微分几何的理论和习题

〔美〕Martin M·利普舒茨 著　杨正清 李世杰 黄锦能 译

上海科学技术出版社

微分几何的理论和习题

〔美〕Martin M· 利普舒茨 著

杨正清 李世杰 黄锦能 译
曾如阜 麦兆炯 校

上海科学技术出版社

SCHAUMS OUTLINE OF
THEORY AND PROBLEMS
OF
DIFFERENTIAL
GEOMETRY

BY

MARTIN M·LIPSCHUTZ

McGRAW-HILL Book Company, 1969

微分几何的理论和习题

〔美〕Martin M·利普舒茨　著
杨正清　李世杰　黄锦能　译
曾如阜　麦兆娴　校

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行　江苏溧水印刷厂印刷
开本 787×1092 1/16　印张 18,25　字数 432,000
1989 年 9 月第 1 版　1989 年 9 月第 1 次印刷
印数：1—2,800

ISBN 7-5323-0554-6/O·48
定价：7.50 元

译 序

《微分几何的理论和习题》(Theory and problems of Differential Geometry)一书是国外流行的纲要式丛书(Schaum's Outline Series)之一．深广度大致和我国大学数学系本科开设的微分几何课程相当．但写法有其特点，每章分三部分，先扼要简明介绍本章的基本内容．许多细节放在题解中．第二部分是题解，习题是作者经过反复推敲而精选出来的典型题．第三部分是补充题，供读者课外练习用．以检查对内容的理解和掌握程度．

为适应教学的需要，1980 年由我系黄锦能(第 1、4 章)，杨正清(第 2、5、9、10 章和附录 I 附录 II)，李世杰(第 3、6、7、8、11 章)老师把本书译为中文，自 1980 年起在我系作教材使用．在教学过程中，左再思老师曾对译文提过有益的意见．在中译本中，我们对原书中已发现的错漏，作了改正并增加节，段编号．

本书可作为综合性大学和师范院校微分几何教材或教学参考书，也可供在职人员或社会青年作自学教材．

曾如阜　麦兆娴

于 1985 年国庆节

原　序

本书是为大学高年级学生或一年级研究生编写、供一个学期使用的微分几何教程．它介绍三维 Euclid 空间曲线和曲面的微分几何的基本概念．并提供了许多有关的例子和题解．

第一、二章给出向量和单变量向量分析的基本理论．第三章介绍曲线的概念．第四、五章讨论 E^3 空间曲线论，其中包括一些精选的切触理论内容．切触理论是研究经典曲线论的一种很自然的方法．

本书十分注意曲面的定义，目的是使读者在处理整体问题和将来研究现代微分几何时有一个坚实的基础．为此，在第六、七章介绍 Euclid 空间点集拓扑和分析的背景材料，然后在第八章给出曲面的定义．第九、十章介绍曲面的非内蕴几何，其中有张量方法初步和精选的曲面整体微分几何论题．最后一章介绍 E^3 空间曲面内蕴几何的基本理论．

为了直观起见，本书自始至终配有大量的插图．在每一章之末配有许多深浅不一的补充题，以方便读者检验自己对内容的理解程度．

衷心感谢 M·施弗斯坦和丘济深的帮助，他们对本书提了许多有益的意见．我也感谢 D·肖姆和 N·蒙迪的得力的编辑合作以及 H·海登的印刷排版和绘图工作．最后，我还要对我的妻子沙拉仔细打印原稿表示感谢．

Martin M. Lipschutz

1969 年 3 月于康涅狄格州布里治波特

目　录

第一章　向　　量

§1.1　基 本 内 容

引　　言

微分几何是使用微积分方法研究几何图形的学科．这里介绍三维欧几里得空间 E^3 中曲线和曲面的理论．

曲线和曲面在一点邻近处的性质称为*局部性质*．研究局部性质的几何，称为*局部微分几何*．涉及整个几何图形的性质，称为*整体性质*．研究整体性质，特别是与局部性质有关的整体性质的几何就称为*整体微分几何*．

例 1.1　设 Q 和 R 是平面曲线 Γ 上 P 点附近的两个点，C_{QR} 是通过 P，Q 和 R 的圆，如图 1–1 所示．现在考虑当 Q 和 R 趋近 P 时，C_{QR} 的极限位置．一般来说，这极限位置是一个与 Γ 相切于 P 的圆 C．圆 C 的半径是 Γ 在 P 的*曲率半径*．因为这个曲率半径仅仅由 Γ 上靠近 P 的点所决定，故它是曲线的局部性质．

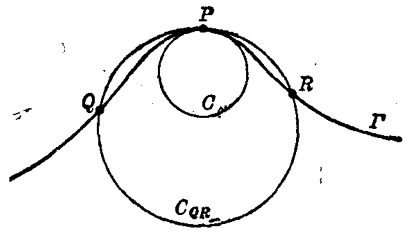


图　1–1

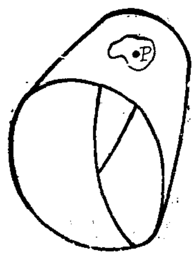


图　1–2

例 1.2　图 1–2 所示的麦比乌斯带是单侧曲面的一个例子．因单侧性由整个曲面的性质所决定，故它是图形的整体性质．注意，该曲面上任意点 P 周围的一小块是正则的双侧曲面，即*局部地看*，麦比乌斯带是双侧的．

我们首先研究曲线和曲面的局部性质，再把结果应用于整体微分几何问题．下面先复习 E^3 中的向量．

1. 向　　量

所谓欧几里得空间 E^3 就是有序三数组 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 的集合，其中 a_1，a_2，a_3 是实数．一个*向量*就是 E^3 中的一个点，记作 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，…或 P，Q，R，…，向量 $\boldsymbol{a}$ 的*反向量*记作 $-\boldsymbol{a}$，定义为 $-\boldsymbol{a}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)$．*零向量*是向量 $\boldsymbol{0}=(0,\ 0,\ 0)$．向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 的*长度*或*大小*是实数 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$. 显然 $|\boldsymbol{a}|\geqslant 0$，并且当且仅当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$|\boldsymbol{a}|=0$.

2. 向 量 加 法

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ 是 E^3 的两个向量，它们的*和* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是用下式确定

的向量,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3).$$

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的差是向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$. 在问题 1.1 中证明向量加法满足

[A_1] $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (交换律),

[A_2] $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (结合律),

[A_3] $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ (对一切 $\boldsymbol{a}$),

[A_4] $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ (对一切 $\boldsymbol{a}$).

例 1.3 设 $\boldsymbol{a}=(1,\ -2,\ 0)$和 $\boldsymbol{b}=(0,\ 1,\ 1)$, 则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,\ -1,\ 1)$, $-\boldsymbol{a}=(-1,\ 2,\ 0)$, $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-1,\ 3,\ 1)$, $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$.

例 1.4 对任意的 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 运用[A_1]至[A_4]得

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}))=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}.$$

于是, 向量方程 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 这个解也是唯一的, 因为如果 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$, 则

$$(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},$$

即 $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, 即 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

已知 E^3 的两点 P 和 Q(即两个向量 P 和 Q), 以记号 $\boldsymbol{PQ}$ 表示它们的差 $Q-P$, 画出 $\boldsymbol{PQ}$, 以箭头表示从 P 到 Q, 如图 1-3. P 到 Q 的距离就是长度$|\boldsymbol{PQ}|$. 显然, $\boldsymbol{PQ}=-\boldsymbol{QP}$, $|\boldsymbol{PQ}|=|\boldsymbol{QP}|$, 当且仅当 $Q-P=Q'-P'$ 时 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{P'Q'}$. 并且对一切 P, 有 $\boldsymbol{PP}=\boldsymbol{0}$.

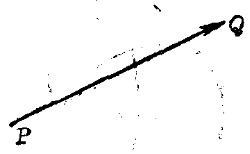


图 1-3

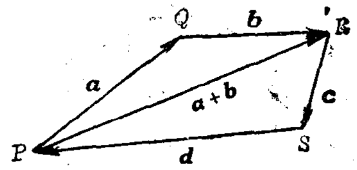


图 1-4

例 1.5 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{PQ}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{QR}$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{RS}$, $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{SP}$, 如图 1-4, 则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{PQ}+\boldsymbol{QR}=Q-P+R-Q=R-P=\boldsymbol{PR},$$
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{PR}+\boldsymbol{RS}=R-P+S-R=S-P=\boldsymbol{PS}=-\boldsymbol{d},$$
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{PS}+\boldsymbol{SP}=S-P+P-S=\boldsymbol{0}.$$

3. 数乘向量

若 k 是实数, $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$是向量, 我们定义积 $k\boldsymbol{a}$ 为向量

$$k\boldsymbol{a}=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3).$$

显然, 对一切 k 和 $\boldsymbol{a}$, 有 $0\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

在向量的研究中, 我们通常把实数称为纯量或数量, 积 $k\boldsymbol{a}$ 称为数乘向量.

在问题 1.4 中, 我们证明数乘向量满足

[B_1] $k_1(k_2\boldsymbol{a})=(k_1k_2)\boldsymbol{a}=k_1k_2\boldsymbol{a}$;

[B_2] $(k_1+k_2)\boldsymbol{a}=k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{a}$, $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ (分配律);

[B_3] $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

最后, 若 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, 则

$$|k\boldsymbol{a}|=\sqrt{(ka_1)^2+(ka_2)^2+(ka_3)^2}=\sqrt{k^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},$$

于是对一切 k 和 $\boldsymbol{a}$, 有

$$|k\boldsymbol{a}|=|k|\cdot|\boldsymbol{a}|. \tag{1.1}$$

例 1.6 设 $\boldsymbol{a}=(1, \pi, 0)$, $\boldsymbol{b}=(0, 2, -1)$, 则 $2\boldsymbol{a}=(2, 2\pi, 0)$, $(-1)\boldsymbol{a}=(-1, -\pi, 0)=-\boldsymbol{a}$, 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(1, \pi-6, 3)$.

例 1.7 设 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ 是已知向量, 又设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_3$ 和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}&=(\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2)-2(-\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_3)-(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3)\\&=\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_2-4\boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3=-\boldsymbol{u}_2-5\boldsymbol{u}_3.\end{aligned}$$

若对向量 $\boldsymbol{a}$ 和非零向量 $\boldsymbol{b}$, 有 $k\geqslant0$ 使 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$, 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向. 若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向, 且有相同的长度, 则由等式(1.1), $|\boldsymbol{a}|=|k|\cdot|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$, 于是 $k=1$, 故 $\boldsymbol{a}$ 等于 $\boldsymbol{b}$. 由此可知, 一个向量将由它的方向和长度唯一确定. 若 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $k\leqslant0$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 反向. 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或者 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向, 即有实数 k, 使 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$.

我们称具有单位长度的向量 $\boldsymbol{u}$ 为单位向量. 通常用 $\boldsymbol{u}_a$ 表示非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的单位向量. 显然, 这单位向量可以用 $1/|\boldsymbol{a}|$ 乘 $\boldsymbol{a}$ 得到, 即

$$\boldsymbol{u}_a=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|. \tag{1.2}$$

例 1.8 设 $\boldsymbol{a}=(1, -1, 3)$, $\boldsymbol{b}=(2, -2, 6)$ 和 $\boldsymbol{c}=(-3, 3, -9)$, 因为 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$, 故向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同向. 因为 $\boldsymbol{b}=-\left(\frac{2}{3}\right)\boldsymbol{c}$, 故向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 反向. 在 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的单位向量是向量 $\boldsymbol{u}_a=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|=(1/\sqrt{11}, -1/\sqrt{11}, 3/\sqrt{11})$.

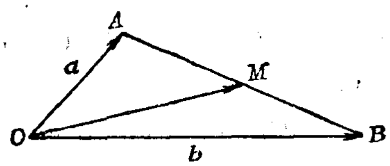


图 1-5

例 1.9 如图 1-5 所示, 在三角形 OAB 中, 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{OB}$, 又设 M 是 AB 边上的中点, 则向量 $\boldsymbol{OM}$ 可以用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示如下:

$$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{AM}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.$$

4. 线性相关和线性无关

线性相关和线性无关是两个十分重要的概念. 向量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 称为线性相关的, 若存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使

$$k_1\boldsymbol{u}_1+k_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{0}. \tag{1.3}$$

若向量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 不是线性相关的, 就称它们为线性无关的, 即若式(1.3)仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时成立, 则 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 线性无关.

注意, 包含零向量的向量集合是线性相关的, 因为我们总可以写成

$$\boldsymbol{0}+0\boldsymbol{u}_1+\cdots+0\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{0}.$$

例 1.10 向量 $\boldsymbol{a}=(1, -1, 0)$, $\boldsymbol{b}=(0, 2, -1)$, $\boldsymbol{c}=(2, 0, -1)$ 是线性相关的, 因为 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

例 1.11 设 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$, 即 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 于是, $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性相关. 反之, 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性相关, 这时有 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 不妨设 $k_1\neq0$, 则 $\boldsymbol{a}=-(k_2/k_1)\boldsymbol{b}$. 这样一来, 两个向量线性相关当且仅当这两个向量平行.

在问题 1.10 中，我们证明线性无关的向量有下面重要性质：

定理 1.1 若一个向量表为一些线性无关的向量的线性函数，则它的表达式是唯一的。即是说，若 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 线性无关且

$\boldsymbol{u}=k_1\boldsymbol{u}_1+k_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{u}_n=k_1'\boldsymbol{u}_1+k_2'\boldsymbol{u}_2+\cdots+k_n'\boldsymbol{u}_n$，则 $k_1=k_1', k_2=k_2', \cdots, k_n=k_n'$.

5. 基和分量

三个向量 $\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0, 1, 0)$ 和 $\boldsymbol{e}_3=(0, 0, 1)$ 线性无关，因为 $k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+k_3\boldsymbol{e}_3=(k_1, k_2, k_3)$，若 $k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+k_3\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}$，则 $k_1=k_2=k_3=0$. 任意向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ 可以写成 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 的线性组合，即 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$，由定理 1.1 知道这个表示式是唯一的.

一般地，一个向量的集合 B 称为 E^3 的一个基，若(i)E^3 的每一个向量可表成 B 中的向量的一个线性组合，(ii) B 是线性无关的向量集合.

在问题 1.11 中我们证明

定理 1.2 任意三个线性无关向量构成 E^3 的一个基. 反之，E^3 的每一基由三个线性无关的向量组成.

设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 是空间的一个基，且 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2+a_3\boldsymbol{u}_3$，数 a_1, a_2, a_3，或简记为 a_i，$i=1, 2, 3$，称为 $\boldsymbol{a}$ 关于基 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 的分量.

由定理 1.1 知道，一个向量对于给定的基的分量是唯一的. 但必须注意，向量的分量依赖于基的选择，一般地，如果基变了，分量也会变化. 向量 $\boldsymbol{0}$ 是一个例外，它的分量永远是 0, 0, 0.

一般用 $a_i, b_i, x_i, y_i, u_i, \cdots$ 表示向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \cdots$ 关于某指定的基的分量.

例 1.12 设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 是基，且 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{u}_2-2\boldsymbol{u}_3$ 和 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_3$. 证明 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性无关，从而也构成一个基. 因为，假定

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=(2k_1+3k_3)\boldsymbol{u}_1+(-k_1+k_2)\boldsymbol{u}_2+(-2k_2+k_3)\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{0},$$

由 $\boldsymbol{u}_i$ 线性无关，可得

$$2k_1+3k_3=0,\ -k_1+k_2=0,\ -2k_2+k_3=0,$$

这是一个关于 k_1, k_2, k_3 的齐次线性方程组. 因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=8\neq 0,$$

故有唯一解 $k_1=k_2=k_3=0$. 因此，向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性无关. 注意，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的分量分别在上面的行列式的每一列中出现.

受上面例子启示，一般地当有

定理 1.3 设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ 是基，且设

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_1&=a_{11}\boldsymbol{u}_1+a_{21}\boldsymbol{u}_2+a_{31}\boldsymbol{u}_3, \\ \boldsymbol{V}_2&=a_{12}\boldsymbol{u}_1+a_{22}\boldsymbol{u}_2+a_{32}\boldsymbol{u}_3, \\ \boldsymbol{V}_3&=a_{13}\boldsymbol{u}_1+a_{23}\boldsymbol{u}_2+a_{33}\boldsymbol{u}_3, \end{aligned}$$

或简记为 $\boldsymbol{V}_j=\sum_{i=1}^{3} a_{ij}\boldsymbol{u}_i$，$j=1, 2, 3$. 则 $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3$ 是基的充分必要条件为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

6. 向量的数量积

两个向量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$和 $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$的点积或数量积是实数

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

特别地，取 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，我们有公式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2. \tag{1.4}$$

在问题 1.14 中，我们证明数量积满足

$[C_1]$ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ (交换律)；

$[C_2]$ $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ (k=数)；

$[C_3]$ $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ (分配律)；

$[C_4]$ 数量积是正定的，即

(i) 对任意 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geqslant 0$;

(ii) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

显然，由定义，对任意 $\boldsymbol{a}$, 有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$. 同样，若对任意 $\boldsymbol{a}$, 有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 再由 $[C_4]$(ii), $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

例 1.13 设 $\boldsymbol{a}=(-2, 1, 0)$和 $\boldsymbol{b}=(2, 1, 1)$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=5=|\boldsymbol{a}|^2$.

例 1.14 设 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 是已知向量，且设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2)\cdot(2\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)=2\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_2=2|\boldsymbol{u}_1|^2-\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2-|\boldsymbol{u}_2|^2$.

在问题 1.16 中，我们证明柯西-许瓦尔兹不等式

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|,$$

其中等号成立的充分必要条件为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性相关. 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角，记作 $\theta=\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$是下式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi \tag{1.5}$$

的唯一解.

例 1.15 如图 1-6, 在三角形 ABC 中，设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 且 $\theta=\angle ACB=\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. 因为

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

我们得余弦定理

$$|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta+|\boldsymbol{b}|^2.$$

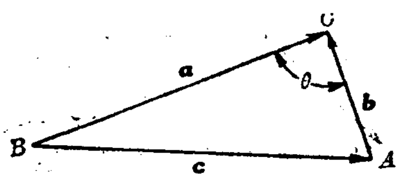


图 1-6

设 $\boldsymbol{b}$ 是非零向量. $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的数量投影，记作 $P_b(\boldsymbol{a})$, 是数量 $P_b(\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{b}|$. 向量 $P_b(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}_b$, 其中 $\boldsymbol{u}_b$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的方向上的单位向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的向量投影，并记作 $\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})$. 由此得出

$$\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})=P_b(\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}_b=[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{b}|](\boldsymbol{b}/|\boldsymbol{b}|)=\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}. \tag{1.6}$$

显然，$P_b(\boldsymbol{0})=0$, $\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$. 如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则由等式 (1.5), $P_b(\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$ 和 $\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})$

$=|\boldsymbol{a}|\cos\theta\boldsymbol{u}_b$，其中 $\theta=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，由此得知 $P_b(\boldsymbol{a})$和 $\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})$与 b 的长度无关，而仅依赖于 $\boldsymbol{b}$ 的方向，如图 1-7 所示．事实上，向量 $\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})$也与 $\boldsymbol{b}$ 的指向无关，即有 $\boldsymbol{P}_{-b}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})$，因为

$$\boldsymbol{P}_{-b}(\boldsymbol{a})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(-\boldsymbol{b})}{|-\boldsymbol{b}|^2}(-\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a}).$$

若 $\boldsymbol{b}$ 的指向改变，则数 $P_b(\boldsymbol{a})$的符号也随着改变．

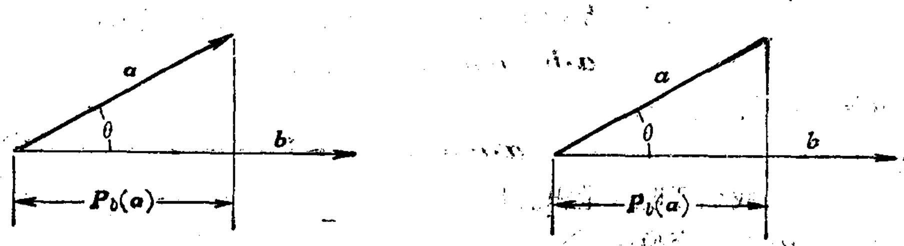


图 1-7

7. 正 交 向 量

若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则称两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是正交的或垂直的，并记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$．由等式(1.5)得，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是正交的充分必要条件为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或 $\theta=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{2}$.

例 1.16 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性无关且 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})$，则 $\boldsymbol{c}$ 是和 $\boldsymbol{b}$ 正交的非零向量．否则，设 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则由等式(1.6)，$\boldsymbol{0}=1\boldsymbol{a}-\boldsymbol{P}_b(\boldsymbol{a})=1\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$，其中 $k=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/|\boldsymbol{b}|^2$，这是不可能的，因为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性无关，因此 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$．最后，因

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\left(\boldsymbol{a}-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\right)\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|^2}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=0,$$

故 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$.

8. 标 准 正 交 基

设 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 是三个互相正交的单位向量，如图 1-8 所示，它们是线性无关的．因为若 $k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+k_3\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}$，则 $0=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{e}_i(k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2+k_3\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{e}_i\cdot k_i\boldsymbol{e}_i=k_i$，即对每一个 i，$k_i=0$，所以它们构成一个基，并称为标准正交基．

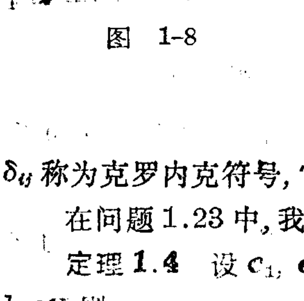


图 1-8

易见，$\boldsymbol{e}_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$ 是标准正交基的充分必要条件是

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=1\quad(\text{单位向量}),$$
$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3=0\quad(\text{彼此垂直}),$$

或简记为

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1,&\text{当 } j=i,\\0,&\text{当 } j\neq i\end{cases}\quad(i,\ j=1,\ 2,\ 3),\tag{1.7}$$

δ_{ij} 称为克罗内克符号，它是一个常用的符号．

在问题 1.23 中，我们证明

定理 1.4 设 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 是标准正交基，又设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$，则

(i) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i$;

(ii) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}a_i^2}$;

(iii) $a_i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$.

例 1.17. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, 则

(a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1)(2)+(0)(1)+(2)(-2)=-2$,

(b) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}=[(1)(0)+(0)(-2)+(2)(1)](2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3)=4\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-4\boldsymbol{e}_3$,

(c) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,

(d) $\boldsymbol{u}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(1/\sqrt{5})\boldsymbol{e}_1+(2/\sqrt{5})\boldsymbol{e}_3$,

(e) $\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-2}{3\sqrt{5}}$.

设非零向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$, 且设 $\theta_i=\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}_i)$, $i=1,\ 2,\ 3$, 如图 1-9 所示. 数 $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$, $\cos\theta_3$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦, 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i=|\boldsymbol{a}|\cos\theta_i=a_i$, 故

$$\cos\theta_i=a_i/|\boldsymbol{a}|,\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

注意,

$$\boldsymbol{u}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{e}_1+\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{e}_2+\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{e}_3$$
$$=(\cos\theta_1)\boldsymbol{e}_1+(\cos\theta_2)\boldsymbol{e}_2+(\cos\theta_3)\boldsymbol{e}_3,$$

即 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦是 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的单位向量的分量.

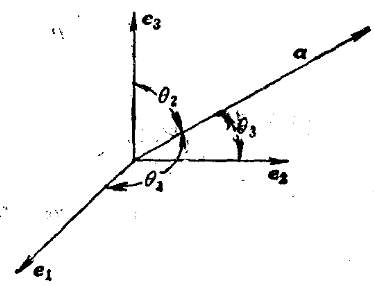
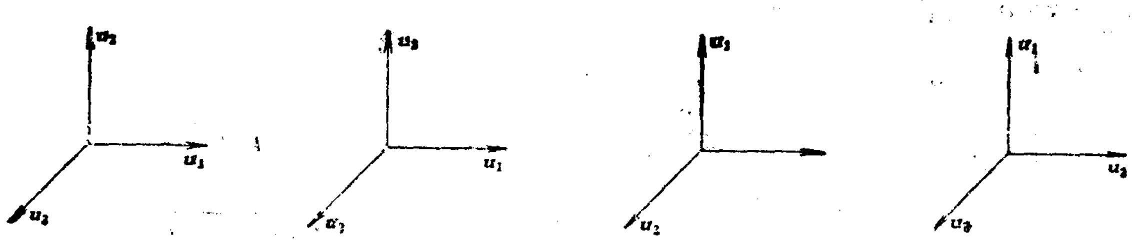


图 1-9

9. 定 向 基

设$(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)$和$(\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2,\ \boldsymbol{g}_3)$都是有序的标准正交基, 设想将三向量组$(\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2,\ \boldsymbol{g}_3)$作旋转, 使 $\boldsymbol{g}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_2$ 分别地与 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 重合, 这时 $\boldsymbol{g}_3$ 或者和 $\boldsymbol{e}_3$ 同向, 或者和 $\boldsymbol{e}_3$ 反向, 对前者我们称$(\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2,\ \boldsymbol{g}_3)$和$(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)$有相同的定向, 对后者则称这两个基有相反的定向. 下面用精确的方式, 对任意的基(而不仅限于标准正交基)阐述定向概念:

设$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)$和$(\boldsymbol{V}_1,\ \boldsymbol{V}_2,\ \boldsymbol{V}_3)$是有序的基, 且 $\boldsymbol{V}_j=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}\boldsymbol{u}_i$. 若系数行列式 $|a_{ij}|>0$, 则$(\boldsymbol{V}_1,\ \boldsymbol{V}_2,\ \boldsymbol{V}_3)$和$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)$有相同的定向. 在问题 1.27 中, 我们证明定向是 E^3 中所有有序基的集合上的一个等价关系. 这个关系把基划分为两个等价类. 同一类中的有序基有相同的定向, 而不同类中的基有相反的定向.



(a) (b) (c) (d)

为了直观地识别有序基的一个定向，若基中的向量 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ 在空间中依次和右手的姆指，食指与中指取相同的方向，则称 $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ 为*右手系基*，否则就称为*左手系基*.

例 1.18 图 1-10(a)和(c)中的三向量组$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$是右手系基，在图 1-10$(b)$和$(d)$中，它们是左手系基.

注意：除非另有说明，往后所说的基将是指右手系标准正交基.

10. 向量的向量积

设$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$是右手标准正交基，且设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$ 和 $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$. $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的*叉积*或*向量积*是向量，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，定义为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3,$$

它可视为下面的行列式的展开式：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & a_1 & b_1\\ \boldsymbol{e}_2 & a_2 & b_2\\ \boldsymbol{e}_3 & a_3 & b_3\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}-\boldsymbol{e}_2\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}+\boldsymbol{e}_3\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}.$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3.$$

例 1.19 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & 1 & 0\\ \boldsymbol{e}_2 & -1 & 1\\ \boldsymbol{e}_3 & 0 & 2\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3.$$

在问题 1.82 中，我们证明向量积实际上并不依赖于右手系标准正交基的选择. 在问题 1.81 中，我们还证明

定理 1.5 (i) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 $\theta=\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$；

(ii) a. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$ 且 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$；

b. 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$是右手系的线性无关的三向量组.

因为 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=0$ 当且仅当 $|\boldsymbol{a}|=0$ 或 $|\boldsymbol{b}|=0$ 或 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$. 从上面(i)和许瓦尔兹不等式的严格形式(即 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ 的充分必要条件为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性相关)有

定理 1.6 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 线性相关.

若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不是线性相关，即若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则定理 1.5 (ii) 表明 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，并且$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$是右手系的三向量组，如图 1-11$(a)$所示.

注意，向量积一般不是可交换的. 虽然 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 有相同的长度(定理 1.5(i))且平行于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$(定理 1.5(ii)a.)，但 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向是相反的(定理 1.5(ii)b.)，所以 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，如图 1-11$(b)$所示.

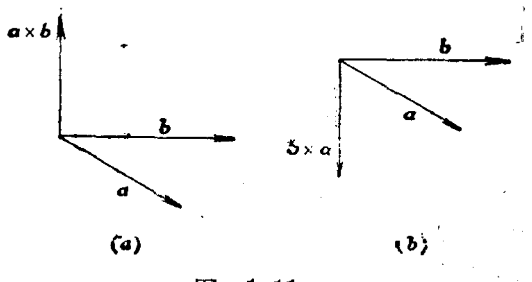


图 1-11

图 1-12

例1.20 对于标准正交基$(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)$，如图1-12所示，由定理1.5可得

$$\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_1=-\boldsymbol{g}_3,\ \boldsymbol{g}_3\times\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{g}_2,$$
$$\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{g}_3,\ \boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{g}_3\times\boldsymbol{g}_2=-\boldsymbol{g}_1,$$
$$\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_3=-\boldsymbol{g}_2,\ \boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_3\times\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{0}.$$

在问题1.29中，我们证明向量积满足

$[E_1]$ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$ （反交换律）；

$[E_2]$ $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ （分配律）；

$[E_3]$ $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ （k=数量）；

$[E_4]$ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

注意：向量积不仅不可交换，而且也不能结合，即一般来说$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$. 由例1.20，$\boldsymbol{g}_1\times(\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2)=\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_3=-\boldsymbol{g}_2$，而$(\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_1)\times\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{0}$.

例1.21 如图1-13，在三角形ABC中，设$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AC}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\alpha=\angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$，$\beta=\angle(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$，$\gamma=\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. 现在，

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},$$

即
$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}.$$

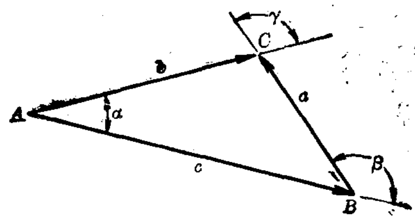


图 1-13

类似地，

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a},$$

因此
$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a},$$

则
$$|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|,$$

即
$$|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}|\sin\alpha=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\sin\beta=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\sin\gamma.$$

这就给出了正弦定理

$$\frac{\sin\alpha}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\sin\beta}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\sin\gamma}{|\boldsymbol{c}|}.$$

11. 混合积和向量恒等式

积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$称为混合积或三重数量积，注意并不需要加括号，因为该式只能意味着$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$，即向量$\boldsymbol{a}$和向量$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$的数量积，这个积也可以利用行列式表示出来. 设$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{e}_1+c_2\boldsymbol{e}_2+c_3\boldsymbol{e}_3$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}&=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & b_1 & c_1\\ \boldsymbol{e}_2 & b_2 & c_2\\ \boldsymbol{e}_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\\ &=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(c_3b_1-c_1b_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\\ &=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

由行列式的性质得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\tag{1.9}$$

特别地，可得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$. 这样一来，我们可以丢掉混合积记号中的点和叉，使用如下记号代替它：