概周期微分方程与积分流形

林振声

上海科学技术出版社

概周期微分方程与积分流形

林　振　声

上海科学技术出版社

概周期微分方程与积分流形

林　振　声

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海群众印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 8　字数 192,000

1986 年 12 月第 1 版　1986 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—2,800

统一书号：13119·1122　　定价：2.00 元

内容提要

本书系统总结了作者在概周期微分方程研究中所取得的成果.

全书共三章. 第一章讨论线性微分方程组, 对拟周期线性系统, 推广了 Floquet 理论, 解决了国际上多年未解决的问题. 同时, 还对概周期线性系统建立了指数型二分法, 从而为概周期线性系统的定性与稳定性理论奠定了基础. 第二章介绍周期解概周期解的理论, 还介绍了作者关于拟线性和非线性系统的概周期解的摄动理论. 第三章介绍与概周期解密切相关的积分流形理论, 其中包括各种形式的方程组的积分流形的存在性、稳定性以及平均法的应用等.

本书可供高等学校数学系高年级学生和研究生阅读.

序

从第一近似方法的观点来看，到目前为止，微分方程理论基本上以常系数线性系统及周期系数线性系统为基础. 从同一观点出发，要发展概周期非线性系统的理论，首先必须奠定概周期线性系统的基础. 因此作为本书的第一章安排了对线性微分方程系的探讨，目的在于建立概周期线性系统的理论. 在这一章中首先对拟周期线性系统推广了 Floquet 理论，证明了拟周期系统，当它的频率满足无理性条件时，是可约的，这就解决了多年来未解决的问题. 此外，还证明了，凡是拟周期线性系统，都可以通过同一频率的拟周期酉变换，化为三角型系统. 其次，对概周期线性系统建立了指数型二分法，借以代替常系数线性系统的优良性能，从而建立了概周期线性系统的基本理论. 这样就轻而易举地建立了谱的理论. R. J. Sacker 和 G. R. Sell 从斜积理论出发，也建立了指数型二分法，这是近年来在概周期微分方程领域的一项重要贡献. 因此在第一章后半部，介绍了 Sell 关于 Favard 性质的研究，使概周期的不变性阐述得更为完善.

第二章讨论周期解、概周期解的存在性及其摄动理论. 对摄动问题，作者采用了法坐标的方法，这样，概周期解的摄动问题基本上可以探讨清楚. 至于概周期解的稳定性问题，T. Yoshizawa

已有专著出版,因而在书中把它略去了.

根据作者的体会,讨论概周期解的问题,应该和积分流形相结合,这样做可获得更为完满的结果. 因此,第三章讨论了一般积分流形的存在性,并利用积分流形法讨论若干概周期解的问题. 在这里还解决了 J. K. Hale 的问题.

另外,讨论概周期微分方程,应着眼于含小参数的非线性问题,或者 Hamilton 系统的摄动问题,即探讨临界情况(线性部分有等于 0 的特征指数). 遗憾的是目前还未得到满意的结果.

本书初稿曾于 1979 年春在福州大学数学系举办的概周期微分方程与积分流形讲习班讲过一遍.此后,承参加讲习班的同志提出了许多宝贵的修改意见. 根据这些意见,作者全面地进行了修改. 与此同时,凡引进的成果都一一指出文章的作者,在全书最后还附上有关的参考文献. 为了使书中的主题安排得紧凑起见,初稿中有关概周期函数的性质放在书后作为附录.初稿修改后,曾于 1980 年在福州大学数学系作为研究生的专业课程讲过两个学期.通过教学实践,对书中某些不够简明之处和个别错误,作了进一步的修正. 对于以上诸同志以及本系应用数学教研室为出版本书所作的努力,作者谨致衷心的感谢.

1954 年, Kolmogorov 证明了 Hamilton 系统具有拟周期解以后,使 200 年前 Laplace 认为太阳系是永恒的这一重大发现,获得了合理的解释. 自此以后,概周期微分方程的研究工作更显得重要了.廿多年来,有关的文章不计其数,而且还有专著出版.从现有的工作来看,这方面的研究工作大体上限于讨论概周期解的存在性和稳定性,而且大都是用特殊的方法解决特殊的问题,缺乏统一的方法. 针对这种情况,希望在这方面能够建立较一般的理论,从而能够为祖国的“四化”贡献自己的一份微薄的力量,这是作者撰写本书的主观愿望. 可是由于作者的学识有限,并且仍感成书

匆促，因此，内容取舍安排不够妥当，甚至错误之处在所难免，至盼国内学者不吝指教，以便将来再进一步修改。

林振声

1982.3. 于福州大学

目　　录

第一章　线性微分方程系

§1　线性微分方程系的一般性质

线性微分方程系

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t) \tag{1.1}$$

可算是微分方程系中最简单的. 其中 x 是 n-向量, $f(t)$ 是 t 的 n-连续实向量函数, $A(t)$ 是 t 的 $n\times n$ 阶连续实函数方阵. 尽管线性微分方程系是简单的, 可是它在常微分方程理论中, 却起了极为重要的作用. 从历史来看, 往往借助于线性微分方程系解的性质, 来研究非线性微分方程系解的性质. 例如探讨振动的问题, 情况就是如此.

线性微分方程系代表了线性的振动, 它确定了线性振动的性质及其物理的明显属性. 关于充分地接近于线性振动的非线性振动问题, 它所对应的微分方程系, 就是方程右端含有小参数 ε 的非线性微分方程系, 当 $\varepsilon=0$ 时, 它退化为线性微分方程系. 处理这样的数学问题, 自然要依赖于线性微分方程系的理论.

到现在为止, 讨论微分方程系的积分曲线的性态, 尽管有各种不同的方法, 但很大一部分工作, 还是依赖于线性微分方程系的理论. 所谓第一近似的方法, 就是从线性系统的性质去探讨非线性解

的性质. 因此本书以较多的篇幅叙述线性微分方程系的理论.

本章的主要部分都是最近的成果.

当$f(t)\equiv 0$时,(1.1)成为齐次线性微分方程系

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x. \tag{1.2}$$

以下扼要叙述(1.2)的一般性质,作为本书的开端. 由于这些性质是众所周知的,故只叙述定理的命题,其证明从略.

定理 1.1 (1.2)的解构成n维实线性空间.

若(1.2)的一组解$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$构成$n$维线性空间$L(n)$的基底,就称这组解为(1.2)的基本解,称方阵

$$X(t)=(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$$

为(1.2)的基本方阵.

定理 1.2 (1.2)的n个解$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$构成$L(n)$的基本解的充要条件为方阵$X(t)=(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$的行列式$\det X(t)\neq 0$.

(1.2)的n个解$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$构成方阵

$$X(t)=(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$$

时,称$\det X(t)$为(1.2)的 Wronsky 行列式.

定理 1.3 (1.2)的 Wronsky 行列式$\det X(t)$满足恒等式

$$\det X(t)=\det X(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(s)ds\right), \tag{1.3}$$

其中$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(t)$为$A(t)$的对角线之和.

设$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$为(1.2)的$n$个解,取方阵$X(t)=(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$,那末

$$\frac{dX(t)}{dt}=A(t)X(t). \tag{1.4}$$

反之,若$X(t)$满足(1.4),则$X(t)$的列向量为(1.2)的解. 若$X(t)$为(1.2)的基本方阵,则$X(t)$必为正则方阵,因之(1.4)的

方阵解 $Z(t)$ 可表达为

$$Z(t)=X(t)C, \tag{1.5}$$

C 为常数方阵.

共轭线性系统 (1.2)的共轭微分方程系是指下面的微分方程系

$$\frac{dy}{dt}=-yA(t), \tag{1.6}$$

若 $x(t)$ 为(1.2)的解, $y(t)$ 为(1.6)的解, 则 $y(t)$ 与 $x(t)$ 的数量积

$$(y(t),\ x(t))=\sum_{i=1}^{n}y_i(t)x_i(t)$$

为一常数,这是因为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(y(t),\ x(t))&=\frac{d}{dt}(y(t)\cdot x(t))\\&=-y(t)A(t)x(t)+y(t)A(t)x(t)=0,\end{aligned}$$

所以 $$(y(t),\ x(t))=y(t)\cdot x(t)=C_0,$$

C_0 是常数. 如果 $X(t)$ 是 (1.2) 的方阵解, $Y(t)$ 是 (1.6) 的方阵解,那末

$$Y(t)\cdot X(t)=C,$$

C 为常数方阵.

在这一节里, 再叙述一个很有用的结果, 即以下的定理 1.4. 这定理是 S. P. Diliberto 建立的, 可参考 Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol. 1 (1950), 1~38.

定理 1.4 对线性系统(1.2),常存在正交方阵 $B(t)$, 通过变换 $x=B(t)y$ 使(1.2)化为

$$\frac{dy}{dt}=C(t)y,$$

其中 $C(t)$ 为三角型方阵. 若 $\|A(t)\|\leqslant M$, 则有 $\|C(t)\|\leqslant M$, M 为常数 ($A(t)$ 的模 $\|A(t)\|$ 表示 $A(t)$ 元素的平方和的开方, 今后所取向量模的意义, 也是如此的). 若 $A(t)\in C^{(s)}$, 则有 $B(t)\in$

$C^{(s+1)}$, $C(t)\in C^{(s)}$, s 为非负的整数.

证明 设 $X(t)=(x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t))$ 为 (1.2) 的基本方阵. 令

$$b_1(t)=x_1(t),\quad B_1(t)=\frac{1}{\|b_1(x)\|}b_1(t),$$

$$b_k(t)=x_k(t)-\sum_{j=1}^{k-1}(x_k(t),\ B_j(t))B_j(t),$$

$$B_k(t)=\frac{1}{\|b_k(t)\|}b_k(t),\ k=2,\ 3,\ \cdots,\ n.$$

那末
$$B(t)=(B_1(t),\ B_2(t),\ \cdots,\ B_n(t))$$
是正交方阵. 从 $B(t)$ 的取法得

$$B(t)=(x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t))P(t),$$

其中 $P(t)$ 是三角型方阵,它的对角线下方的元素为0. 若 $A(t)\in C^{(s)}$, 则 $X(t)\in C^{(s+1)}$, 因之 $B(t)\in C^{(s+1)}$. $P(t)$ 是三角型方阵, 所以 $\frac{dP(t)}{dt}$, $P^{-1}(t)$ 也是三角型方阵, 它们的对角线下方的元素是零.

现在令
$$x=B(t)y,$$
那末 $B^{-1}(t)=B^*(t)$, $B^*(t)$ 为 $B(t)$ 的转置方阵,而

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=\frac{dB^*(t)}{dt}x+B^*(t)\frac{dx}{dt}\\&=\left(\frac{dB^*(t)}{dt}B(t)+B^*(t)A(t)B(t)\right)y\\&=\left(-B^*(t)A(t)B(t)+\frac{dP^{-1}(t)}{dt}P(t)+B^*(t)A(t)B(t)\right)y\\&=\frac{dP^{-1}(t)}{dt}P(t)y=C(t)y.\end{aligned}$$

从上面得

$$C(t)=\frac{dB^*(t)}{dt}B(t)+B^*(t)A(t)B(t),$$

$$C(t)+C^*(t)=B^*(t)(A(t)+A^*(t))B(t),$$

因为 $B(t)$ 为正交方阵,所以

$$\|C(t)\| \leqslant \|C(t)+C^*(t)\| = \|A(t)+A^*(t)\| \leqslant 2M.$$

若 $A(t)\in C^{(s)}$, 又 $B(t)\in C^{(s+1)}$, 所以 $C(t)\in C^{(s)}$.

§2 常系数线性微分方程系

考虑线性微分方程系

$$\frac{dx}{dt}=Ax, \tag{2.1}$$

A 是常数方阵. 可设 A 是实的 Jordan 法式, 否则可以通过一个正则的线性变换, 而不改变解的渐近性态. 这时 $Y(t)=\exp(At)$ 是(2.1)的基本方阵. (2.1) 的解 $x(t, x_0, t_0)$ 满足 $x(t_0, x_0, t_0)=x_0$, 可表达为

$$x(t, x_0, t_0)=Y(t)Y^{-1}(t_0)x_0.$$

(甲) $Y(t)$ 的简单性质:

(i) $Y(t_1)Y(t_2)=Y(t_1+t_2)$;

(ii) $Y(t)Y(-t)=E$, 即 $Y^{-1}(t)=Y(-t)$;

(iii) (2.1)的任一基本方阵 $X(t)$ 具有关系式:

$$X(t)X^{-1}(\tau)=Y(t-\tau).$$

(乙) (2.1)的稳定性与系数的关系

可设方阵 $A=\operatorname{diag}\{B_1, B_2, \cdots, B_r, C_1, C_2, \cdots, C_s\}$,

$$B_j=\begin{pmatrix} \lambda_j & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad j=1, 2, \cdots, r,$$

$$C_k=\begin{pmatrix} D_k & & & 0 \\ E_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & E_2 & D_k \end{pmatrix}, \quad D_k=\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}, \ k=1, 2, \cdots, s.$$

$$E_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \beta_k>0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ s.$$

（i）若 A 有 m_1 个特征根，它们的实部小于 0，则(2.1)有 m_1 个独立解当 $t\to+\infty$ 时趋近于 0．若 A 有 m_2 个特征根，它们的实部大于 0，则(2.1)有 m_2 个独立的解当 $t\to-\infty$ 时趋近于 0．

（ii）如果 m_0 个 Jordan 块，它们的特征根为 0，那末(2.1)有 m_0 个独立解为常向量．

（iii）如果 A 有 s_0 个 Jordan 块，每块的特征根为 $\pm\omega_j i$，$\omega_j\neq0$，$i^2=-1$，则(2.1)有 $2s_0$ 个独立解以 $2\pi/\omega_j$ 为周期．

（iv）如果 A 的特征根的实部不等于 0，可设

$$A=\operatorname{diag}\{A_1,\ A_2\},$$

其中 A_1 为 $n_1\times n_1$ 方阵，它的特征根实部为负；A_2 为 $n_2\times n_2$ 方阵，它的特征根实部为正，$n_1+n_2=n$．这时

$$\begin{aligned}Y(t)&=\exp(At)=\operatorname{diag}\{\exp(A_1t),\ \exp(A_2t)\}\\&=\operatorname{diag}\{\exp(A_1t),\ 0\}+\operatorname{diag}\{0,\ \exp(A_2t)\}\\&=Y_1(t)+Y_2(t),\end{aligned}$$

且存在常数 K_0，$\alpha>0$ 使

$$\|Y_1(t)\|\leqslant K_0\exp(-\alpha t),\ t\geqslant0;$$
$$\|Y_2(t)\|\leqslant K_0\exp(\alpha t),\ t\leqslant0.$$

以下叙述非齐次线性系统的周期解的存在性．

定理 对于线性微分方程系

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t),\tag{2.2}$$

$f(t)$ 是 t 的连续向量函数，$f(t+\omega)=f(t)$，$\omega>0$．则(2.2)具有周期为 ω 的周期解，iff (iff 表示当且仅当)(2.2)具有有界解．

证明 $f(t)\equiv0$ 时，定理成立是明显之事．故可设 $f(t)\not\equiv0$．(2.2)的一般解可表达为

$$x(t,\ x_0)=Y(t)x_0+\int_0^t Y(t-s)f(s)ds;$$

$$Y(t)=\exp(At).$$

令 $x_1=Px_0+q$, $P=Y(\omega)$, $q=\int_0^\omega Y(\omega-s)f(s)ds$, $Px_0+q=x_0$ 对 x_0 有解, iff $x(t, x_0)$ 为(2.2)的周期解.

今证明 $Px_0+q=x_0$ 对 x_0 有解 iff (2.2)有有界解.

先证,如果 $Px_0+q=x_0$ 无解,则(2.2)的一切解都无界. 首先,可见 $P-E$ 为奇异方阵, 其中 E 为单位方阵. 这时必有向量 y 使 $y^*(P-E)=0$, $y^*q\neq 0$, 这里 y^* 为 y 的转置向量. 否则 q 为 $P-E$ 的列向量的线性组合,此与 $(P-E)x_0+q=0$ 无解的假设矛盾.

现在令

$$\begin{aligned}
x_1&=Tx_0=Px_0+q,\\
x_2&=T^2x_0=T(Px_0+q)=P(Px_0+q)+q,\\
&\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\\
x_k&=T^kx_0=P^kx_0+(P^{k-1}+P^{k-2}+\cdots+E)q,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

这时 $y^*P=y^*$, $y^*P^k=y^*$, 如果 $x(t, x_0)$ 为(2.2)的有界解,则 $x_k=x(k\omega, x_0)$ 有界, $k=1, 2, 3, \cdots$. 因之 y^*x_k 有界,可是

$$\begin{aligned}
y^*x_k&=y^*(P^kx_0+(P^{k-1}+P^{k-2}+\cdots+E)q)\\
&=y^*x_0+ky^*q
\end{aligned}$$

无界, 矛盾. 反之, 若 $(P-E)x_0+q=0$ 有解 x_0, 则(2.2)存在周期解,从而(2.2)有有界解. 证毕.

§3 周期系数的线性微分方程系

这一节的目的在于介绍 Floquet 理论. 也就是对周期线性微分方程系

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x, \tag{3.1}$$

其中 $A(t)\in C$, $A(t+T)=A(t)$, $T>0$, 可以通过连续、周期的正则线性变换,把(3.1)化为常系数的线性微分方程系.

定理 3.1 对(3.1)存在周期为 T 的连续、正则方阵 $Z(t)$, 使(3.1)施行变换 $y=Z(t)x$ 后,有

$$\frac{dy}{dt}=By, \tag{3.2}$$

其中 B 是常数方阵.

证明 设 $X(t)$ 为(3.1)的基本方阵. 由于

$$\frac{d}{dt}X(t+T)=A(t+T)X(t+T)=A(t)X(t+T),$$

所以 $X(t+T)$ 也是(3.1)的方阵解,于是有常数方阵 C 使

$$X(t+T)=X(t)C,$$

$X(t+T)$ 是正则方阵,推出 C 为正则方阵. 这样有常数方阵 B 使 $C=\exp(BT)$, 这里 B 的存在性的证明从略. 不过我们要指出, B 不一定是实方阵. 令

$$Z(t)=\exp(Bt)X^{-1}(t),$$

那末

$$\begin{aligned}Z(t+T)&=\exp(Bt)\exp(BT)X^{-1}(t+T)\\&=\exp(Bt)CC^{-1}X^{-1}(t)=Z(t).\end{aligned}$$

取 $y=Z(t)x$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=Z(t)A(t)x+\frac{dZ(t)}{dt}x\\&=\left(Z(t)A(t)Z^{-1}(t)+\frac{dZ(t)}{dt}Z^{-1}(t)\right)y,\end{aligned}$$

从
$$\frac{dZ(t)}{dt}Z^{-1}(t)=B-Z(t)A(t)Z^{-1}(t),$$

得
$$\frac{dy}{dt}=By.$$

上面说过常系数线性微分方程系(2.1)的稳定性,完全由它的系数方阵 A 的特征根确定. 一般来说,变系数的线性微分方程系