

中学数学基础电视讲座

北京市工农教育研究室 编

几何
辅导资料

中学数学基础电视讲座

几何辅导资料

北京市工农教育研究室编

1117712/28

地质出版社

内 容 提 要

本资料是为了配合教育部、中央广播事业管理局举办的中学数学基础电视讲座几何课的教学而编写的，包括基础知识、三角形、相似形、圆、空间的平面和直线、简单的多面体与旋转体等共六章。

本资料的读者对象为：中学数学基础电视讲座的收看者，职工业余学校的学员和教师，以及各类中等学校师生和社会青年。

中学数学基础电视讲座

几 何 辅 导 资 料

北京市工农教育研究室编

*

地质部书刊编辑室编辑

地质出版社出版

(北京西四)

沧州地区印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本：787×1092¹/₃₂ 印张：7 字数：168,000

1981年5月北京第一版·1981年5月天津第一次印刷

统一书号：7038·新10·定价：0.50元

前 言

为了配合教育部、中央广播事业管理局举办的中学数学基础电视讲座几何课的教学，为参加学习的同志提供便于预习、听课和复习的有利条件，同时也为辅导教师提供教学参考资料，我们根据目前采用的电视讲座课本组织编写了《中学数学基础电视讲座几何辅导资料》，由本讲座几何课主讲教师刘增贤、王汇淳及侯忠义同志执笔。

本资料密切结合中学数学基础几何课的教学，内容包括基础知识、三角形、相似形、圆、空间的平面和直线、简单的多面体与旋转体等共六章。考虑到在职青年的实际情况和电视教学的特点，我们在组织编写过程中，注意了各个教学单元之间的衔接，提出了内容提要，并对课程进度、章节的基本要求、各讲内容、典型例题和作业等都作了明确的说明，以便帮助收听讲座的同志们提高学习效果。

由于编写时间的仓促和编者水平所限，资料中不当之处，恳请读者批评指正。

北京市工农教育研究室

一九八一年四月

目 录

第一章 基础知识

一 内容提要	(1)
1 概念	(1)
2 性质	(1)
3 判定定理	(2)
4 作图	(2)
二 目的和要求	(3)
三 讲次及主要内容	(3)
第一讲 序论、直线、线段和射线	(3)
第二讲 圆、圆弧和角	(9)
第三讲 相交直线的夹角	(10)
第四讲 平行线的判定	(12)
第五讲 平行线的性质	(15)

第二章 三角形

一 内容提要	(21)
1 三角形的分类	(21)
2 三角形的边角关系	(21)
3 三角形的主要线段及其性质	(22)

4	特殊三角形及其性质	(22)
5	全等三角形的定义、判定和性质	(22)
6	三角形的作图	(23)
7	四边形	(23)
二	目的和要求	(24)
三	讲次及主要内容	(25)
第六讲	三角形的角和边	(25)
第七讲	三角形两边的和与差	(28)
第八讲	全等三角形(一)	(29)
第九讲	全等三角形(二)	(32)
第十讲	全等三角形(三)	(33)
第十一讲	综合练习、分析法	(35)
第十二讲	等腰三角形	(37)
第十三讲	直角三角形的性质和综合练习	(38)
第十四讲	轨迹	(40)
第十五讲	同一个三角形中的边角不等关系及反证法	(43)
第十六讲	两个三角形中的边角不等关系	(47)
第十七讲	综合练习、证题中的辅助线	(48)
第十八讲	关于几何作图的基本知识	(53)
第十九讲	较复杂的三角形作图	(56)
第二十讲	作图题的综合练习	(62)
第二十一讲	平行四边形	(65)
第二十二讲	三角形中位线定理及其逆定理、同一法	(66)
第二十三讲	特殊的平行四边形、对称	(71)
第二十四讲	梯形	(73)

第三章 相似形

一 内容提要.....	(75)
1 重要概念.....	(75)
2 图形的性质.....	(75)
3 图形的判定.....	(75)
4 作图方法.....	(76)
5 锐角三角函数的定义和解直角三角形.....	(76)
二 目的和要求.....	(76)
三 讲次及主要内容.....	(77)
第二十五讲 成比例的线段、平行截割比例 线段 (一)	(77)
第二十六讲 平行截割比例线段 (二)	(80)
第二十七讲 三角形内、外角平分线的性质.....	(83)
第二十八讲 相似多边形、相似三角形的判 定.....	(84)
第二十九讲 直角三角形的相似、相似三角形的 性质.....	(87)
第三十讲 勾股定理.....	(89)
第三十一讲 位似形与位似变换.....	(90)
第三十二讲 锐角三角函数的概念.....	(94)
第三十三讲 三角函数间的关系、三角函数 表.....	(98)
第三十四讲 解直角三角形	(102)

第四章 圆

一 内容提要	(104)
--------------	---------

1	概念	(104)
2	性质	(104)
3	判定定理	(105)
4	基本轨迹	(105)
5	作图	(105)
二	目的和要求	(106)
三	讲次及主要内容	(107)
第三十五讲	圆的基本性质(一)	(107)
第三十六讲	圆的基本性质(二)	(112)
第三十七讲	基本作图和综合练习	(114)
第三十八讲	直线与圆的相互位置关系、切线的性质(一)	(117)
第三十九讲	切线的性质(二)、三角形的内切圆与旁切圆	(120)
第四十讲	圆周角、归纳法	(123)
第四十一讲	作图和综合练习	(127)
第四十二讲	两圆的相互位置及性质	(130)
第四十三讲	作图和综合练习	(135)
第四十四讲	弦切角	(139)
第四十五讲	圆内角及圆外角	(142)
第四十六讲	圆幂定理	(144)
第四十七讲	基本作图与基本轨迹	(147)
第四十八讲	圆的内接四边形	(150)
第四十九讲	圆的外切四边形	(151)
第五十讲	等分圆周	(153)
第五十一讲	正多边形	(157)
第五十二讲	弧度制	(159)

平面几何小结

一、	一般法则	(160)
1	推理方式: 演绎、归纳	(160)
2	思考方法: 综合法、分析法	(160)
3	证明方法: 直接证明、间接证明	(160)
二	习题类型及证明途径	(161)
1	证明两线段相等	(161)
2	证明二角之相等	(162)
3	证明甲量倍于乙量	(162)
4	证二量之和或差等于第三量	(162)
5	证明二线平行	(163)
6	证明二线垂直	(163)
7	证明二线不等	(163)
8	证明两角不等	(164)
9	证明三线共点	(164)
10	证明三点共线	(164)
11	证明两弧相等	(165)
12	证明一线为圆之切线	(165)
13	证明四点共圆	(165)
14	证明四线段成比例 (或两线段之积 等于另二线段之积)	(165)
15	证明两圆相切	(166)
16	证明四边形为平行四边形	(166)
三	常用辅助线的添加方法	(166)
四	轨迹问题	(169)
五	作图问题	(170)

第五章 空间的平面和直线

一	内容提要	(172)
1	基本概念	(172)
2	基本性质	(172)
3	平行问题	(173)
4	直线与平面相交	(173)
5	平面与平面相交	(173)
6	小结	(173)
二	目的和要求	(173)
三	讲次及主要内容	(174)
	第五十三讲 立体几何序论	(174)
	第五十四讲 空间的直线和平面	(175)
	第五十五讲 直线与平面平行	(177)
	第五十六讲 平面与平面平行	(178)
	第五十七讲 异面直线所成的角	(178)
	第五十八讲 直线与平面垂直	(181)
	第五十九讲 直线与平面斜交(一)	(182)
	第六十讲 直线与平面斜交(二)	(184)
	第六十一讲 二面角、垂面(一)	(185)
	第六十二讲 垂面(二)	(187)
	第六十三讲 小结	(188)

第六章 简单的多面体与旋转体

一	内容提要	(192)
1	基本概念	(192)
2	基本性质	(192)

3	几种简单的多面体和旋转体的表面积和 体积公式·····	(192)
4	小结·····	(194)
二	目的和要求·····	(195)
三	讲次及主要内容·····	(195)
第六十四讲	棱柱(一)·····	(195)
第六十五讲	棱柱(二)·····	(197)
第六十六讲	棱锥(一)·····	(197)
第六十七讲	棱锥(二)·····	(200)
第六十八讲	棱台·····	(201)
第六十九讲	正多面体·····	(203)
第七十讲	五种正多面体·····	(205)
第七十一讲	圆柱、圆锥、圆台·····	(210)
第七十二讲	球、球扇形、小结·····	(211)

第一章 基础知识

这一章的主要内容包括以下两个部分：第一部分是介绍一些概念和基本性质；第二部分是介绍初等几何体系的结构，即，在公理的基础上，运用逻辑推理方法讨论图形的性质，初步培养推理论证的意识，并掌握证明命题的格式和步骤等。学员初次接触几何，常会觉得不习惯，因此，在引入概念及讨论性质的过程中，借助于一些直观的解释是必要的，但考虑到本讲座的主要对象多为成人的这一特点，从课程一开始就加强对概念明确性和推理严谨性的基本训练是必要的。

一 内容提要

1 概念

- (1) 直线、射线、线段；
- (2) 角及其度量、平角、周角、直角、锐角、钝角；互补、互余；对顶角、同位角、内错角、同旁内角；
- (3) 两直线的关系：相交，垂直，平行；
- (4) 点和点的距离，点到直线的距离；
- (5) 命题、判断、定理、公理、推论；
- (6) 基本元素、基本关系。

2 性质

- (1) 直线的性质：(a) 过两点能作且只能作一条直线；
- (b) 两点间的直线段最短；(c) 两直线相交时只有一个交

点。

(2) 角的性质: (a) 平角都相等; (b) 直角都相等;
(c) 周角都相等; (d) 对顶角相等。

(3) 垂线的性质: (a) 过一点只能作一条直线与已知直线垂直; (b) 直线外一点与直线上各点所连接的线段中, 以垂线段最短。

(4) 平行线的性质: (a) 过直线外一点仅能作一条直线与已知直线平行; (b) 平行线被第三线所截, 其同位角相等, 内错角相等, 同旁内角互补。

3 判定定理

(1) 两条直线被第三线所截, 且其同位角相等, 或内错角相等, 或同旁内角互补, 则这两条直线平行。

(2) 如果两条直线都和第三条直线平行, 则这两条直线互相平行。

4 作图

这一部分不讲严格的几何作图, 只提供某些尺规作图的方法, 而且不加证明。需要特别指出的是, 关于这些作图法的正确性的证明是完全必要的, 只是因为目前我们所学的内容还不够多, 要待到学了三角形的全等(合同)以后, 方能去证明它。把作图方法提前介绍给读者, 只是为了当前画图的方便。

(1) 作一个角等于已知角;

(2) 平分已知角(即作一角的平分线);

(3) 过直线上一点作垂线;

(4) 过直线外一点作垂线;

在这一部分内容的教学中, 我们坚持每一个新概念出现时, 都给出明确的定义。但是有几个定理, 课本上没有给出证明, 我们将在适当的时候, 予以补证。

二 目的和要求

在学习这一章的过程中，要首先掌握这一章所讲的概念以及平行线的判定定理和性质定理，了解和熟悉推理论证的必要性和方法，掌握基本作图方法，以便为进一步学习以后几章的几何知识和其他科学技术知识打下良好的基础。

本章的重点是：线段和角的概念；垂线、对顶角的概念和性质；平行线的判定定理及性质定理。

本章的难点是：理解所学的概念，解决从“数”的学习转入“形”的研究中所出现的不适应的情况，逐渐培养严密的逻辑思维能力。

三 讲次及主要内容

第一讲 序论、直线、线段和射线

主要内容

本讲的主要内容是几何学的研究对象和研究方法。

几何学是数学的一个重要分支，它的研究对象是现实世界的空间形式和数量关系，而且主要是空间形式。具体地说，几何学主要研究的是图形的性质和图形之间的相互关系，而这些图形一般都是从现实世界中抽象出来的。比如，在阳光灿烂的户外，树木、电线杆、行人、车辆，无不把它们的影子投射在地面上，但当我们把人和物的顶端与其影子的顶端连成一直线，

并把这些图形抽象成三角形的时候，就会发现这些三角形尽管大大小小参差不齐，但就形状而言，却都相似。进一步的研究使我们认识了这些图形的特点和度量上的数量关系。利用这些关系，就可以给出测量树高、电线杆等长度的简单易行的方法。又如，圆是我们最常见的图形，然而，等分圆周的问题，也要靠我们对这种图形的性质有了深入了解，才能很好地解决。

在对图形性质和图形关系的研究中，人们将所研究的结果，写成命题形式。命题就是用以叙述一个明确判断的完整语句。而所谓判断就是要对所描述的对象有所肯定和否定。比如：

- 1 三角形是直线形。 (直言肯定判断)
- 2 圆不是直线形。 (直言否定判断)
- 3 今天是晴天。 (直言肯定判断)
- 4 只要三个内角相等，它就是等边三角形。 (充分条件假言判断)
- 5 只有等边三角形，它的三个内角才相等。 (必要条件假言判断)
- 6 “四害”不除，国无宁日。 (充分条件假言判断)
- 7 明天不一定下雨。
- 8 四个边相等的图形不一定是正方形。

(1—6)都是判断。7、8两例，就不是判断。从上面的例子可以看出，只有对所描述的对象有所肯定和否定，才能成为判断。(7)、(8)两例对“明天的天气”如何，“四个边都相等的图形是什么图形”，没作出任何肯定和否定，因之不

能成为一个判断。一个命题就是一个判断的更完整的叙述。例如：

1 如果两个量都等于第三个量，那么这两个量相等。

2 等量加等量，和相等。

一个命题，一般由两部分组成：第一部分叫做假设或题设，包括所有给出的条件，第二部分叫结论或题断，是根据题设，经过判断得到的结论。例1中“两个量都等于第三个量”是题设，“这两个量相等”是题断。例2中，命题的语言被简化了，虽不出现“如果”、“那么”的字样，但题设仍应理解为“两个和的加数和被加数分别相等”是题设，“这两个和相等”是题断。

在几何学中，要证实一个命题的真确性，不能只依靠直观、测量和实验，更重要的是要利用推理的方法予以论证。这就是要在已有认识的基础上，根据题设条件，由已知真确的命题作为依据，运用正确的推理方法，证明结论的正确性，从而得到新的命题。几何学就这样从已有命题不断推出新命题，逐步实现对图形性质认识不断深化的目的，同时在不断认识新事物的过程中培养读者的逻辑推理能力。

至于推理方式，用得最多的是演绎推理。它是由普遍性的前提出发，推出特殊结论的一种推理方式。这种推理方式一般由三个判断组成，即，大前提、小前提、结论三个部分，因此也有“三段论”之称。例如：

1 三角形的三个内角和是 180° (大前提)

$\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 是 $\triangle ABC$ (小前提)

的三个内角。

所以， $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (结论)

2 历史上的一切阴谋家、野心家都没有好下

场。 (大前提)

“四人帮”是一伙阴谋家、野心家。 (小前提)

所以，他们也绝没有好下场。 (结论)

但是在几何学的论证过程中，为了使文字简练，层次清晰，作为一种固定的格局，常把大前提置于结论之后，作为推理的依据。如：

例1 $\because \triangle ABC$ 的三个内角是 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$,

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. ($\triangle$ 内角和为 180°)

日常语言中的三段论推理，也常有些简化，并且由修辞上的考虑而千变万化，如(2)例中的推理可表述为：

“四人帮”是一伙阴谋家、野心家，所以他们绝没有好下场。 (省略大前提)

历史上的阴谋家、野心家都没有好下场，“四人帮”也毫不例外。 (省略小前提)

然而几何中的推理，既成一定格局，就要严守章法，不能随心所欲地变动。对几何的初学者来说，这种基本训练尤其是必要的。

关于推理论证，还有下面两个问题必须加以说明：

1 在论证过程中所使用的概念必须有明确的意义，不能模棱两可，似是而非。就是说，每一个概念都必须有明确的定义，使人知道所指的是什么。每当出现新概念时，必须用旧有的已知概念去解释和说明它。

然而，要求一切概念都有所本，新概念都能用旧概念去解释，而旧概念又要有它自己的明确定义，这是不可能的。因为由复杂的概念回溯到较简单的概念，这个过程不能没有止境。所以必须指定一些最简单的、无须解释的、在运用过程中不会发生误解的概念，不加定义，用它们作为解释其他一切概念的