿件寄到杂志编辑部准备发表时，另一位数学家兼杂志编辑发现了他的错误，

原来他误把整数中的素因子唯一分介定理不加证明地推广到代数数域（这是比有理数更广的一种数集）中去。而事实上后者是不成立的。

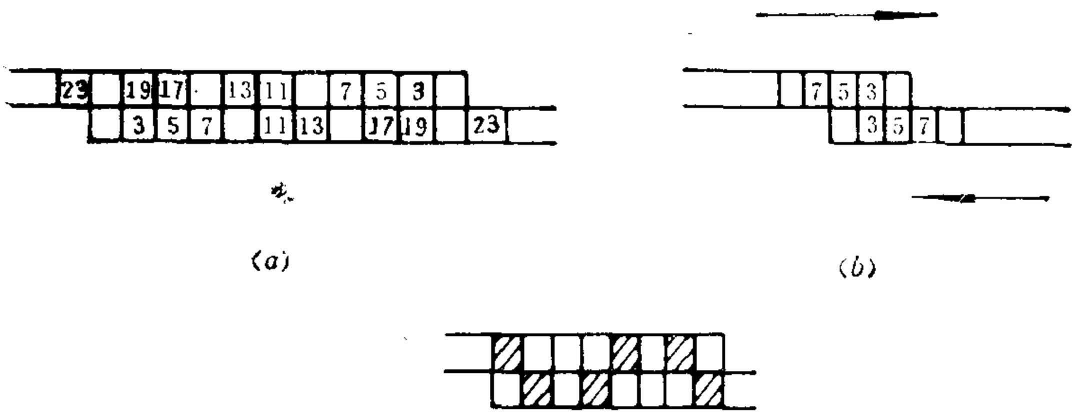
著名数学家希尔伯特（Hilbert）认为费尔马问题依靠今天的数学工具是无法解决的。一般数学家也认为费尔马本人并未得到它的证明，而是搞错了。费尔马一生中除了对数学的重大贡献外，还给后世遗留下了二个疑案：其一即上述的费尔马问题，也叫费尔马大定理，其二是所谓费尔马小定理：**形如$2^{2^n}+1$的数都是素数**。这在$n=0$，1，2，3，4，时都正确，但在$n=5$时，早已推翻了这个结论。数学简史的作者斯特洛伊克(Struik)说："经过三个世纪的顽强努力，尚未找到费尔马问题的证明，可见就费尔马这样伟大的数学家，有时也会梦呓的。"

最近，西德的格尔德·法尔庭斯（Gerd Faltings）用代数几何方法证明了如下莫德尔(Mordell）猜想："设$F(x,y)$为有理系数多项式，则当代数曲线$F(x,y)=0$的亏格$\geqslant 2$[一]时，$F(x,y)=0$只能有有限多个有理数解。"因为$n\geqslant 4$时，$x^n+y^n=1$的亏格$\geqslant 2$，所以$x^n+y^n=z^n$至多只有有限组整数解。这是费尔马问题"攻坚战"中的重大突破。

二、哥德巴赫（Goldbach）猜想

这个猜想是1742年数学家哥德巴赫给欧拉（Euler）的信中提出的。他说他发现了这个规律，深信它的正确，但不能证明它。这规律是：**任何大于4的偶数可以表成两个奇素数的和**。为了检验它的正确性，我们可以裁两张纸条，把纸条划成方格，然后依次写上从1开始的奇数，再把其中的非素数抹去，在两张纸条上分别依上法但反向地写好这些数后，把它们对齐在任一位置，如图1-1(a)，很容易看出，图中上下两格的数的和均为22，故22有三种办法表为两个奇素数之和：19+3，11+11，17+5，再移动纸条就可得到另一不同于22的偶数表成二个奇素数和的方法。若把纸条裁的足够长，再把它们从3重合的这个位置开

[一] 即$F(x,y)=0$的复值解组成的曲面上至少有两个洞。



(a)　　(b)

(c)

图1-1　哥德巴赫猜想的图示

始作相向运动，如图 1-1(b)，只要在每一个位置，至少在一组对齐的上下格中都有数字，则就证明了哥德巴赫猜想。当然，这种方法是不能解决问题的，因为偶数有无限多个，纸条无限长，需要无限次的检验……不过从这里可得出两点：(1) 用这种方法原则上可以检验小于N的偶数猜想是否正确。(2) 它指出了哥德巴赫猜想实际上是从某个角度揭示了素数分布的密度。很容易理解：如果素数分布极稀，那末可能在两张纸条相向运动的某一位置（即对某个偶数 $2n$）上下有数字的格子犬牙交错而没有一个重叠，如图 1-1(c)。如果哥德巴赫猜想成立，那就说明素数分布稠密到一定程度。

哥德巴赫猜想经过了久远的历史，绞尽了许多大数学家的脑汁，直到史尼列尔曼（Шнирельман）引入了一个极为初等的密率概念后，才取得了重要的进展。若不严格地说，一个整数集合的密率是指：集合内整数的个数与全体自然数的个数之比（严格的定义要用到下极限的概念)。如偶数集合的密率是$\frac{1}{2}$，有限个整数的集合的密率是零。这里的密率与上述的直观的素数分布的稠密程度是有密切关系的。数论中已经证明了素数集合的密率是零，但二个素数之和所成数集的密率决不是简单地等于素

数集合的密率的两倍，而是多得多（这可以把小于20的素数相加来验证）。史尼列尔曼克服了许多困难后，证明了上述集合的密率是一个小于1的常数，这样只要取有限个这样的数集，把这些数集内的数加起来，得到一个新的数集，其密率就等于1了，即布满了全部自然数，这就证明了任一自然数可表为有限个素数的和。这个有限数开始很大，后来降低到67，然而，67离2还很遥远。

哥德巴赫问题取得另一个重要进展应归功于维诺格拉道夫(Виноградов)。他创造了一套数论中富有生命力的三角和方法，用这个方法他证明了一个充分大的奇数可表为三个素数之和。3离开2只差一步了。

然而，问题尚未真正解决：任一偶数到底能不能表成两个素数的和？各国数学家正在努力着。

哥德巴赫问题还有另外一条有希望解决的途径：证明任一偶数可表为二个殆素数之和。所谓殆素数是指这样一类数，它们的素因子个数不超过一个给定的常数。在这一领域，我国数学家取得了重要成就。若任一个充分大的偶数可以表成两个殆素数之和，且这两个殆素数的素因子个数不超过m与n，就把这个定理记为：$\{m, n\}$。1956年我国著名数学家王元[2]用筛法证明了$\{3, 4\}$，1957年他又改进为$\{2, 3\}$。1962年潘承洞用另一种筛法证明了$\{1, 5\}$，同年，王元又证明了$\{1, 4\}$。陈景润在1966年发表了他的结果$\{1, 2\}$，1973年进一步发表了$\{1, 2\}$的全部证明[3]，方法是用他的新的加权筛法。$\{1, 2\}$被称为陈景润定理，国际数学界公认这是一个十分杰出的结果，是对哥德巴赫猜想的重大贡献，是筛法理论的最卓越的运用。$\{1, 2\}$离$\{1, 1\}$也只有一步之遥了，但这可能是很困难的一步。

哥德巴赫问题有一些弱型的提法。例如：目前还证明不了任一偶数可以表成两个奇素数的和，但已经能证明弱一些的结论：几乎所有偶数能表成两个素数的和[1]。

哥德巴赫问题还有一些推广。例如可以从一个方程$2n=p_1$

$+p_2$ 推广到多个方程，即素数变数的线性方程组。文献〔4〕结合以上两点，证明了：几乎所有适合同余可解条件的正整数组能表成某种类型的素数变数的线性组合；使用的方法是解析数论的方法。解析数论是数论中的一个分支，它借用连续数学中强有力的数学分析工具的帮助来解决数论中的问题。这种化离散为连续的方法，对于离散数学的发展很有影响，值得引起注意。文献〔4〕共用了19条引理才证明了它的结论，这里我们只能简要地叙述一下结果。

先引进以下一些记号，并作如下的一些假定：

设 $a_{\mu\nu}$（$\mu=1, 2, \cdots, n$；$\nu=1, 2, \cdots, n+1$）为 $n(n+1)$ 个给定的整数，定义矩阵与行列式

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1,n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}\cdots\cdots a_{n,n+1} \end{bmatrix},$$

$$\Delta^i_n=(-1)^{n+1-i}\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,i-1}a_{1,i+1}\cdots a_{1,n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}\cdots a_{n,i-1}a_{n,i+1}\cdots a_{n,n+1} \end{vmatrix}$$

以$(a_1, \cdots, a_m)$ 表示整数 $a_1, \cdots, a_m$ 的最大公因子，设 $\Delta^i_n\neq 0$（$i=1, 2, \cdots, n+1$），$(\Delta^1_n, \Delta^2_n, \cdots, \Delta^{n+1}_n)=1$

$$(1.1.1)$$

那末必有整数 $a_{n+1,j}$（$j=1, 2, \cdots, n+1$）存在，使得

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{n+1,i}\Delta^i_n=1$$

由此我们再设

$$A_1=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

则显然有

$$\det A_1 = 1$$

定出 A_1 的逆阵

$$U = A^{-1} = \begin{bmatrix} u_{11}\cdots u_{1,n} & \Delta_n^1 \\ u_{21}\cdots u_{2,n} & \Delta_n^2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ u_{n+1,1}\cdots u_{n+1,n} & \Delta_n^{n+1} \end{bmatrix}$$

其中 u_{ij}（$i=1, 2, \cdots, n+1$; $j=1, 2, \cdots, n$）都是整数。

现设

$$\nu = \begin{cases} r_\nu, & \text{若 } \Delta_n^\nu < 0 \\ s_\nu, & \text{若 } \Delta_n^\nu > 0 \end{cases}$$

如果标号 r_ν 及 s_ν 不同时存在，那末我们对矩阵 A 不再作任何假定；否则，我们假定

$$\max_{r_\nu} \frac{u_{r_\nu, j}}{\Delta_n^{r_\nu}} < \min_{s_\mu} \frac{u_{s_\mu, j}}{\Delta_n^{s_\mu}}, \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{1.1.2}$$

令 P 是一充分大的正整数，c，c_1，$c_2\cdots$是一些与 P 及 $b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 无关的正常数，$L=\log P$，$X=cP$，$1\leqslant b_\mu \leqslant X$（$\mu=1, 2, \cdots, n$）。当 p 除尽 $a-b$ 时，记为 $a\equiv b\ (\bmod p)$，设 $(\varphi(p))^{n+1}\dfrac{s(p)}{pn}$ 为同余方程组

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} a_{\mu\nu} l_\nu \equiv b_\mu \ (\bmod p) \qquad \mu = 1, 2, \cdots, n$$

在 $1\leqslant l_\nu \leqslant p-1$（$\nu=1, 2, \cdots, n+1$）内的解组数。其中 $\varphi(p)$ 为欧拉函数（参见定义1.2.5）。

对于任何 $1\leqslant j\leqslant n$ 与从 $1, 2, \cdots, n+1$ 中任意选出的 j 个整数 $\nu_1, \cdots, \nu_j$（假设 $\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_j$），在 A 适合式(1.1.1)的假定下，必能找到适合 $1\leqslant\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_j\leqslant n$ 的 j 个整数，使

$$\Delta_j^{(\nu)}=\det\begin{bmatrix} a_{\mu_1\nu_1}\cdots a_{\mu_1\nu_j}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{\mu_j\nu_1}\cdots a_{\mu_j\nu_j}\end{bmatrix}\neq 0 \tag{1.1.3}$$

(数组μ_1, …, μ_j的取法可能并不唯一，当有多种取法时，任意选取一种)，而命μ_1, …, μ_j, μ_{j+1}, …, μ_n为1，2，…, n的一个排列且$\mu_{j+1}<\cdots<\mu_n$。按这样的定义，对于一组ν，$<\cdots<\nu_j$，必有1，2，…, n的一个排列μ_1, …, μ_n与它对应，并且具有以上的性质。

如果从标号1，2，…, $n+1$中任意取出$n-j$个数：$\nu_1^{(j)}<\nu_2^{(j)}<\cdots<\nu_{n-j}^{(j)}$，以$\prod\limits_{(\gamma(j))}$表示取所有这样的$\{\nu_i^{(j)}\}$来进行相乘，那末，我们可记

$$B=\prod_{(\gamma')}\begin{vmatrix} b_{\mu'_1}a_{\mu'_1\nu'_1}\cdots a_{\mu'_1\nu'_{n-1}}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{\mu'_n}a_{\mu'_n\nu'_1}\cdots a_{\mu'_n\nu'_{n-1}}\end{vmatrix}$$

$$\cdot\prod_{(\gamma^{(2)})}\left(\begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(2)}}a_{\mu_1^{(2)}\nu_1^{(2)}}\cdots a_{\mu_1^{(2)}\nu_{n-2}^{(2)}}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{\mu_{n-1}^{(2)}}a_{\mu_{n-1}^{(2)}\nu_1^{(2)}}\cdots a_{\mu_{n-1}^{(2)}\nu_{n-2}^{(2)}}\end{vmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(2)}}a_{\mu_1^{(2)}\nu_1^{(2)}}\cdots a_{\mu_1^{(2)}\nu_{n-2}^{(2)}}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{\mu_{n-2}^{(2)}}a_{\mu_{n-2}^{(2)}\nu_1^{(2)}}\cdots a_{\mu_{n-2}^{(2)}\nu_{n-2}^{(2)}}\\ b_{\mu_n^{(2)}}a_{\mu_n^{(2)}\nu_1^{(2)}}\cdots a_{\mu_n^{(2)}\nu_{n-2}^{(2)}}\end{vmatrix}\right)$$

$$\cdots\prod_{(\gamma^{(n-1)})}\left(\begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(n-1)}} & a_{\mu_1^{(n-1)}\nu_1^{(n-1)}}\\ b_{\mu_2^{(n-1)}} & a_{\mu_2^{(n-1)}\nu_1^{(n-1)}}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(n-1)}} & a_{\mu_1^{(n+1)}\nu_1^{(n-1)}}\\ b_{\mu_3^{(n-1)}} & a_{\mu_3^{(n-1)}\nu_1^{(n-1)}}\end{vmatrix},\right.$$

$$\left.\cdots,\ \begin{vmatrix} b_{\mu_1^{(n-1)}} & a_{\mu_1^{(n-1)}\nu_1^{(n-1)}}\\ b_{\mu_n^{(n-1)}} & a_{\mu_n^{(n-1)}\nu_1^{(n-1)}}\end{vmatrix}\right)(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n),$$

这里的$\mu_j^{(i)}$（$i=1$，2，…, $n-1$；$j=1$，2，…, n）也由所取的标号$\{\nu\}$确定，其中$\mu_l^{(i)}<\mu_k^{(i)}$（$l<k$，$i=1$，2，…,