

张秋光 编

场 论

上 册

地 质 出 版 社

场 论

上 册

张 秋 光 编

地 质 出 版 社

场 论

上 册

张秋光 编

地质矿产部书刊编辑室编辑

责任编辑：张怀素 王文孝

地质出版社出版

(北京 西四)

通县马驹桥印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店北京发行所发行·全国新华书店经售

开本：850×1168 $1/32$ 印张：13 $3/8$ 字数：353,000

1983年7月北京第一版·1983年7月北京第一次印刷

印数：1—4,689册 定价：2.90元

统一书号：15038·新870

编 者 的 话

编写《场论》的目的是介绍研究电磁场和引力场常用的某些数学物理分析方法。具体包括矢量分析、引力场、电磁场、解析函数与平面场、特殊函数、拉普拉斯方程、波动方程、傅里叶分析、场的频率域分析、概率论与随机场等内容。编写中，重视数学与物理学的联系，注意理论和物探实践相结合；为方便自学，基本内容尽量写详细些，文字力求比较通俗易懂，书末并附有习题答案。本书分上、中、下三册，上册着重阐述场的物理学，中、下册为场的数学分析方法。对于仅希望着重了解电磁场和引力场的物理基础的读者，可以只读上册；若要求掌握更多的数学方法，则需进一步研究中、下册。

本书是在编者多次为冶金部物探进修班及校外专题学习班讲授场论课程所用讲义的基础上，经先后两次修改而成。不少兄弟单位以及学习班的同志对讲义提出过宝贵的意见。修稿期间，得到湖北物探队多方面的支持。本书编写任务的完成，也是我院（桂林冶金地质学院）领导和同志们大力支持、帮助的结果。编者在此谨一并致以深切的谢意。

编者还要感谢冶金工业部地球物理探矿公司王继伦同志，他审阅了原稿，并提供了宝贵的意见。

由于编者水平有限，缺点和错误一定不少，衷心欢迎读者批评指正。

编 者

1981年12月

目 录

引 论	1
第一章 矢场分析	12
§ 1 标量场的等值面	13
§ 2 标量场的梯度	15
一、方向导数	15
二、梯度的概念	20
三、梯度运算的基本法则	27
四、位与场强	29
§ 3 矢量场的矢线	34
§ 4 曲面积分	36
一、第一类曲面积分	36
二、第二类曲面积分	41
§ 5 矢量场的散度	50
一、散度的概念	50
二、直角坐标系中散度的表示式	53
三、散度运算的基本法则	57
四、高斯公式	58
§ 6 曲线积分	64
一、第一类曲线积分	64
二、第二类曲线积分	67
§ 7 矢量场的旋度	77
A. 平面矢场	
一、平面矢场的旋度	78
二、平面矢场的旋度在直角坐标系中的计算公式	82
三、平面矢场的格林公式	84
B. 空间矢场	
一、方向旋度的概念	88
二、方向旋度的计算公式	89
三、旋度矢量	93

四、旋度运算的基本法则·····	96
五、斯托克斯公式·····	98
§ 8 劈形算符·····	107
一、劈形算符·····	107
二、常用的有关梯度、散度、旋度的运算公式的算符表示·····	111
三、常用的积分转换公式的算符表示·····	115
§ 9 曲线坐标系·····	119
一、曲线坐标系·····	119
1. 曲线坐标·····	119
2. 坐标曲面 坐标曲线 基矢·····	121
3. 线元 面元 体元·····	126
二、正交曲线坐标系中 $\text{grad}u$ 、 $\text{div } \vec{a}$ 、 $\text{div grad}u$ 、 $\text{rot } \vec{a}$ 的表示式·····	130
§ 10 无旋场 无源场 调和场·····	145
一、无旋场·····	145
二、无源场·····	152
三、调和场(无旋无源场)·····	157
四、有旋有源场·····	161
第二章 引力场·····	164
§ 1 万有引力定律·····	164
§ 2 引力场 引力场强·····	166
§ 3 引力场的涡旋特征·····	170
§ 4 引力位·····	171
§ 5 引力场的聚散特征·····	181
§ 6 计算剩余质量及确定质心位置·····	185
一、剩余质量之计算·····	185
1. 三度体剩余质量之计算·····	185
2. 二度体剩余线密度之计算·····	189
二、质心位置之确定·····	190
1. 三度体质心位置之确定·····	190
2. 二度体质心线位置之确定·····	192
§ 7 引力场方程·····	194

§ 8	引力场的正、反演	204
§ 9	地球的重力场	208
	一、惯性力	208
	1. 惯性参照系与非惯性参照系	208
	2. 惯性力	211
	二、地球的重力场	214
	1. 重力	214
	2. 重力场强	215
	3. 重力位	216
	4. 重力异常	217
第三章	电磁场	226
	I. 电磁现象的普遍规律	
§ 1	真空中的电磁场	226
	一、库仑定律	226
	1. 静电场的旋度	231
	2. 静电场的散度	234
	二、电荷守恒定律	239
	1. 电流密度	239
	2. 电荷守恒定律的数学表示	241
	3. 电流元	242
	三、安培-毕奥-沙瓦定律	244
	1. 静磁场的聚散特征	251
	2. 静磁场的涡旋特征	253
	四、法拉第定律	266
	五、麦克斯韦的位移电流假设	270
	六、麦克斯韦方程组	273
	七、洛伦兹力公式	275
	八、电磁能	277
	九、电磁波	286
	十、唯一性定理	294
§ 2	物质中的电磁场	297
	一、极化	297

1. 极化强度·····	298
2. 束缚电荷密度·····	299
3. 极化电流密度·····	302
二、磁化·····	305
1. 磁化强度·····	306
2. 磁化电流密度·····	306
三、物质中的麦克斯韦方程组·····	311
四、物质的电磁性质方程·····	313
1. 导电物质·····	314
2. 电介质·····	315
3. 磁介质·····	316
五、电磁场的衔接条件·····	321
1. 磁感应强度法向分量的衔接条件·····	322
2. 电位移矢量法向分量的衔接条件·····	323
3. 电场强度切向分量的衔接条件·····	324
4. 磁场强度切向分量的衔接条件·····	326
六、物质中的电磁能·····	331
七、唯一性定理·····	335

II. 稳定电磁场

§ 3 电量不变的静止电荷的场·····	336
一、静电场的基本方程·····	336
二、静电场的唯一性定理·····	341
1. 格林公式·····	342
2. 唯一性定理的叙述和证明·····	342
3. 唯一性定理的意义和应用举例·····	346
三、静电场定解问题提法举例·····	351
§ 4 稳定电流的电场·····	355
一、稳定电流的电场的基本方程·····	355
二、稳定电流的电场的唯一性定理·····	357
三、解稳定电流电场的静电类比法·····	358
四、稳定电流电场定解问题提法举例·····	360
§ 5 稳定电流的磁场·····	365

一、稳定电流磁场的基本方程	365
二、磁标位和磁荷	367
1. 磁标位	367
2. 磁荷	370
3. 磁库仑定律	371
4. 静磁场和静电场的对比	373
三、电流观点和磁荷观点的等效性 (释例)	374
四、磁位和引力位的关系	381
1. 泊松公式	381
2. 已知引力场计算磁场	382
3. 已知磁场计算引力场	383
III. 时变电磁场	
§ 6 时变电磁场的矢位与标位	386
一、从麦克斯韦方程组推导出仅含 $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 的方程组	386
二、时变电磁场的矢位与标位	389
三、谐变场	396
附录 高斯单位制及国际单位制中常用单位及主要	
公式对照表	404
I. 单位表	404
II. 公式表	408
习题答案	413

引 论

学习《场论》之前，自然有的读者会问：场是什么？物探工作者为什么需要研究场论？在引论中，准备就这两个问题作简要的讨论，并对全书作一鸟瞰。

一、场是物质存在的一种形态

很早以前，人们也谈论电磁场、引力场这类名词，并在带电体和引力体周围的空间画上一些电力线和引力线，用以表示作用在单位试验电荷或单位试验质量上的电力或引力的方向与大小。图 0—1 为负电荷球（或物质球）的电力线（或引力线）。但是，当时使用场这个名词，只是作为一种描述手段，并不认为场具有任何实在的意义。

后来，人们在长期的实践中，逐步认识到，场也是一种物质。就电磁场而言，理论和实践都表明：它可以离开电荷而独立存在；并且和实物一样，也具有动量、能量和质量^①。

说明上述结论的正确性的事例是很多的。

① 例如，对于真空中朝单位矢量 $\vec{n}$ 方向传播的平面电磁波（以波动形式传播的电磁场）：

$$\text{单位体积的动量} \quad \vec{p} = \frac{1}{8\pi c} (E^2 + B^2) \vec{n},$$

$$\text{单位体积的能量} \quad w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2),$$

$$\text{单位体积的质量} \quad \sigma = \frac{1}{8\pi c^2} (E^2 + B^2)。$$

其中， c 为光速， $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$ 分别代表电场强度和磁感应强度，在本书采用的高斯制中， $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ 。

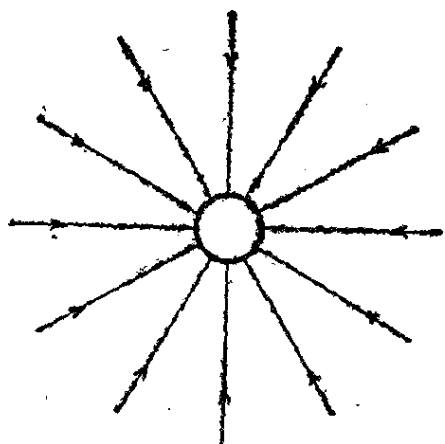


图 0—1

远在“山水甲天下”的桂林，为什么能收到北京的广播？那是由于电磁场这种物质可以脱离发射台而单独存在，并以波动形式千里迢迢传来桂林所致（图 0—2）。

埋藏在地下深达数百米的磁性盲矿体，我们一看不见、二摸不着，为什么在一定条件下利用磁力仪能够发现它？这是由于在矿体周围存在着一种称之为磁场的物质。



图 0—2

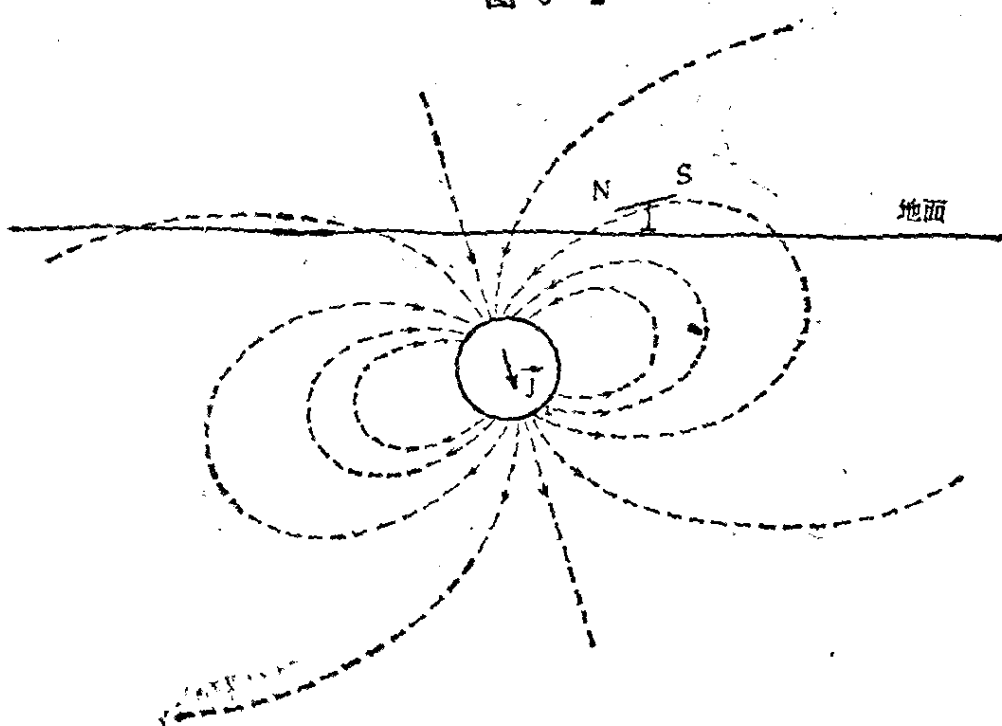


图 0—3

我们虽然不能直接触及盲矿体，但它的磁场却存在于地下、穿透地面、弥漫于空中（图 0—3）。这种具有能量、无所不在的物质——磁场可以对小悬丝磁力仪中的磁棒做功。将此种作用记录下来，并加以分析研究，才使我们有可能找到磁性盲矿体。

彗星的尾巴为什么总是背离太阳（图 0—4）？研究表明，光也是一种电磁场，它同样具有动量。众所周知，有动量的实物打到障碍物上（如乒乓球与墙相碰），后者将受到压力，这种压力决定于动量的变化率。具有动量的太阳光照射在彗星上，也会给彗星施加压力，这就是彗星尾巴老是背离太阳的原因^①。

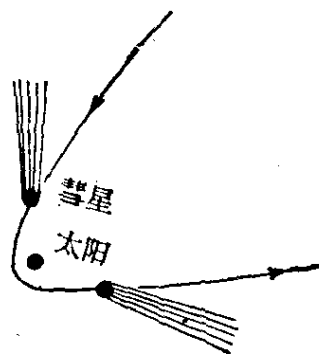


图 0—4

认识到场的物质性，这是整个物理学史上的一种革命性的变化，也是一块划时代的里程碑。人们终于认识到有两种客观实在：实物与场。桌、椅、原子、电子、星体是物质的实物形态；电磁场、引力场则是物质存在的另一种基本形态，电磁场正和我们所坐的椅子一样地实在。

与场的物质性紧密相连的，是场的作用的近距特点。

为说明这一特点，试研究以下问题：设电荷、电流分布于真空中区域 V 内，其密度分别为 $\rho(x', y', z', t)$ 及 $\vec{j}(x', y', z', t)$ ，要求计算 t 时刻、点 $P(x, y, z)$ 处的场强 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 。

在麦克斯韦以前，已经得出库伦定律和安培定律，这些定律断言：电荷与电荷或电流与电流之间的作用的传递是无需借助于任何物质和不需要时间的。按照这种观点，求得标位 φ 及矢位 $\vec{A}$ 的表示式为：

① 另一个可能更为重要的原因是彗星尾部受到来自太阳的物质粒子的袭击。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) &= \iiint_V \frac{\rho(x', y', z', t) dv'}{r} \\ \text{及 } \vec{A}(x, y, z, t) &= \frac{1}{c} \iiint_V \frac{\vec{j}(x', y', z', t) dv'}{r} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 r 是位于点 (x', y', z') 处的电荷元 $\rho dv'$ 或电流元 $\vec{j} dv'$ 到计算点 (x, y, z) 的距离, c 为真空中的光速。进一步再用公式

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi$$

$$\text{及 } \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

计算场强, grad 与 rot 表示梯度、旋度算符。

实践证明: 传递速度无限大的超距观点是错误的。上述解法仅适用于稳定场。

麦克斯韦在前人工作的基础上加进他本人的卓越贡献, 总结出电磁场的运动方程组, 按此方程组可解出:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) &= \iiint_V \frac{\rho(x', y', z', t - \frac{r}{c}) dv'}{r} \\ \text{及 } \vec{A}(x, y, z, t) &= \frac{1}{c} \iiint_V \frac{\vec{j}(x', y', z', t - \frac{r}{c}) dv'}{r} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

已知位计算场强的公式是:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

公式(2)就是有名的体现近距作用特点的推迟势公式。它揭示: 电磁场的传播速度是有限的(等于光速 c), 从而传播是需要时间的。你想求 t 时刻点 $P(x, y, z)$ 处的标位与矢位吗? 你得掌握比它稍前的时刻 $t' = t - \frac{r}{c}$ 的电荷、电流密度, 因为位于点 (x', y', z')

处的场源的影响需要经历 $\frac{r}{c}$ 这么一段时间方能传到计算点。场源

处的时变电磁场是通过场这种物质本身的内部作用（变化的磁场激发电场，变化的电场又激发磁场）逐点地由近及远传递出去的。

实践证明，场的近距作用理论是正确的。

对于时变电磁场，库仑定律、安培定律均不适用，只能用麦克斯韦关于场的方程组去解决问题。有些同志往往在计算迅变场时仍然套用稳定场的结论，这实际上是对场的物质性及其作用的近距性认识不深刻的表现。此种情况也会在日常生活中遇到。例如，夜晚仰观景象万千的满天繁星，许多人毫不怀疑他看到的就是天空今晚此时此刻的面貌。其实，从近距观点看来，由于离地球远近不一，星光这种电磁场传到地球要经历长短不等的时间，因此，看到的并非今晚天空的面貌，而是前前后后相差很远很远的时间的印象总合起来的一幅图象。简单地说，人们是在看天空的历史。

二、物探工作者研究场论的必要性

物探工作者经常与各种各样的物理场打交道，如引力场、稳定电场、稳定磁场、时变电磁场等。这些场的分布变化规律是与称作场源的实物（如引力体、带电体、磁性体等，它们往往是地质工作寻找的对象）的物理、几何特征密切联系着的。通过测定、分析场来推断场源，这是许多物探方法的一个共同特点。为了将推断工作做得有成效，除需很好地研究地质情况外，还必需：1.懂得场的物理学，即对场这种物质的时空变化规律（包括场与场源的内在联系）有比较清楚的了解。2.掌握一定的分析研究场的数学方法。通常我们只知道地面上的实测场值（可能还有一定的航空和地下物探资料），在这些数据中蕴含着（通常并非一目了然的）许多有关场源的信息，要想把这些信息尽可能地提取出来、挖掘出来，不掌握一定的数学工具是办不到的。

以上是总的分析。下面再举几个例子（虽然它们并非是最典

型或最重要的) 来具体说明物探人员掌握必要的场的数学物理分析方法是有益的。

第一, 有助于发展物探技术。

物理探矿是一门新兴的技术, 充满着许多有待解决的课题, 其中不少属于场论的研究范畴。场的物理理论或数学分析方法有所发展必将促进物探的发展。

例如, 大家知道, 地形改正问题是提高山区电阻率法勘探地质效果的一个关键。在理论计算方面, 对于线源供电、二度地形, 利用解析函数理论曾经设计出一些改正方法。然而, 野外通常是用点源供电, 而且二度地形不过是一种理想, 应该研究点源

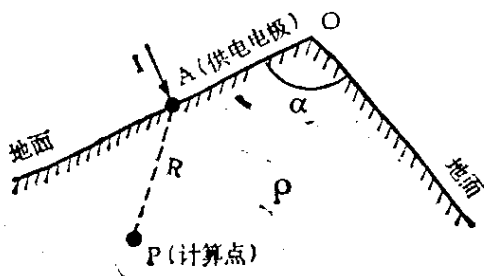


图 0-5

供电、三度地形的改正方法, 方能更切合实际。这个问题难度较大。不过, 近期有人对较简单的点源二度角域地形场的分布规律获得了解答。这是一个典型的场论问题^①, 由于它的解决, 使地改工作较之线源

情况又向前发展了一步。

再看一例。由于垂直磁化条件下场源与异常之间的因果关系比斜磁化时来的简单, 于是自然想到, 能否将斜磁化时的异常换算为垂直磁化条件下的异常, 从而更便于推断解释? 这个问题既

① 问题的提法如下 (图0-5)。

求电位函数 V :

(1) 它在地下角域内满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 V = 0;$$

(2) 在地面上 (除点 A 及线 O 外), 电位的法向导数

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0,$$

(3) 当计算点趋于供电点时,

$$V \cong \frac{I\rho}{2\pi} \frac{1}{R},$$

(4) 当计算点无限远离供电点时,

$$V \rightarrow 0.$$

牵涉到场的物理学，也是个数学问题。即：首先，这种换算是否为物理上可能的？如果可能，从数学上如何具体实现这种转换？经过分析，第一个问题的回答是肯定的。在此基础上，进一步努力，人们也找出了多种^①将斜磁化异常换算为垂直磁化异常的数学方法。有关场论的这一课题的解决显然会对磁法解释工作有所促进。

第二，有助于真正掌握已有的成果，从而灵活地加以运用。

物探中的公式、方法都只是在一定的条件下才能应用的。

例如，有所谓重磁转换方法，即重力异常与磁异常之间相互换算。有的同志没有从理论上深入研究两种场值之间有可能进行换算的前提条件，往往作出这样的评价：“好了，今后用不着进行重力测量了，一切重力异常均可用数学方法由磁异常换算出来。”应该说，这是一种误解。只有当所有引起异常的场源地质体的 $\vec{J}$ 均为同一方向且 J/σ 均为同一常数时，才能够由磁异常换算出重力异常。事实上，在大范围内，上述条件是不可能满足的，从而不可能由磁异常算出真重力异常。因此，通称换算结果

① 这里介绍一种换算方法。

设已知实测的垂直异常 $Z_a(x, y)$ 以及磁化强度的倾角 I ($\vec{J}$ 与水平面的夹角)和偏角 D ($\vec{J}$ 的水平分向量与 x 轴的夹角)。

首先，按公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Z_a(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy = Q + iP$$

算出 $Q(u, v)$ 及 $P(u, v)$ 。

然后，再计算

$$P' = \frac{(PN - QM) \sqrt{1 + N^2}}{M^2 + N^2},$$

$$Q' = \frac{(PM + QN) \sqrt{1 + N^2}}{M^2 + N^2}.$$

其中， $M = \sin \left(D + \arctg \frac{u}{v} \right)$ ， $N = \operatorname{tg} I$ 。

最后，按下式便求出垂直磁化时（保持 $|\vec{J}|$ 不变）的垂直异常

$$Z_{a\perp}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (Q' + iP') e^{i(ux+vy)} du dv.$$

为假重力异常。这样说来，重磁转换岂非毫无意义之举？否！当工区同时进行过重磁测量，作重磁转换有时有助于判断哪些重、磁异常是同源的，哪些不同源。这对于异常的解释推断是有益的。如果只做过一种测量，进行重磁转换是没有意义的。

再研究一个更简单的例子。9°量板（亦称抬高量板）是物探人员非常熟悉的量板之一，它可将水平线（指的是与异常走向垂直的平面和场源上部水平面之交线）上的二度垂直磁异常 Z_a 向上延拓。试问，这块量板的用途还能不能扩大？比如说：

1. 它能否将水平线上的二度水平磁异常 H_a 向上延拓？
2. 它能否将水平线上的二度航磁异常 ΔT 向上延拓？
3. 它能否将水平线上的二度重力异常 Δg 向上延拓？
4. 它能否将水平线上二度 Z_a 、 H_a 、 ΔT 、 Δg 的高阶导数（如 $\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial z^q} Z_a$ 等）向上延拓？

5. 它能否将水平线上的二度总异常 $T_a = \sqrt{Z_a^2 + H_a^2}$ 向上延拓？

6. 它能否将倾斜直线上的二度 Z_a 向上延拓？

7. 它能否将任意地形线上的二度 Z_a 向上延拓？

8. 它能否将水平线上的二度 Z_a 向下延拓？

9. 它能否将水平面上任一测线上的三度 Z_a 向上延拓？

10. 已知在原点以绝缘层隔开的两块半无限大金属板A、B的电位分别为 V_0 及0（图0—6），能否用9°量板计算上半平面的电位值？

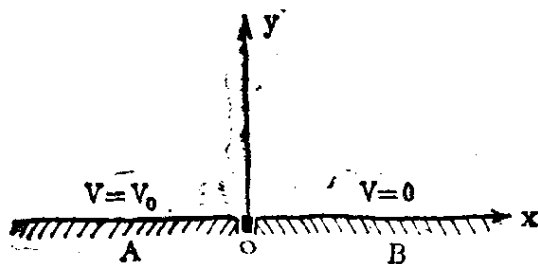


图 0—6