数学地质丛书

线性代数

夏立显　矫希国　编

地质出版社

数学地质丛书
线 性 代 数
夏立昱 娇希国 编
*
地质部书刊编辑室编辑
责任编辑： 高书平
地 质 出 版 社 出 版
（北京西四）
地 质 印 刷 厂 印 刷
（北京安德路47号）
新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店经售
*
开本：$850\times1168^{1}/_{32}$ 印张：$5^{3}/_{8}$ 字数：140,000
1981年9月北京第一版 · 1981年9月北京第一次印刷
印数1—6,980册 · 定价1.00元
统一书号：15038 · 新660

前　　言

本书是在长春地质学院“线性代数讲义”的基础上修改而成的，目的在于为学习数学地质，特别是多元统计分析提供必要的基础知识。在取材方面力求实用，在讲法上尽量避免复杂的数学推导，期望在通俗易懂的基础上讲清一些概念和方法的精神实质。本书可供具有高等数学初步知识的读者，尤其是地质科技工作者和地质院校学生自学参考。

这里没有涉及复线性空间和非对称矩阵化标准型的问题，对行列式的理论讲得也少，重点放在欧氏空间、特征值和特征向量、二次型和正定矩阵等用得较多的几个方面，另外还介绍了一些基本的可用于电子计算机上的计算方法，把它们分散在有关的章节中。由于现代多元统计分析文献中常用广义逆矩阵处理各种问题，本书利用最后一章对这方面内容作个通俗的介绍，初学者可以略去不读。

在本书编写过程中，得到了景毅教授的热情指导和周光亚、王世称副教授的鼓励支持。几年以来，先后有牛凤文、周国华、朱政嘉、马生忠、肖凤和、苑清扬、范继璋等老师仔细审阅了各次书稿，特别是武汉地质学院蒋耀淞、张一球老师对本书作了极为认真的审校，他们都提出了许多宝贵意见。陈觉婷、曾汝淑同志也为本书付出了许多劳动。若没有这些同志的指导和帮助，本书是难以完成的，编者借此机会向他们表示衷心的感谢！

编者

目　录

第一章 向量和矩阵

§1. 向　　量

§1.1 几何空间中的向量及其基本运算

通常遇到的物理量，一般可以分为两类：一类仅由量值的大小来表示，如质量、能量等，叫做数量或纯量；另一类由量值的大小和方向共同确定，如速度、力等，叫做向量或矢量。

向量可用几何方法在平面（二维空间）或空间（三维空间）中表示成有向线段（图1.1）。这里约定：任意两个向量，只要它们的长度相等，方向一致，不管其始点位置是否重合，就认为它们是相等的。这就是说，向量可以随便平行移动位置，所以向量也叫做自由向量。若把所有向量的始点都移到坐标原点，则每个向量都可以由它终点的位置唯一确定，所以可以说，每个向量都能用平面或空间中的一个点来表示。

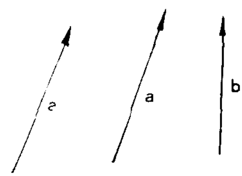

图 1.1

在给定坐标系以后，空间中的每一点都有对应的按一定顺序排列的三个数值——三个坐标值。若把向量的始点放在坐标原点，它的终点的三个坐标，叫做向量的分量或向量的坐标，可以代数形式表示，通常记为

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

为了书写方便，有时也记为 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)'$ 或 $\boldsymbol{a}'=(a_1,a_2,a_3)$。平

面向量有两个坐标或分量，可类似地记为

$$\boldsymbol{a}=\binom{a_1}{a_2}=(a_1,a_2)' \text{或} \boldsymbol{a}'=(a_1,a_2)$$

因此，平面上或空间中任何两个坐标相同的向量都是相等的。

对向量可以进行如下的运算：

1. 加法

两个向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)'$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)'$ 之和定义为

$$\boldsymbol{c}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)' \qquad (1.1)$$

这相当于在力学中根据平行四边形法则或三角形法则求合力（图1.2）。

2. 向量乘以数

按向量的加法法则，两个相同的向量相加，得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=(a_1+a_1,\ a_2+a_2)'=(2a_1,2a_2)'$$

这个向量的方向与原来向量 $\boldsymbol{a}$ 一致，长度等于 $\boldsymbol{a}$ 的 2 倍，可以把它记为

$$2\boldsymbol{a}=(2a_1,2a_2)'$$

一般地说，对任意一个实数 λ[1]，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 表示这样一个向量：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$与 $\boldsymbol{a}$ 反向；$\lambda\boldsymbol{a}$ 的长度等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 $|\lambda|$ 倍；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是长度为零的向量，即一个点。

关系式 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 平行（共线）；反之，任意互相平行（共线）的两个向量，也都可以表示成这种关系。

根据相似三角形原理，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的各坐标都等于 $\boldsymbol{a}$ 的相应坐标的 λ 倍（图1.3），于是这种运算可用坐标表示成

$$\lambda(a_1,a_2)'=(\lambda a_1,\lambda a_2)'$$

对空间向量来说，可表成

$$\lambda(a_1,a_2,a_3)'=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3) \qquad (1.2)$$

这两种运算有下面的一些基本性质：

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ （交换律）

---

[1] 本书只讨论实线性空间，因此如果没有特别声明，所涉及的数都是实数。

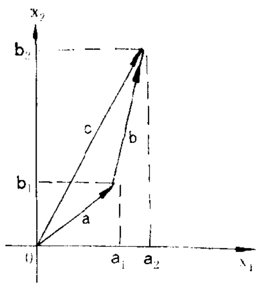

图 1.2

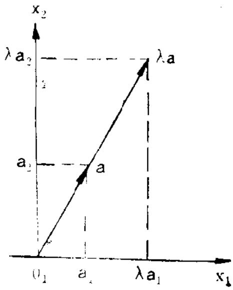

图 1.3

（2） $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ （结合律）

（3）令 $\boldsymbol{\theta}$ 表示坐标全为 0 的向量，它的终点与始点重合，显然有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{a}$$

它在向量加法中的作用相当于 0 在数的加法中的作用，叫做零向量。

（4）作为加法的逆运算，向量之间可以相减，两个向量之差定义为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)'$$

（5）向量乘以数的运算有如下两种形式的分配律

$$\lambda(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}\pm\lambda\boldsymbol{b} \quad (\lambda\pm\mu)\boldsymbol{a}=\lambda a\pm\mu\boldsymbol{a}$$

（6）向量乘以数的运算本身还有如下性质

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$$

3. 内积

我们从力学中知道，当作用在物体上的力 a 和物体的位移 b 方向不一致时，这个力所作的功是

$$\mathrm{w}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\varphi$$

其中 $\|\boldsymbol{a}\|,\|\boldsymbol{b}\|$ 分别表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的长度，$\varphi=\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 之间的夹角。w 叫做向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的内积，记为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|\cos\varphi \tag{1.3}$$

这可以看作一般的两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 内积的定义。内积的结果

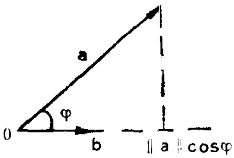

图 1.4

是数量，而不是向量。这里我们认为零向量的长度为 0，其方向是任意的（也可以看做是与任何向量垂直的），因此，零向量与任何向量内积都是 0。

由图 1.4 可以看出，$\|\boldsymbol{a}\|\cos\varphi$ 是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上投影（当 $\varphi<\frac{\pi}{2}$ 时，投影为正；当 $\varphi>\frac{\pi}{2}$ 时，投影为负），相当于作用力 $\boldsymbol{a}$ 在位移方向 $\boldsymbol{b}$ 上的分力。向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的内积可以看成是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上投影乘以 $\boldsymbol{b}$ 的长度。当 $\|\boldsymbol{b}\|=1$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\cos\varphi$，内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 就等于 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影。

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 和任意数 λ，内积运算有如下几条基本性质：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

（2）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

（3）$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；

（4）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geqslant 0$，等号当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 为零向量时成立。

这里的内积是用向量的长度和夹角定义出来的，反之，也可以将向量的长度和夹角用内积表示出来，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{a}\|\cos 0=\|\boldsymbol{a}\|^2$$

即

$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} \tag{1.4}$$

对任意两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，可以用内积算出它们的夹角余弦

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}} \tag{1.5}$$

两个向量垂直，即 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 或 $\cos\varphi=0$ 的充分必要条件是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \tag{1.6}$$

在三维空间中引进直角坐标系，设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是指向三个坐标轴正向的单位长向量，它们之间两两互相垂直。用内积表示，它们

应满足如下六个条件

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0 \\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1 \end{cases} \tag{1.7}$$

我们称这样的三个向量为三维空间中的一组正规直交基。

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，设它在这个坐标系之下的坐标为 $(a_1, a_2, a_3)'$，即有

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$

将等式两端同与向量 $\boldsymbol{i}$ 作内积，得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{i}=a_1(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+a_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+a_3(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})=a_1$$

这说明坐标 a_1 是向量 $\boldsymbol{a}$ 在第一个坐标向量 $\boldsymbol{i}$ 上的投影。类似地有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}&=a_2 \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}&=a_3 \end{aligned} \tag{1.8}$$

我们可用内积将向量的坐标简单地表示出来，反之，也可以用向量的坐标表示内积。设还有

$$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$$

则由内积的性质及条件（1.7）得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}) \\ &=a_1b_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_1b_3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_2b_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_2b_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} \\ &\quad+a_2b_3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_3b_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_3b_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} \\ &=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \end{aligned} \tag{1.9}$$

这说明两个向量的内积等于它们的对应坐标乘积之和。

因此，前面的关于向量的度量性质的几个公式就可以用坐标表示成

$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{1.10}$$

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \tag{1.11}$$

两个向量垂直的条件是

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \tag{1.12}$$

§1.2 n 元数组所构成的向量

将几何空间中的向量和它的坐标——有序数组对应起来，为

用代数研究几何问题提供了条件，但对我们来说，更重要的是这种对应给有序数组提供了直观的几何形象，而这些有序数组可能来自与几何根本无关的问题。这种几何思想不但有助于研究三个数组成的有序数组，而且可用于研究由许多数组成的有序数组。线性代数学就是按这种思想发展起来的。

在许多实际问题中，往往需要用多个指标来刻划事物的特征。例如，为了刻划测线上n个测点的观测值，需要用n个数值$x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$；为了刻划一块标本的化学成分，往往分析若干种元素的含量；为了知道某种化学元素的分布状况，往往要对许多块标本进行分析。

刻划某个事物特征的多个指标可以排成一个有序数组。由不超过三个数组成的有序数组可对应于几何空间中的向量。对于某一正整数n，由n个数$a_1,a_2,\cdots\cdots a_n$组成的有序数组叫**n维向量**，记为

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=(a_1,a_2,\cdots\cdots a_n)'$$

或

$$\boldsymbol{a}'=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)$$

前面对几何空间中的向量所引进的三种运算，都可用代数方法推广到n维向量。

设$\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots\cdots,a_n)'$，$\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots\cdots,b_n)'$是任意两个$n$维向量，$\lambda$是任意实数，可以对它们施行如下三种运算：

（1）加减法

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_1,\cdots\cdots,a_n)'+(b_1,\cdots\cdots,b_n)'\\&=(a_1+b_1,\cdots\cdots,a_n+b_n)'\end{aligned}\tag{1.13}$$

（2）乘以数

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1,\cdots\cdots a_n)'=(\lambda a_1,\cdots\cdots,\lambda a_n)'\tag{1.14}$$

（3）内积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+\cdots\cdots+a_nb_n\tag{1.15}$$

几何空间中向量的运算和性质，虽然都有明显的几何背景，

但从逻辑上讲，它们都可以不依赖于几何学中的概念和结论，只从坐标出发进行研究，当坐标的个数增加到 n 个时，并没有给代数上的讨论带来任何本质的困难，因此，几何空间中向量的三种运算的全部性质都完全适用于 n 维向量。

例如，有了内积运算以后，我们同样可以定义 n 维向量的“长度”和“夹角”：

$$\|\boldsymbol{a}\|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})&=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)}\end{aligned} \tag{1.17}$$

关于 n 维向量的运算，将在以后的章节中作详细讨论。

例1.1 设有四维向量

$$\boldsymbol{a}=(1,-1,3,4)$$
$$\boldsymbol{b}=(2,0,1,2)'$$

按上边定义的运算，可算得

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1+2,-1+0,3+1,4+2)'=(3,-1,4,6)'$$

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{a}&=2(1,-1,3,4)'=(2\times1,2\times(-1),2\times3,2\times4)\\&=(2,-2,6,8)'\end{aligned}$$

$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2+4^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

$$\|\boldsymbol{b}\|=\sqrt{2^2+0^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3$$

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})&=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}=\frac{1\times2+(-1)\times0+3\times1+4\times2}{3\sqrt{3}\times3}\\&=\frac{13}{9\sqrt{3}}=\frac{13\sqrt{3}}{27}\end{aligned}$$

§2. 矩　　阵

§2.1 矩阵的定义

在许多实际问题中，有些客观对象不能用一个有序数组（向量）来刻划，需要用多个向量或矩形数表来刻划。

例如，从某地区取 n 块标本，对每块标本测得 m 种氧化物的百分含量（有时称为 m 个变量），于是可将数据列成下表

标本号 / 变量号	1	2	……	n
1	a_{11}	a_{12}	……	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	……	a_{2n}
|	……	……	……	……
m	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mn}

其中的 $a_{ij}(i=1,\cdots\cdots,m;\ j=1,2,\cdots\cdots,n)$ 表示第 i 种氧化物在第 j 块标本中的含量百分数。

再如，在某测区中取 m 条测线，在每条测线上取 n 个测点，也可以将测得的数据（可以是某地层的标高数据，某地质体的地球化学指标，也可以是磁异常数据等）列成类似的数表，这时 $a_{ij}(i=1,2,\cdots\cdots,m;\ j=1,2\cdots,n)$ 代表第 i 条测线的第 j 个测点上的数据。

若不管数据的具体含意，可把数据按上面数表中的位置写成下面的表格形式

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{pmatrix}
$$

定义1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots\cdots,m;\ j=1,2,\cdots\cdots,n)$ 排成的矩形数表叫 $m\times n$ 阶**矩阵**（当 $m=n$ 时叫 n 阶方阵），

记为$\boldsymbol{A}_{m\times n}$或$(a_{ij})_{m\times n}$，一般简记为$\boldsymbol{A}$。

矩阵中的每个横排叫做行，每个纵排叫做列。a_{ij}表示矩阵的第i行第j列的元素。

例如，下面有三个矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 5 & -4\\ 2 & 6 & 3\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\ 1 & 3 & 7\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{C}=(2\ 6\ 0\ 8)$$

其中的$\boldsymbol{A}$为3阶方阵，$\boldsymbol{B}$为2×3阶矩阵，$\boldsymbol{C}$为1×4阶矩阵。

如果两个矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的行数和列数相等，而且对应的元素也相等，就说$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$相等，并记成$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

§2.2 矩阵的运算

和向量的情形类似，对矩阵也可以定义三种运算。

1. 矩阵的加法

定义1.2 设矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$有相同的行数和列数，把它们的对应位置的元素相加，所得到的新矩阵叫做$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$的和。

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

即

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a & \cdots\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots\cdots b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots\cdots b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots\cdots a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots\cdots a_{2n}+b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots\cdots a_{mn}+a_{mn}\end{pmatrix}\tag{1.18}$$

例如

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -3 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+2 & -1+3 & 2+0\\ 1-3 & 0+2 & 4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

2. 矩阵乘以数

定义1.3 用实数 α 乘矩阵$\boldsymbol{A}$的每个元素，所得到的矩阵叫做数 α 与矩阵$\boldsymbol{A}$的乘积，记为

$$\alpha\boldsymbol{A}=\alpha(a_{ij})_{m\times n}=(\alpha a_{ij})_{m\times n}$$

即

$$\alpha\boldsymbol{A}=\alpha\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \alpha a_{12}\cdots\cdots\alpha a_{1n}\\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22}\cdots\cdots\alpha a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2}\cdots\cdots\alpha a_{mn}\end{pmatrix} \quad (1.19)$$

例如

$$3\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times2 & 3\times3 & 3\times0\\ 3\times1 & 3\times5 & 3\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 9 & 0\\ 3 & 15 & 9\end{pmatrix}$$

$$-1\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -4 & -2\\ 1 & -2 & 0\\ -1 & -3 & -1\end{pmatrix}$$

上述两种运算和向量的前两种运算具有相同的性质，主要的有如下几条：

（1） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$（交换律）；

（2） $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$（结合律）；

（3） $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$（分配律）；

（4） $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$（分配律）；

（5） $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$。

所有元素全为 0 的矩阵称为**零矩阵**，记为 $\boldsymbol{\Theta}$。对任意矩阵 $\boldsymbol{A}$，都有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{A}$$

对于任意两个同行同列的矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 来说，减法运算定义为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-1)\boldsymbol{B}$$

例如，

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1 & 3-2 & 0-(-1)\\ 1-2 & -2-0 & 4-5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

3. 矩阵的乘法

为了定义矩阵的乘法，我们先研究如下形式的向量变换关系

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

这个变换关系由矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

所决定，它把向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)'$ 变换为向量 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)'$。

设向量 $\boldsymbol{x}$ 是由向量 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2)'$ 按下述公式变换而来的

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2 \end{cases}$$

相应的矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

将这两个变换关系连结起来，得到从 $\boldsymbol{t}$ 到 $\boldsymbol{y}$ 的变换公式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}(b_{11}t_1 + b_{12}t_2) + a_{12}(b_{21}t_1 + b_{22}t_2) \\ \quad = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})t_2 \\ y_2 = a_{21}(b_{11}t_1 + b_{12}t_2) + a_{22}(b_{21}t_1 + b_{22}t_2) \\ \quad = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})t_2 \end{cases}$$

相应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}$$

矩阵$\boldsymbol{C}$所代表的变换是 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 所代表的变换连续施行的结果，它的第 i 行第 j 列$(i, j = 1, 2)$ 元素 c_{ij} 等于$\boldsymbol{A}$的第 i 行和$\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和，我们就将$\boldsymbol{C}$定义为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的乘积，记为

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$$

例如，若

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

则有

$$C=AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\4 & 5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times(-1)+2\times 4 & 1\times 3+2\times 5\\3\times(-1)+(-1)\times 4 & 3\times 3+(-1)\times 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 13\\-7 & 4\end{pmatrix}$$

矩阵乘法的一般定义为：

定义3.4 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 和 $n\times r$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}_{n\times r}$ 的乘积是一个 $m\times r$ 阶矩阵 $\boldsymbol{C}_{m\times r}$，它的第 i 行第 j 列元素是$\boldsymbol{A}$的第 i 个行向量和$\boldsymbol{B}$的第 j 个列向量的对应元素乘积之和。即有

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times r}=\boldsymbol{C}_{m\times r}$$

$\boldsymbol{C}_{m\times r}$ 中的元素为

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots\cdots+a_{in}b_{nj}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\cdots\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots\cdots,r \qquad (1.20)$$

在矩阵乘法中，各元素间的运算关系可用下面的记法来表示

$$\begin{array}{cc} & j\text{列} \\ i\text{行} & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots\cdots & c_{ij} & \cdots\cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{m\times r}\end{array}$$

$$=\begin{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}a_{i2}\cdots\cdots a_{in} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{pmatrix}_{m\times n}\begin{pmatrix}\cdots\cdots b_{1j}\cdots\cdots \\ \cdots\cdots b_{2j}\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\ \vdots\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots b_{nj}\cdots\cdots\end{pmatrix}_{n\times r}$$

下面给出几个具体的计算实例。

例1.2

$$(1\ \ 2\ \ 0\ \ 3)\begin{pmatrix}4\\1\\0\\3\end{pmatrix}=4+2+0+9=15$$

例1.3