数学名著译丛

现代分析基础

第二卷

〔法〕J. 迪厄多内 著

科学出版社

数学名著译丛

现代分析基础

第二卷

〔法〕J. 迪厄多内 著

沈永欢 译

科学出版社

1986

内 容 简 介

本书为法国著名数学家 J. 迪厄多内关于现代分析的多卷集的第二卷，内容包括：拓扑补充知识和拓扑代数、积分、局部紧群上的积分、赋范代数与谱论。

本书从公理出发发展理论，论证严谨。书中附有大量问题，以便帮助读者加深理解。

本书译稿经南京大学苏维宜同志校订。

本书适于高等学校数学系高年级学生、研究生、教师和数学工作者阅读。

J. Dieudonné

Éléments d'analyse

2

Gauthier-Villars, 1974

数学名著译丛

现代分析基础

第二卷

〔法〕J. 迪厄多内 著

沈永欢 译

责任编辑 张鸿林

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1986年 3月第 一 版　开本：850×1168 1/32

1986年 3月第一次印刷　印张：16 1/4

印数：0001—4,800　字数：423,000

统一书号：13031・3082

本社书号：4421・13—1

定价： 4.55 元

符　号　表

在下列符号中，第一个数字指该符号所在的章数，第二个数字指节数.

Supp (f)	函数的支集：12.6
G°	群 G 的反群：12.8
φ_A	一个集的子集 A 的特征函数：12.7
$\sup\limits_{\alpha} f_\alpha$，$\inf\limits_{\alpha} f_\alpha$	实值函数族的上包络与下包络：12.7
$\lim\limits_{n\to\infty}.\sup f_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}.\inf f_n$	实值函数序列的上极限与下极限：12.7
$GL(E)$	拓扑向量空间 E 的自同构群：12.8
A^{-1}	$x^{-1}(x\in A)$ 的集，其中 A 是乘法群的子集：12.8
AB	$xy(x\in A, y\in B)$ 的集，其中 A 与 B 是乘法群的子集：12.8
$\mathscr{N}(H),\mathscr{Z}(H)$	群的子集 H 的正规化子与中心化子：12.8
V^{∞}	一个群的子集 V 的元的有限积 $x_1 x_2\cdots x_n$ (n 为任意)所成的集：12.8
Z_p	p-adic 整数集：12.9，问题 4
T_p	p-adic 螺线：12.9，问题 5
G/H，$H\backslash G$	群 G 中由 H 确定的左(右)陪集组成的齐性空间：12.10 和 11
$G\cdot A$	$A\subset E$ 的点对于 G 在 E 上的一个作用的轨道的并：12.10
E/G	由 G 确定的轨道所成的空间：12.10
$\mathscr{C}_{\mathbf{C}}(X)$	X 上的连续复值函数组成的空间：12.14

E/F	赋范空间 E 由它的向量子空间 F 所作的商赋范空间：12.14
$\langle x,x'\rangle,\langle x',x\rangle$　　$x'(x)$，	其中向量 $x\in E$，连续线性形式 $x'\in E'$（E 的对偶空间）：12.15
${}^t u$	连续线性映射 u 的转置：12.15
$U(E)$	Hilbert 空间 E 上的酉群：　12.15，问题 8
$\mathscr{K}(X;K)$，$\mathscr{K}_{\boldsymbol{C}}(X;K)$	其支集包含在紧集 $K\subset X$ 内的连续复值函数的空间：13.1
$\mathscr{K}(X)$，$\mathscr{K}_{\boldsymbol{C}}(X)$	在 X 上连续且具有紧支集的复值函数的空间：13.1
ε_x	点 x 处的 Dirac 测度：13.1
$g\cdot\mu$	关于 μ 以 g 为密度的测度：　13.1 与 13.13
$\pi(\mu)$	测度 μ 在正常连续映射 π 下的象：13.1 与 13.1，问题 8
$\mu_U,\mu\|U$	由测度 μ 在开集 U 上诱导的测度（或 μ 在 U 上的限制）：13.1
$M_{\boldsymbol{C}}(X),M(X)$	X 上的复测度空间：13.1
$\langle f,\mu\rangle,\mu(f)$，$\int f d\mu$，$\int f(x)d\mu(x)$	$f\in\mathscr{K}(X)$ 关于 μ 的积分：13.1
$\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X;K)$	其支集包含在紧集 $K\subset X$ 内的连续有限实值函数的空间：13.2
$\mathscr{K}_{\boldsymbol{R}}(X)$	在 X 上连续且具有紧支集的有限实值函数的空间：13.2
$\bar{\mu}$	μ 的共轭测度：13.2
$M_{\boldsymbol{R}}(X)$	X 上的实测度空间：13.2
$\mathscr{R}\mu,\mathscr{I}\mu$	复测度 μ 的实部与虚部：13.2
$M_+(X)$	X 上的正测度集：13.3

f^+, f^-	有限实值函数 f 的正部与负部：13.3
$\mu \leqslant \nu$	实测度之间的序关系：13.3
$\lvert\mu\rvert$	复测度 μ 的绝对值：13.3
$\mathscr{I}, \mathscr{I}(X)$	在 X 上下半连续且以属于 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$ 的某个函数为下界的函数组成的集：13.5
$\mu^*(f), \int^* f d\mu, \int^* f(x) d\mu(x)$	f 的上积分：13.5
$\sum_n t_n$	$\bar{R}$ 的非负元的序列 (t_n) 的和：13.5
$\mathscr{S}, \mathscr{S}(X)$	在 X 上上半连续且以属于 $\mathscr{K}_{\mathbf{R}}(X)$ 的某个函数为上界的函数组成的集：13.5
$\mu_*(f), \int_* f d\mu, \int_* f(x) d\mu(x)$	f 的下积分：13.5
$\mu^*(A), \mu_*(A)$	$A \subset X$ 的外测度与内测度：13.5
$\tilde{f}$	f（关于 μ）的等价类：13.6
$\tilde{f} \leqslant \tilde{g}$	等价类之间的序关系：13.6
$\tilde{f} + \tilde{g}, \tilde{f}\tilde{g}$	等价类的和与积：13.6
$\int f d\mu, \int f(x) d\mu(x), \mu(f), \langle f, \mu \rangle$	μ 可积函数 f 的积分：13.7
$\mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}(X, \mu), \mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}(\mu), \mathscr{L}^1_{\mathbf{R}}$	μ 可积(有限)实值函数的空间：13.7
$\mu(A)$	μ 可积集 A 的测度：13.7
$\mu(\tilde{f})$	等价类 $\tilde{f}$ 的积分：13.7
$\int_A f d\mu, \int_A f(x) d\mu(x)$	f 在 A 上的积分：13.9
$\int_A^* f d\mu$	f 在 A 上的上积分：13.9

μ_Y	μ在闭子空间Y上诱导的测度：13.9
$H(\alpha)$	有限划分α的熵：13.9，问题 27
$H(\alpha/\beta)$	有限划分 α 关于有限划分 β 的熵：13.9，问题 27
$\bigvee_{j=1}^{n}\alpha_j, \alpha_1\vee\alpha_2\vee\cdots\vee\alpha_n$	有限划分的有限序列的上确界：13.9，问题 27
$h(u,\alpha)$	映射u关于有限划分α的熵：13.9，问题 28
$h(u)$	映射u的熵：13.9，问题 28
$\int \boldsymbol{f} d\mu, \int \boldsymbol{f}(x) d\mu(x)$	向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 的积分：13.10
$\mathscr{L}^1_{\boldsymbol{C}}(X,\mu), \mathscr{L}^1_{\boldsymbol{C}}(\mu), \mathscr{L}^1_{\boldsymbol{C}}$	μ可积复值函数的空间：13.10
$N_1(f)$	$\int^* \lvert f\rvert d\mu$：13.11
$N_2(f)$	$\left(\int^* \lvert f\rvert^2 d\mu\right)^{1/2}$：13.11
$\mathscr{L}^2_{\boldsymbol{R}}(X,\mu), \mathscr{L}^2_{\boldsymbol{R}}(\mu), \mathscr{L}^2_{\boldsymbol{R}}$	μ平方可积（有限）实值函数的空间：13.11
$\mathscr{N}$	μ可忽略函数的空间：13.11
$L^p_{\boldsymbol{R}}(X,\mu)$，$L^p_{\boldsymbol{R}}(\mu), L^p_{\boldsymbol{R}}$	p幂可积函数的类组成的空间：13.11 与 13.11，问题 12
$N_p(\tilde{f})$	关于类$\tilde{f}$中任一函数f的$N_p(f)$：13.11
$\mathscr{L}^2_{\boldsymbol{C}}(X,\mu), \mathscr{L}^2_{\boldsymbol{C}}(\mu), \mathscr{L}^2_{\boldsymbol{C}}$	平方μ可积复值函数的空间：13.11
$L^2_{\boldsymbol{C}}(X,\mu)$，$L^2_{\boldsymbol{C}}(\mu)$，$L^2_{\boldsymbol{C}}$	平方 μ 可积复值函数的类组成的空间：13.11
$M_\infty(f), m_\infty(f)$	
$\operatorname{ess.sup}_{x\in X} f(x)$，$\operatorname{ess.inf}_{x\in X} f(x)$	f的依测度最大值与依测度最小值：13.12
$\mathscr{L}^\infty_{\boldsymbol{R}}(X,\mu), \mathscr{L}^\infty_{\boldsymbol{R}}(\mu), \mathscr{L}^\infty_{\boldsymbol{R}}$	依测度有界μ可测有限实值函数的空间：13.12

$\mathscr{L}_{C}^{\infty}(X,\mu),\mathscr{L}_{C}^{\infty}(\mu),\mathscr{L}_{C}^{\infty}$	依测度有界 μ 可测复值函数的空间：13.12
$L_{R}^{\infty}(X,\mu),L_{R}^{\infty}(\mu),L_{R}^{\infty}$	依测度有界 μ 可测有限实值函数的类组成的空间：13.12
$L_{C}^{\infty}(X,\mu),L_{C}^{\infty}(\mu),L_{C}^{\infty}$	依测度有界 μ 可测复值函数的类组成的空间：13.12
$\mathscr{S}(X,\mu)$	μ 可测(有限)实值函数的空间：13.12，问题 2
$S(X,\mu)$	μ 可测(有限)实值函数的类组成的空间：13.2，问题 2
$\mathscr{L}_{\mathrm{loc},R}^{1}(X,\mu),\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(X,\mu)$ $\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}(X),\mathscr{L}_{\mathrm{loc}}$	局部 μ 可积有限实值函数的空间：13.13
$\mathscr{L}_{\mathrm{loc},C}^{1}(X,\mu)$	局部 μ 可积复值函数的空间：13.13
$L_{\mathrm{loc},R}^{1}(X,\mu)$, $L_{\mathrm{loc},C}^{1}(X,\mu)$	局部 μ 可积有限实值(复值)函数的类组成的空间：13.13
$\int f d\lambda$, $\int f(x) d\lambda(x)$	f 关于复测度 λ 的积分：13.16
$\mathrm{Supp}(\mu)$	测度 μ 的支集：13.19
$\Vert\mu\Vert$	测度 μ 的范数：13.20
$M_{R}^{1}(X),M_{C}^{1}(X)$	有界实(复)测度空间：13.20
$\mathscr{C}_{R}^{0}(X)$, $\mathscr{C}_{C}^{0}(X)$	在无穷远处趋于 0 的有限实值(复值)连续函数的空间：13.20
$\int d\mu(y)\int h(x,y)d\lambda(x)$, $\iint h d\lambda d\mu$, $\iint h(x,y)d\lambda(x)d\mu(y)$	h 关于乘积测度 $\lambda\otimes\mu$ 的积分：13.21
$\lambda\otimes\mu$	乘积测度：13.21

• • •

$\rho(x)$	x 的谱半径：15.2
$\boldsymbol{X}(A)$	代数 A 的谱：15.3
$\mathscr{G}$	Гельфанд 变换：15.3
$\mathscr{H}^p(\mu), \mathscr{H}^\infty(\mu)$, $H^p(\mu), H^\infty(\mu)$	Hardy 空间：15.3，问题 15
x^*	对合代数的元 x 的伴随元：15.4
$\Vert u\Vert_2$	Hilbert-Schmidt 范数：15.4
$\mathscr{L}_2(E)$	Hilbert-Schmidt 算子代数：15.4
$\check{\mu}$	$M_C^1(G)$ 中的对合：15.4
$p(x), p_A(x)$	$(\rho(x^*x))^{1/2}$：15.4，问题 18
$U_b(x), U_A(x)$	完备 Hilbert 代数的正则表示：15.8
$\boldsymbol{H}(A)$	Hermite 特征标空间：15.9
$M_\mu(u)$	乘以 u 的类的乘法：15.10
$H \geqslant 0$	对一切 x 有 $(H \cdot x \mid x) \geqslant 0$：15.11
$f(N)$	正规算子的函数：15.11
$\mathscr{U}c(K)$	在 K 上普遍可测且有界的复值函数的空间：15.10
$H^{1/2}$	正 Hermite 算子 H 的平方根：15.11
$\operatorname{abs}(T)$	算子 T 的绝对值：15.11，问题 6
$\operatorname{Tr}(T)$	核子算子 T 的迹：15.11，问题 7
$\Vert T\Vert_1$	核子范数：15.11，问题 7
$\mathscr{L}_1(E)$	核子算子空间：15.11，问题 7
$\operatorname{Spa}(T)$	算子 T 的逼近点谱：15.11，问题 9
$\operatorname{dom}(T)$	无界算子 T 的定义域：15.12
T^*	定义域为稠密的无界算子 T 的伴随算子：15.12
$\operatorname{Sp}(T)$	无界算子 T 的谱：15.12
$f(N)$	无界正规算子的函数：15.12

目 录

第十二章　关于拓扑的补充与拓扑代数

正如本书序言中所说，我们力求把本章叙述的关于拓扑的补充内容限制在读者所需的最小范围之内. 我们并不打算在一般拓扑的精致部分(滤系、一致结构、各种分离公理)上耽搁，而是尽快地进入可一致化空间的范畴，因为以后各章用到的将只是这种空间. 通常只是把这种空间看作便于处理的"环绕空间"，然而按照本书的意图，我们尤其对可分与可度量化的子空间感到兴趣. 为此在本章引入了可度量化与可分性的许多判断准则(12.3.6, 12.4.6, 12.4.7, 12.5.8, 12.9.1, 12.10.10, 12.11.3, 12.14.6.2, 12.15.7, 12.15.9, 12.15.10). 这些准则，连同 Baire 定理及其推论(12.16)，是本章中仅有的其证明并不那么直接的结果. 本章的其余内容，一部分是阐明第一卷中没有出现的纯拓扑技巧(单位分解(12.6)、半连续函数(12.7))；另一部分，占本章篇幅一半以上((12.8)到(12.16)各节)，用于阐明拓扑代数的基本概念(拓扑群、带算子空间、拓扑向量空间). 所有这些概念，在以后各章中都常用到.

1. 拓扑空间

如果由集 E 的子集组成的一个集(即 $\mathfrak{P}(E)$ 的一个子集) $\mathfrak{O}$ 满足下面两个条件，则称 $\mathfrak{O}$ 为 E 上的一个**拓扑**:

(O_{I}) 属于 $\mathfrak{O}$ 的集的任意族 $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ 的并仍属于 $\mathfrak{O}$.

(O_{II}) 集 E 属于 $\mathfrak{O}$，并且属于 $\mathfrak{O}$ 的任意两个集的交仍属于 $\mathfrak{O}$.

赋予一个拓扑 $\mathfrak{O}$ 的集 E，称为**拓扑空间**；E 的属于 $\mathfrak{O}$ 的子集称为拓扑空间 E 的**开集**. 在 (O_{I}) 中令 $L=\varnothing$，则得 E 的空集 $\varnothing$ 总是开集；且由 (O_{II}) 得知，E 自身也是开集.

(12.1.1) 例. 度量空间 E 的开集所成的集 $\mathfrak{O}$ 满足 (O_{I}) 与 (O_{II}) (3.5.2 与 3.5.3)；$\mathfrak{O}$ 称为度量空间 E 的拓扑（或称该拓扑由 E 上给定的**距离所确定**）；两个拓扑等价的距离 (3.12) 定义同样的拓扑. 如果某个拓扑空间的拓扑可由一个距离来定义，就把这个拓扑空间称为**可度量化的**(此时也把这个拓扑称为**可度量化的**).

在任意的集 E 上，集 $\mathfrak{O}=\{\varnothing, E\}$ 是一个拓扑（称它为**平庸拓扑**）；如果 E 至少含有两个元，则 E 上的平庸拓扑就不是可度量化的，因为否则就会存在含有其中一个元而不含有另一个元的开球，然而由于 E 是唯一的非空开集，所以这是不可能的.

在含有两个元的集 $E=\{a, b\}$ 上，$\mathfrak{O}=\{\varnothing, \{a\}, E\}$ 是一个不可度量化的拓扑.

设在同一集 E 上给出两个拓扑 $\mathfrak{O}_1$，$\mathfrak{O}_2$，若 $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{O}_2$，则称 $\mathfrak{O}_2$ **精于** $\mathfrak{O}_1$（或 $\mathfrak{O}_1$ **粗于** $\mathfrak{O}_2$）；若两个拓扑中有一个精于另一个，则称它们为**可比的**. 平庸拓扑粗于所有其他拓扑；**离散拓扑**(即由距离 (3.2.5) 所定义的拓扑，对于它有 $\mathfrak{O}=\mathfrak{P}(E)$) 精于所有其他拓扑. E 上的两个拓扑不一定可比. 例如，设 $E=\{a, b\}$ 是具有两个元的集，并考虑 E 上的两个拓扑 $\mathfrak{O}_1=\{\varnothing, \{a\}, E\}$ 与 $\mathfrak{O}_2=\{\varnothing, \{b\}, E\}$.

2. 拓 扑 概 念

我们已经注意到 (3.12)，对于度量空间，**闭集**、集的**触点**、集的**内点**、集的**边界点**、点(或集)的**邻域**、关于另一个集为**稠密**的集、**连续函数**、**同胚**等等概念，都是只从度量空间内开集的概念出发来定义的，因而可以把它们逐字逐句地照搬到任意拓扑空间上来.

此外，对于度量空间证明的有关这些概念的性质，其中在其陈述中不出现距离的那些命题（参阅 (3.5) 到 (3.12))，对拓扑空间仍然成立（因而我们将把这些命题推广到一般拓扑空间的情形），但有下面几个例外：

1° 性质 (3.8.11) 与 (3.8.12) 对任意拓扑空间不再成立，这

可由赋予拓扑 $\mathfrak{O}=\{\varnothing,\{a\},E\}$ 的空间 $E=\{a,b\}$ 看出. (在这两个性质的证明中，距离起了根本的作用，但在它们的陈述中，距离并没有出现.)

2° 我们可以象 (3.9) 中那样定义拓扑空间 E 的开集的**基**(也称为 E 的**拓扑基**)的概念；准则 (3.9.3) 在一般情形下仍然成立. 另一方面，如 (3.9.4) 那样，我们看到，如果关于拓扑空间 E 的拓扑存在一可数基，则在 E 内存在一处处稠密的至多可数的集；但对任意拓扑空间，这个命题的逆不再成立 (12.4 节，问题 6).

根据定义，拓扑空间 E 的拓扑基 $\mathfrak{B}$ 具有下述性质：

属于 $\mathfrak{B}$ 的两个集的交是属于 $\mathfrak{B}$ 的一些集的并.

反之，设 $\mathfrak{B}$ 是由任意集 E 的子集组成的一个集，它满足上述性质且有 $E\in\mathfrak{B}$，则属于 $\mathfrak{B}$ 的集的(任意)并所成的集 $\mathfrak{O}$ 是一个拓扑，而且 $\mathfrak{B}$ 是该拓扑的基，因为显见 $\mathfrak{O}$ 满足 $(O_{\rm I})$ 与 $(O_{\rm II})$.

设 E 是拓扑空间，F 是 E 的任一子集，则当 U 取遍 E 的开子集所成的集时，交 $U\cap F$ 所成的集满足公理 $(O_{\rm I})$ 与 $(O_{\rm II})$，因而它是 F 上的一个拓扑，称为由 E 上拓扑所**诱导的拓扑**；赋予这个拓扑的集 F，称为 E 的**子空间**. 在这样的定义下，除了 (3.10.9) 以外，(3.10) 中的所有性质对任意拓扑空间依然成立；而 (3.10.9) 必须陈述为：若 E 的拓扑具有可数基，则它在 E 的任一子集上的诱导拓扑同样具有可数基.

我们也已注意到，度量空间为紧或局部紧的性质只依赖于它的拓扑而不依赖于定义该拓扑的距离；因而我们可毫不含糊地谈论**紧可度量化空间**或**局部紧可度量化空间**.

我们还注意到，(3.19) 中关于**连通性**的所有定义与结果对任意拓扑空间都适用.

(12.2.1) 设 $\mathfrak{O}_1,\mathfrak{O}_2$ 是集 E 上的两个拓扑，则下列性质是等价的：

a) $\mathfrak{O}_2$ 精于 $\mathfrak{O}_1$；

b) 如果以 E_i 表示在 E 上赋予拓扑 $\mathfrak{O}_i(i=1,2)$ 所得到的拓扑空间，则 E_2 到 E_1 上的恒等映射连续；

c) 对每个点 $x\in E$，x 关于 $\mathfrak{O}_1$ 的每个邻域都是 x 关于 $\mathfrak{O}_2$ 的

邻域.

事实上，由连续性准则（3.11.4,b)）可得到 a) 与 b) 的等价性,而由连续函数的定义可得到 b) 与 c) 的等价性.

(12.2.2) **附注.** 设 $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是拓扑空间 E 的一个开覆盖 (3.16)，则为使集 $G\subset E$ 在 E 内是开的,必须且只须每个集 $G\cap U_\alpha$ 在子空间 U_α 内是开的;这可由公理 (O_{I}) 与 (O_{II}) 以及关系

$$G=\bigcup_{\alpha\in I}(G\cap U_\alpha)$$

立即得到. 通过取余集就可以推出: 为使集 $F\subset E$ 在 E 内是闭的,必须且只须每个集 $F\cap U_\alpha$ 在子空间 U_α 内是闭的.

(12.2.3) 设 L 是拓扑空间 E 的一个子集,则下列性质是等价的:

a) 对每个 $x\in L$，存在 x 在 E 内的邻域 V，使得 $L\cap V$ 在 V 内是闭的.

b) L 是子空间 $\bar{L}$ 的开子集,这里 $\bar{L}$ 是 L 在 E 内的闭包.

c) L 是 E 的某个开子集与某个闭子集的交.

显然 b) 蕴涵 c)，因为由 b)，L 是 $\bar{L}$ 与 E 的某个开子集的交. 显然由 c) 可推出 a). 最后，我们证明 a) 蕴涵 b)：对每个 $x\in L$，因为 $V\cap L$ 在 V 内是闭的,所以 $V\cap L=V\cap\bar{L}$；这表明在子空间 $\bar{L}$ 内，x 是 L 的内点,从而 L 在 $\bar{L}$ 内是开的.

当 L 满足 (12.2.3) 中的等价条件时，就把它称为 E 的**局部闭子集**.

(12.2.4) 定义拓扑空间的一种常用方法是"**粘合**"拓扑空间族 $(E_\lambda)_{\lambda\in L}$，使得在这样得到的拓扑空间 E 内,这些 E_λ 等同于 E 的开集;由于这些开集中每两个可能有非空交,所以这样的等同就要求对一切二元组 (λ,μ)，都给出 E_λ 的某个开子集到 E_μ 的某个开子集上的同胚.

明确地说,假定对每个二元组 $(\lambda,\mu)\in L\times L$ 给定了: 1° E_λ 的一个开子集 $A_{\lambda\mu}$；2° 一个同胚 $h_{\mu\lambda}$: $A_{\lambda\mu}\to A_{\mu\lambda}$，满足下列条件:

I) $A_{\lambda\lambda}=E_\lambda$，且 $h_{\lambda\lambda}$ 是恒等映射 1_{E_λ}；