

H·莫里茨

地球形状—

理论大地测量学
和
地球内部物理学



测绘出版社

地球形状——理论大地 测量学和地球内部物理学

H·莫里茨

陈俊勇 左传惠 译

测 量 出 版 社

(京)新登字 065 号

内 容 提 要

本书从运动学和动力学的角度讨论地球形状及地球内部物理学,讨论了等位椭球及其密度分布,并对均衡理论及其反解作了评述,是涉及当前物理大地测量和地球内部物理前沿问题的一本论著,是作者在《物理大地测量学》、《高等物理大地测量学》后的又一新著。本书深入浅出,通俗易懂,可供大地测量和地球物理、地震、地质、地球动力、天文学等专业的高等院校师生及研究人员阅读和参考。

Helmut Moritz

The figure of the earth : theoretical geodesy
and the earth's interior
karlsruhe : wichmann, 1990

地球形状——

理论大地测量学和
地球内部物理学

H·莫里茨

陈俊勇 左传惠译

*

测绘出版社出版·发行
测绘出版社印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所经销

开本 787×1092 1/16·印张 13.5 ·字数 299 千字

1992 年 5 月第一版·1992 年 5 月第一次印刷

印数 0 001—1 000 册·定价 14.00 元

ISBN 7-5030-0514-9/P·192

前 言

从1743年克莱劳开始的两个世纪以来,地球平衡形状理论一直作为求定地球扁率的最佳理论之一。在那些年代,平衡形状理论始终是物理大地测量的主要内容。这一情况只是在最近的几十年中才有了改变,这有两个原因。

(1) 人造卫星提供了一个直接的极为精确的求定地球扁率的方法,而又无需事先假定(地球的)流体静力平衡。但卫星所得到的结果和地球处于流体静力平衡的假说有矛盾。

(2) 莫洛坚斯基的极为重要和影响深远的理论要求大地测量学只限于研究地球表面及其外部引力场;并认为地球的内部结构,包括它的内部重力场应是地球物理学的事。

但人们在这几十年中看到的却是与这一意见相反,在大地测量学和地理物理学之间老的很清楚的分界线由于下列各种原因而开始消失:大地测量技术对于板块运动、地球自转和固体潮等理论至关重要;将平衡形状作为参照的地球自转和潮汐理论是属于大地测量学的范畴;而一般来说,地球动力学与大地测量学和地球物理学都有紧密的联系。

“大地参照系1980”采用等位椭球作为参照面,因此很自然地会提出这样一个问题,即这一椭球所相应的物质分布构形。类似地,对于地球不规则的重力场的一些很好的全球模型(它们是由卫星数据和地面重力数据联合求定的)也要求研究物质分布的异常,正是这些异常产生了重力场的不规则,这就是引力反解问题。

最后谈谈地壳均衡,它在人造卫星出现之前一直是物理大地测量一个强有力的手段,并且已经在诸如配置法等计算中成为消除某种特定倾向的一种重要方法。目前在均衡方面的研究,特别是它的反演问题的研究,使得均衡理论再次成为岩石圈的地球物理研究中的一个重要工具。

从上面对本书内容和写作意图的粗略叙述中,可以看出:作者的“高等物理大地测量学”(Advanced Physical Geodesy)(1980)[2],是按莫洛坚斯基的理论和思路来写的,而目前这本书也许可以叫做“非莫洛坚斯基大地测量学”。这一术语决不是想贬低莫洛坚斯基理论的价值。正因为有了欧几里得的伟大,才有非欧几何学。同样正是莫洛坚斯基他本人,在他1960年前后研究地球自转理论时,提出了“非莫洛坚斯基”问题。

本书的标题是“地球形状”而副标题是“理论大地测量学和地球内部物理学”这表明作者想继承从克莱劳开始的大地测量学的优良传统,即始终要考虑外部的和内部的重力场及其成因(也就是地球内部的密度分布)之间不可分割的联系。

本书的特点是理论性强,重点在于物理概念及其数学原理而不强调计算方法及其结果。本书以教科书体裁撰写,并不追求百科全书式的完善。本书内容的展开力求详尽,逐步深入,必要时还加以重复叙述,有时还从不同的角度对同一主题加以阐明。

本书力图向读者揭示如何科学的思考问题。本书不总是采用严格的推导,而常常借用别的科学领域中的一些思路来类推,以解决本书中提出的问题。本书的叙述尽可能采用启

发式的论证，所以从这个意义上说，本书是一本没有结尾的书，本书不仅仅介绍了一些问题的答案，而且更重要的是介绍了一些未解决的还待进一步研究的问题。

本书试图使读者能了解当前一些前沿的研究课题，同时努力减轻读者为达此目的而需阅读大量参考文献的负担。这从本书所列的参考文献*就可以看到作者为此所作的努力。本书所列参考文献虽然很长但决不是包含了所有有关的文献，它既受到本书篇幅的限制，也受到作者精力的限制，因此肯定有些重要的文献没有列入，毫无疑问，这当然不是作者故意的疏漏。

本书以统一一致的方式将下列章节结合起来：某些经典材料（第二章）；对讲英语的国家或地区所不知道的一些材料（第三章和第七章中的最后一节）；集中而又系统地对某些理论进行了推导（第四章）；作者曾以报告形式发表的一些材料（第五章，第六章和§ 8.2）；作者在本书首次发表的若干研究成果（§ 4.3和§ 8.3.2）；此外还有一些使数学家感到困惑的收敛问题的简单解决方法等（§ 4.1.5）。

本书供大地测量专业、地球物理专业、天文专业的大学生、研究生、研究工作者阅读。阅读本书只需要有比一般程度稍高一些的数学知识就可以了。此外，若再有一些很基本的物理大地测量知识，那将有助于对本书内容更好的理解。

本书的主要部分是1988年夏天给格拉茨技术大学大地测量专业人员开培训班时的教材，本书不少内容是作者长期和（美国）俄亥俄州立大学合作工作的成果，作者在此对他们表示感谢。

本书手稿由汉得尔（R. Hödl）仔细的用计算机腾写打印，图是由劳斯（K. Rantz）用自动绘图机加以清绘。克拉格尔（G. Kreiger）、寇脱拉勃尔（N. Kühtreiber）和李希耐格尔（H. Lichtenegger）对本书进行了校阅，并提出了不少有益的建议，作者向他们和其他对本书作出贡献的人表示感谢。

莫里茨（H. Moritz）

格拉茨，1990年3月

* 译者对本书所列参考文献作了一定的删减，主要是将其中一部分对于中国读者很难得到的古代文献从略了。

目 录

第一章 概论	(1)
§ 1.1 概念和历史沿革.....	(1)
§ 1.2 引力和重力.....	(3)
§ 1.3 球谐函数.....	(7)
§ 1.4 椭球几何学.....	(10)
§ 1.5 地球模型及其参数.....	(13)
第二章 地球平衡形状的基础理论	(19)
§ 2.1 外部椭球场的一次近似.....	(19)
§ 2.2 分层球的内部场.....	(22)
§ 2.3 匀质椭球的一次理论.....	(26)
§ 2.4 非匀质椭球.....	(28)
§ 2.5 流体静力平衡——克莱劳方程.....	(32)
§ 2.6 拉道 (Radau) 转换	(36)
§ 2.7 惯性矩.....	(38)
第三章 另一种研究平衡形状的方法	(41)
§ 3.1 积分方程方法.....	(41)
§ 3.2 平衡曲面的几何学.....	(47)
§ 3.2.1 等曲面的分层.....	(47)
§ 3.2.2 华夫勒 (Wavre) 定理	(49)
§ 3.2.3 球状分层——一种例外的分层构形.....	(50)
§ 3.2.4 纯椭球状分层的不可能性.....	(50)
§ 3.2.5 克莱劳定理的另一种推导方法.....	(53)
§ 3.2.6 结束语.....	(54)
§ 3.3 位能守恒.....	(56)
§ 3.3.1 位能.....	(56)
§ 3.3.2 狄拉克 (Dirac) 和赫费西特 (Heaviside) 函数	(57)
§ 3.3.3 一个著名的密度分布表达式.....	(58)
§ 3.3.4 位能变化.....	(58)
§ 3.3.5 广义积分方程.....	(60)
第四章 平衡形状的二次项理论	(61)

§ 4.1 内部位	(62)
§ 4.1.1 内部位 I_p	(62)
§ 4.1.2 变量转换	(63)
§ 4.1.3 壳体 E_p 的位	(65)
§ 4.1.4 $K_n(q)$ 和 $Ln(q)$ 的计算	(66)
§ 4.1.5 P 点之引力位	(68)
§ 4.2 克莱劳和达尔文 (Darwin) 方程	(69)
§ 4.2.1 内部重力位	(69)
§ 4.2.2 带有二次项的克莱劳方程	(71)
§ 4.2.3 拉道转换	(74)
§ 4.2.4 达尔文方程	(76)
§ 4.2.5 实用性评论和结果	(78)
§ 4.3 按华夫勒理论的推导	(80)
§ 4.3.1 X 和 Y 的一般公式	(81)
§ 4.3.2 级数展开	(84)
§ 4.3.3 基本方程	(86)
§ 4.3.4 达尔文方程	(87)
§ 4.3.5 克莱劳方程	(88)
第五章 等位椭球及其密度分布	(92)
§ 5.1 椭球坐标和椭球调和	(92)
§ 5.2 水准椭球及其外部重力场	(97)
§ 5.3 水准椭球的物质分布	(101)
§ 5.3.1 一个简单的例子	(106)
§ 5.4 麦克劳林 (Maclaurin) 椭球	(108)
§ 5.5 归化为麦克劳林椭球	(110)
§ 5.6 麦克劳林椭球的非匀质分布	(112)
§ 5.7 零位密度	(113)
§ 5.8 多项式表达式	(116)
§ 5.8.1 四次多项式	(119)
§ 5.9 联合密度模型	(121)
§ 5.10 数值及其矛盾	(122)
§ 5.11 椭球内部位及其重力	(128)
§ 5.12 位能	(130)
§ 5.12.1 以球为例	(131)
第六章 等位椭球的二次近似	(134)
§ 6.1 基本公式	(134)
§ 6.2 水准椭球和平衡形状	(136)

§ 6.3	等位面 and 常密度面	(137)
§ 6.4	差异 κ	(138)
§ 6.5	数字结果和结论	(141)
第七章	密度的非均匀性	(143)
§ 7.1	引力反解问题	(143)
§ 7.2	零位密度	(145)
§ 7.3	唯一解	(147)
§ 7.4	“通”解	(149)
§ 7.5	解析延拓	(150)
§ 7.6	球的连续密度分布	(152)
§ 7.6.1	利用球谐函数	(152)
§ 7.6.2	解的一般表达式	(154)
§ 7.6.3	调和密度	(155)
§ 7.6.4	零位密度	(156)
§ 7.6.5	对通解的几个注解	(156)
§ 7.6.6	重要的简化	(157)
§ 7.6.7	正交展开的应用	(158)
§ 7.7	劳瑞赛拉 (Lauricella) 对格林函数的应用	(161)
§ 7.7.1	格林恒等式的应用	(161)
§ 7.7.2	格林恒等式的转换	(162)
§ 7.7.3	劳瑞赛拉定理	(163)
§ 7.7.4	球的格林函数	(165)
§ 7.7.5	斯托克司常数和调和密度	(167)
第八章	地壳均衡学	(169)
§ 8.1	经典地壳均衡模型	(169)
§ 8.1.1	普拉特—海福特模型	(170)
§ 8.1.2	爱黎—海斯堪宁模型	(171)
§ 8.1.3	维宁迈耶斯的局部补偿	(172)
§ 8.1.4	补偿物质的吸引力	(177)
§ 8.1.5	重力归算的注记	(178)
§ 8.2	地壳均衡作为一个双极场	(179)
§ 8.2.1	地形质量的位	(180)
§ 8.2.2	地形的吸引力	(182)
§ 8.2.3	凝聚在海平面上	(185)
§ 8.2.4	补偿的影响	(186)
§ 8.2.5	关于重力异常的几点结论	(188)
§ 8.3	均衡中的反解问题	(189)

§ 8.3.1 普拉特问题的反解.....	(190)
§ 8.3.2 维宁迈耶斯问题的反解.....	(196)
§ 8.3.3 结束语.....	(202)
参考文献	(203)

第一章 概 论

§ 1.1 概念和历史沿革

地球形状

地球形状基本上有三种不同的定义。

(A) 地球的物理表面或地形表面包围着固体地球和液体地球。这一表面是我们看见的, 并在其上站立, 散步, 驱车, 或游泳。它的形状非常不规则。为了对它进行数学处理, 将它变成平滑表面是必要的。此外, 由于这一表面的潮汐等因素还会有暂时性的变化(大体在分米的量级或更多一些), 因此对它还必须相对于时间取平均值。

(B) 大地水准面(以大地水准面包围的一部分地球)。

若不太严格的讲, 大地水准面是和海洋表面重合并延伸到大陆下面的一个水准面。“海拔高”就是以它为参考面而测得的高程。水准面应是处处“水平”, 也就是说, 该曲面处处和铅垂线正交。水准面是具有等重力位 W (参见 § 1.2), 即 $W = \text{常数}$ 的曲面, 而大地水准面是这一族曲面中的一个, 其重力位等于 W_0 , 这里我们仍然忽略重力位的临时性变化(如潮汐)。

地球的物理表面非常不规则, 而大地水准面则比较平滑, 而且相应于一个数学方程, 即 $W = W_0$; 然而重力位 W 还远不是一个简单的数学函数, 因此, 大地水准面总参照于一个更规则, 同时又和大地水准面很相近的“正常”面, 所谓更“规则”, 是就数学和物理方面的意义而言的, 这将在下面(C)中谈到。

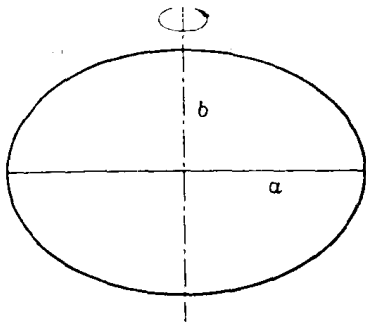
(C) 正常地球或参考地球, 或地球模型

从数学方面说, 最简单的地球模型是旋转椭球, 因而在实际上这种模型是被广泛采用的。从物理上考虑, 要描述小的, 以及或多或少是暂时性的弹性变化(自由或受迫振荡, 如固体潮), 最佳的参照体是流体静力平衡形状, 地球的流体静力平衡形状非常接近于椭球, 但不是完全和本书中所常常叙述的那种椭球一样。顺便指出, 我们对物体的形状和包围物体的表面常常不加区别, 这是约定俗成, 以免引起混乱。

经典力学

经典力学是由天才的牛顿(I. Newton, 1642—1727)和很多光辉的后继者所创造发展的, 这一学说提供了对地球形状进行科学研究的基础。在 1735 年左右, 巴黎科学院决定派遣两支测量队, 一去秘鲁, 一去拉普兰, 企图用实验方法测定地球椭球的扁率。在 1743 年克莱劳(A. C. Clairaut, 1713—1765)发表了关于地球扁率是深度的函数的著名微分公式, 这一公式是基于流体静力平衡的理论, 所以至今还是基本成立的, 扁率 f 的定义参见图 1.1。

就当时的测量精度而论, 无需区别椭球、平衡形状甚至大地水准面等曲面之间的差别。



$$f = \frac{a-b}{a}$$

图 1.1 地球旋转椭球,长半轴 a ,
短半轴 b ,扁率 f

“地球形状”这一术语的经典概念是可以有这种近似,并可以理解为指某种正常的形状。后来高斯(C. F. Gauss, 1777—1855)指出了作为水平面的大地水准面应有精确定义的必要性,他称该面为“几何地球表面”(1828)。目前的术语“大地水准面”是由李斯廷(J. B. Listing)在 1872 年引入的。现在大家都知道,大地水准面和一个合适的地球平均椭球的差异有时达 100 余米。从陆地上看,平衡形状和上述椭球的差别比较小,只有几米,这是在目前的测量精度范围之内的。

围之内的。

在 19 世纪,这种微小的差别在实际工作中是不重要的。在那时,大地水准面也只具有理论的意义而没有实际的作用,当时主要的努力是在求定全球的陆地椭球,即推算它的长半轴 a 和扁率 f ,当时认为流体静力平衡理论是适合于求定 f 的最佳理论之一,这种情况基本上持续到出现人造卫星的 1957 年。

1909 年,海福特(J. F. Hayford)综合利用天文测量、三角测量和均衡归算的成果(参见本书第八章),求得下列参数值

$$a = 6378\ 388\text{m} \quad f = 1/297$$

1924 年,国际大地测量协会(IAG)采用这些数值作为国际椭球的参数,在以后的二十年中这些参数值一直被认为是最好的。

布拉德(E. C. Bullard)于 1948,进行了很精确的流体静力计算后,得出地球椭球扁率为 $1/297.34$ [1],他认为海福特提出的扁率值是对的。因此在人造卫星出现以前,人们几乎肯定认为 f 的数值是在 $1/297$ 左右。

总之,在克莱劳以后的二百年中,流体静力平衡形状的理论一直是大地测量关于地球形状的主要理论,除了少数例外,在这些年中几乎可以说“地球形状”就是“平衡形状”的同义语。

地球形状的另一概念,即地球的物理表面(即前面提到的定义(A))。它是由布隆斯(H. Bruns)于 1878 年引入的,但其主要内容长期停留在如定义(A)中的粗略概念,一直到 1945 年莫洛坚斯基(M. S. Molodensky)的先驱性工作。莫洛坚斯基提出,只用地表的量测值,求定地球的物理表面及其外部重力场是可能的,无需归算到大地水准面,他甚至拒绝大地水准面这一概念。他要求大地测量学只限于研究外部重力场,这样就可以避免引起在大地水准面之上的质量密度问题,而这一问题一般事先是不知道的。

莫洛坚斯基的理论是非常有意义的,它是近几十年来物理大地测量学中的主导思想[2]。莫洛坚斯基方法之所以吸引人,主要在于它的概念和理论上的意义,然而很少大地测量学家会真的跟随他一起去放弃大地水准面[3],因为这从下列事实可以看出,在最近的二、三十年里,用各种方法导出的大地水准面的个数已达到难以计数的地步。

现代大地测量学对平衡形状已很少有兴趣了,在近代的物理大地测量学的重要教科书中,只有莱特斯德格(K. Ledersteger)于1969年的[4]中提到这一概念,在莫里茨的[2]中,对此甚至都没有提及。

除了莫洛坚斯基提出的现代物理大地测量理论外,还有其他一些重要的事件。卫星大地测量学的首批成果之一,就是1960前后得到的地球扁率值,约为 $1/298.25$,这应该是正确的,但过去由流体静力平衡导出的值,约为 $1/297$,二者不一致。最近的研究[5]表明,对这种差别还需要作进一步的探讨。

当今的趋势是大地测量学和地球物理学之间的联系愈来愈密切,可以这样说,这种联系迫使大地测量学除了考虑地表之上,还要考虑地表之下的问题,地球自转和固体潮在一定程度上可以认为是属于大地测量学的范畴,而流体静力的地球模型可以作为地球自转和振荡理论的一个参照体[6]、[7]。

目前人们对地球椭球的了解大体达到1米的精度(“大地参照系统1980”)。在此基础上,应对地球设计一个标准地球模型,这个模型应确定一个等位地球椭球内部的水准面和物质分布,这种等位地球椭球是现代大地参照系统定义的基础。

卫星和地面的综合数据,以相当的精度和解析力提供了外部重力异常场的全球模型的信息,这要求人们根据地幔的质量异常作出解释,这也迫使大地测量学家(虽然有些勉为其难)去考虑困难而又多解的重力测量的反演问题。

将莫洛坚斯基理论应用于山区的主要问题是这一理论要求地表上有连续分布的重力值等数据。然而,实际的测量只是在一些离散点上进行的,因此,必须进行重力内插,而在山区做重力内插等一些大地测量计算时,还必然要应用均衡归算。均衡理论在本世纪的前半个世纪中曾经发挥了重要的作用,后来则逐渐不太流行了,由于计算机的发展,人们可以使用较复杂和更实际的均衡模型进行计算,因此,目前均衡理论又流行了,对此要给予适当的重视。

这里给出这些历史的回顾只是为了说明本书为什么写成这种风格的原因,读者若对大地测量历史有兴趣的话,可以参考[8]、[9],那里有很丰富的资料。

§ 1.2 引力和重力

了解物理大地测量的基本概念,大体应阅读[3]中的头三章,这将有利于阅读本书。但为了使本书尽可能的自成体系,在这里准备介绍一下位理论和物理大地测量的一些基本概念,相应的证明及细节可以参阅[10]、[3],这方面一些艰深的内容如[2]中所涉及的,除了少数章节如§ 4.15, § 7.5和§ 8.3.2以外,本书一般不再引用。

首先按通常定义引入一地固直角坐标系 xyz 。其原点在地球质心(地心), z 轴和地球平自转轴重合, x 轴位于平格林尼治子午面内并和 z 轴正交; y 轴垂直于 xz 平面。因此, xyz 系是右手系,而 xy 平面是平赤道面。

考虑到瞬时自转轴和地球体形变都有很小的周期性变化,因此坐标系应采用平自转轴和平格林尼治子午面,使得它的定义和时间无关。[7]。

地球引力位

地球引力位 V 可以用牛顿积分表示如下

$$V(P) = V(x, y, z) = G \iiint_v \frac{dm}{l} = G \iiint_v \frac{\rho}{l} dv, \quad (1-1)$$

式中 $P(xyz)$ (参见图 1.2) 是 V 的考虑点, Q 是地球体内的流动点, 它同时又是体元 dv 的质量 dm 的中心, l 是 P 和 Q 之间的距离 (直接的联线), 而 $\rho = \rho(Q) = dm/dv$ 是在 Q 处的密度, G 是牛顿常数,

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}. \quad (1-2)$$

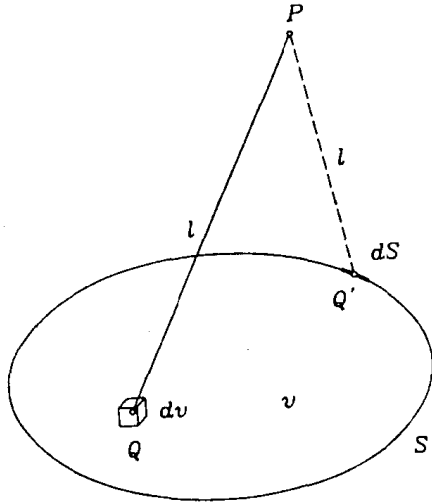


图 1.2 方程(1-1)和(1-5)的符号意义

式(1-1)的积分范围是整个地球体 v , 包括它的固体和液体部分。大气的影晌很小, 相对在 10^{-6} 量级, 因此通常对此是忽略的。若有必要, 可以用加改正的方法予以顾及。引力位 V 的短暂性变化 (例如由固体潮等原因所引起的) 的量级约为 10^{-7} 。因此可以用类似大气影晌的处理方法, 这二者在本书中一般都不加以考虑。

表达式(1-1)只有理论上的重要性, 因为它的计算

要求知道地球内部密度详细分布的知识, 而这显然是不知道的。

当 P 点很远时, 距离可写为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

式(1-1)可表示为

$$V = \frac{GM}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \text{ 当 } r \rightarrow \infty. \quad (1-3)$$

式中 M 表示地球体的总质量, $O(1/r^2)$ 是一种符号, 它表示当 $r \rightarrow \infty$ 时, 这一项趋向于零, 就像 $1/r^2$ 项一样。式(1-3)的物理意义是当考虑点很远时, 地球对该点的引力作用就几乎相同于地球质量的质点对该点的引力作用。

式(1-1)表示分段连续密度 ρ 的体分布的位, 它对真实地球是一个好的描述。对某些计算, 我们还需要面层的位, 当然在自然界一般只有静电才产生这种情况, 而不是引力, 但它对于我们是一种有用的数学虚拟方法。

设质量集中在面 S 上, 面的厚度为零, 面密度 μ 为

$$\mu = \frac{dm}{ds}. \quad (1-4)$$

故类似于式(1-1), 面层位可表示为

$$V_s(P) = G \iiint \frac{dm}{l} = G \iiint \frac{\mu}{l} ds, \quad (1-5)$$

式中 $\mu = \mu(Q')$, 面元 dS 代替了式(1-1)中的体元 dv , 显然 l 是 P 和 Q' 间的距离(图 1.2 中的虚直线)。对于 $r \rightarrow \infty$, V_s 仍满足式(1-3)。下面我们继续讨论式(1-1)在实际地球的情况。

重力位 W 是引力位 V 和离心力位 Φ 的和,

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (1-6)$$

因此

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (1-7)$$

式中 ω 是地球自转角速度(此处认为它是常量)。

引力位 V 的场称为引力场, 故重力位 W 的场称为重力场。

重力矢量 \mathbf{g} 是 W 的梯度。

$$\mathbf{g} = \text{grad}W = \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}. \quad (1-8)$$

式中右方的分量是 W 相对于 x, y, z 的偏导, 它们是引力位梯度 $\text{grad}V$ 和离心力位梯度 $\text{grad}\Phi = [\omega^2 x, \omega^2 y, 0]$ 的合力。

位 V 和 W 以及重力矢量 \mathbf{g} , 在整个三维空间是连续的, 但对于二阶导数来说, 就不是这样。参见下面的式(1-13)和式(1-14), 可以看到在 S 处不连续。

V 的二阶偏导构成一对称矩阵,

$$\begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1-9)$$

上式称为(二阶)引力梯度张量。类似地, W 的二阶导数也构成了重力梯度张量。

矩阵(1-9)的迹就是 V 的拉普拉斯(Laplace)算子, 即

$$\Delta V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz}. \quad (1-10)$$

在吸引物质之外, 即在地球表面 S 之上, V 满足拉普拉斯方程,

$$\Delta V = 0. \quad (1-11)$$

上述方程之解称为调和函数。在地球内部, 即在 S 之内, V 满足泊桑方程

$$\Delta V = -4\pi G\rho, \quad (1-12)$$

式中 ΔV 和 ρ 都相应于 S 之内的同一点。

重力位 W 的相应关系式在顾及式(1-6)后得

$$\Delta W = 2\omega^2, \text{ 在 } S \text{ 之外,} \quad (1-13)$$

$$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2, \text{ 在 } S \text{ 之内.} \quad (1-14)$$

重力矢量 \mathbf{g} 的值, 或模, 就是重力值 g 。

$$g = \|\mathbf{g}\|; \quad (1-15)$$

g 的方向可用单位矢量 \mathbf{n} 表示

$$\mathbf{n} = -g^{-1}\mathbf{g}, \quad (1-16)$$

\mathbf{n} 的方向就是(铅)垂线方向, \mathbf{n} 向上为正, 故上式有负号。我们曾在 § 1.1 中提及, 若一个面上的重力位为常数, 即

$$W(x, y, z) = \text{常数}, \quad (1-17)$$

则这个面是水准面, 或等位面。很容易证明, 铅垂线矢量 \mathbf{n} 处处与水准面垂直。

用符号 $\partial/\partial n$ 表示沿矢量 \mathbf{n} 的导数, 由式(1-8)和(1-15)得

$$g = -\frac{\partial W}{\partial n}, \quad (1-18)$$

式中的负号来自式(1-16)。

对于导数 $\partial g/\partial n$ 可由布隆斯公式求得

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2, \quad (1-19)$$

式中

$$J = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \quad (1-20)$$

J 表示通过考虑点的水准面的平均曲率; 式中 R_1 和 R_2 表示主曲率半径。由式(1-14)可见, 式(1-19)是不会变为零的。式(1-14)的导数参见[3]的 § 2-3。它是华夫勒(Wavre)的平衡形状理论中的基础公式。

正常重力场和重力异常场

由于真正的重力场在数学上是相当复杂的, 通常它以一个具有简单解析性质的正常重力场为参照场。一般来说, 正常重力位 U 被选择为具有等位(U_0)的参照椭球面,

$$U(x, y, z) = U_0 = \text{常数}. \quad (1-21)$$

同样, 大地水准面则被选择为等于真正重力位 W_0 的等位面,

$$W(x, y, z) = W_0 = \text{常数}. \quad (1-22)$$

正常重力位 U 将在第五章作详细叙述, 此处只给出椭球上正常重力 γ 的索米格利安(Somigliana)封闭公式

$$\gamma = \frac{a\gamma_e \cos^2\phi + b\gamma_p \sin^2\phi}{\sqrt{a^2 \cos^2\phi + b^2 \sin^2\phi}}, \quad (1-23)$$

式中 a 和 b 的意义参见图 1.1, γ_e 和 γ_p 分别指在赤道和地极处的正常重力; ϕ 则指椭球上的地理纬度(参见 § 1.4)。

异常位 T , 也称扰动位, 是指同一点的 W 和 U 之差, 即

$$T = W - U. \quad (1-24)$$

N 指大地水准面(1-22)相对于参考椭球(1-21)的高, 著名的布隆斯公式为

$$N = \frac{T}{\gamma}, \quad (1-25)$$

它非常简洁, 也极为有用。

§ 1.3 球谐函数

本节我们将列出重要的球谐函数公式,以便今后使用。球坐标为 r (矢径)、 θ (极距)和 λ (经度),它们和直角坐标 x, y, z 的关系为(参见图 1.3)

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \lambda, \\ y &= r \sin \theta \sin \lambda, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

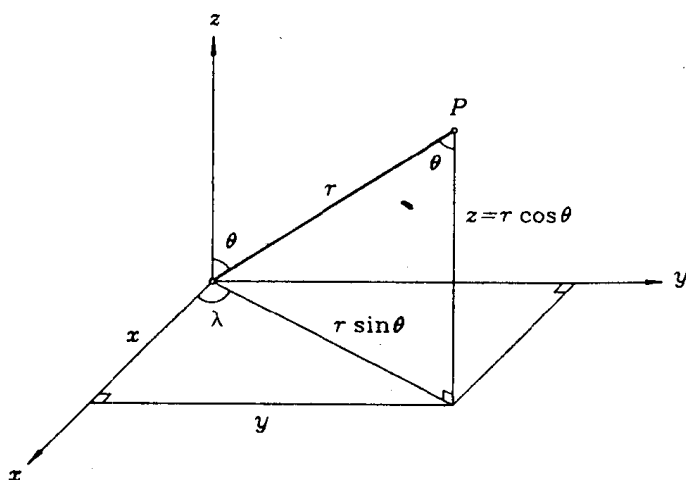


图 1.3 球坐标和直角坐标

若将拉普拉斯方程 $\Delta V = 0$ 用球坐标表示,并以三个函数的积来解算它,且这三个函数分别只含有一个球坐标量,即

$$V = f(r)g(\theta)h(\lambda), \quad (1-27)$$

则其解为

$$f(r) = r^n \text{ 或 } f(r) = \frac{1}{r^{n+1}}, \quad (1-28a)$$

$$g(\theta) = P_m(\cos \theta), \quad (1-28b)$$

$$h(\lambda) = \cos m\lambda \text{ 或 } h(\lambda) = \sin m\lambda, \quad (1-28c)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} n &= 0, 1, 2, 3, \dots, \\ m &= 0, 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

n 称为阶,而 m 称为所考虑函数的幂次(函数 $g(\theta)$ 有第二种解,以后再介绍,参见 § 5.1)。

$f(r)$ 是 r 的正幂或负幂函数, $h(\lambda)$ 是 λ 倍数的正弦或余弦函数,因此这二者都是 r 或 λ 的简单函数。 $P_m(\cos \theta)$ 函数不是初等函数,它们称为勒戎德(Legendre)函数,其定义为

$$P_m(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n, \quad (1-30)$$

式中令 $\cos \theta = t$.

其显式可表示为

$$P_m(t) = 2^{-n} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{n_0} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-m-2k)!} t^{n-m-2k}, \quad (1-31)$$

式中 n_0 是小于等于 $(n-m)/2$ 中最大的整数。勒戎德函数因此是 $t = \cos \theta$ 的多项式并乘以 $\sqrt{1-t^2} = \sin \theta$ 的幂。

对于 $m=0$ 的勒戎德多项式为

$$P_n(t) = P_{n0}(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad (1-32)$$

这是一个 t 的 n 阶多项式。对于 $m \neq 0$, 即 $P_{nm}(t)$ 称为缔合勒戎德函数。

下面给出头五个勒戎德多项式:

$$\left. \begin{aligned} P_0(t) &= 1, \\ P_1(t) &= t, \\ P_2(t) &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3(t) &= \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t, \\ P_4(t) &= \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}. \end{aligned} \right\} \quad (1-33)$$

函数(1-28b)和(1-28c)的积是勒戎德面谐调和函数,可写为

$$\left. \begin{aligned} R_{nm}(\theta, \lambda) &= P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda, \\ S_{nm}(\theta, \lambda) &= P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (1-34)$$

而函数(1-28a, b, c)的积是相应的体球谐(球调和)函数($m=0$:带谐; $0 < m \leq n$:田谐; $m=n$:扇谐),可写为

$$r^n R_{nm}(\theta, \lambda), \quad r^n S_{nm}(\theta, \lambda), \quad (1-35a)$$

$$r^{-(n+1)} R_{nm}(\theta, \lambda), \quad r^{-(n+1)} S_{nm}(\theta, \lambda). \quad (1-35b)$$

函数(1-35)及它们的线性组合是调和的。要特别指出的是,下面的级数

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[A_{nm} \frac{R_{nm}(\theta, \lambda)}{r^{n+1}} + B_{nm} \frac{S_{nm}(\theta, \lambda)}{r^{n+1}} \right] \quad (1-36)$$

和它的不同表达式

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\cos\theta) (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda), \quad (1-37)$$

都是调和函数,它们可以用来表示地球的外部引力位。

从式(1-3)看出,上两式的第一项,即 $n=0$, 就是 GM/r , 所以这两式(1-36)和(1-37)也可以写为如下形式,这种形式常应用于卫星大地测量中。

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_{nm}(\cos\theta) (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) \right], \quad (1-38)$$

式中 a 是地球长半轴(是指和地球最佳配合的椭球), 系数 J_{nm} 和 K_{nm} 是以一种简单的关系式与式(1-37)中的系数 A_{nm} 和 B_{nm} 联系起来。式(1-38)的好处是它的系数很小,而且无量纲。此外,若椭球原点位于地心的话,则该式中 $n=1$ 的项等于零。

以等位椭球为例,顾及到它的旋转对称,有 $K_{nm}=0$, 和当 $m \neq 0$ 时的 $J_{nm}=0$, 若令 $J_{n0}=J_n$, 顾及式(1-32), 则式(1-38)归化为

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_n(\cos\theta) \right], \quad (1-39)$$

式中系数为