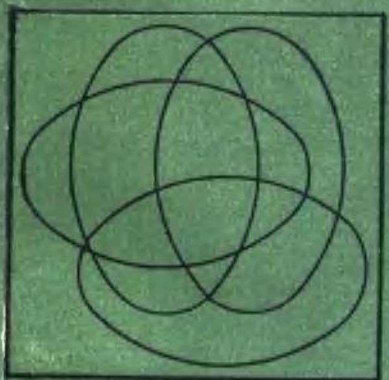
布尔代数与开关电路的
理论和习题

〔美〕伊里奥特·门德尔森 译

代正贵 余大海 江泽渠 校



四川教育出版社

布尔代数与开关电路的

理 论 和 习 题

〔美〕伊里奥特·门德尔森著
代正贵　余大海译
江　泽　渠　校

四 川 教 育 出 版 社
一九八五年·成都

责任编辑：余秉本
封面设计：邱云松
版面设计：刘　江

布尔代数与开关电路的理论与习题

四川教育出版社　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　自贡新华印刷厂印刷

开本850×1168毫米1/32　印张 9.5 字数 160 千
1985年4月第一版　1985年4月第一次印刷
印数：1—6080 册

书号：7344·1　定价：1.82 元

译者的话

本书根据〔美〕伊里奥特·门德尔森（ELLIOTT MENDELSON）所著：THEORY AND PROBLEMS OF BOOLEAN ALGEBRA AND SWITCHING CIRCUITS一书译出。它深入浅出地介绍了布尔代数和开关电路的基本内容与方法。本书包括逻辑代数、集合代数、开关电路和逻辑电路以及布尔代数一般理论，书中还编入了大量的习题并给出了解答。

本书可以作为高等师范院校学生及中学教师学习逻辑代数的参考书，对于计算机工作者和有关专业的研究生也有一定的参考价值。

一九八三年五月

序　　言

本书讨论：（1）开关电路和逻辑电路的组成和简化；（2）布尔代数理论。这是两个不同的但又互相联系的题目。

主要兴趣在开关电路和逻辑电路方面的读者可以很快地精读第一章，然后立刻阅读第四章。我们对开关电路和逻辑电路的讨论只限于组合电路，它在指定时刻的输出仅仅决定于输入的当前值而和输入的先前值无关。至于输出同时还取决于输入先前值的电路，即时序电路的理论，读者可以参看F·J Hill及G·R Peterson合著的《开关理论和逻辑设计引论》（参考书目34）；M·A Harrison 著的《开关和自动机理论导引》（参考书目33）和其他开关理论的书籍。

本书对布尔代数的处理比大多数初等的同类书籍略为深一些，它可以作为学习R·Sikorski 的《布尔代数》（参考书目148）及P·R Halmos的《布尔代数讲义》（参考书目116）这一类研究生水平教材的基础。

阅读本书不需要特别的预备知识，每章的第一部份详细论述有关的定义、法则和定理，同时给出例、图象、表格及其它直观的说明材料。第二部份是逐步加深的问题及其解答。第三部份是补充题。给了解答的问题进一步说明和丰富理论，突出某些细微之点，如果忽略了这些细微之点，读者就会觉得难于透彻掌握本书内容。同时，这些问题也是对一些基本法则的复习，为了卓有

成效的学习，这些基本法则是至关重要的。我们还编入了几个和近世代数及点集拓扑有关的问题，补充题可以作为每章的总复习，比较困难的问题用D加在该题编号的右上方表示。

为了查阅方便，本书后面附有详尽的书目，这些书目可以分成两部份：第一部分是开关电路、逻辑电路和极小化问题；第二部分是布尔代数及有关课题。书目中列举了许多本书中未明显提到的文章和书籍，这是为了帮助那些想进一步深入到自己专题中去的读者。

纽约市立大学昆士学院

伊里奥特·门德尔森

目　录

第一章 逻辑代数

1.1 真值函数运算

有多种途径对命题进行运算*以组成新的命题，我们只讨论那些同数学和其它科学最有关的命题运算，即真值函数运算。一个命题运算，如果其结果命题的真值(真或假)** 由构成它的那些命题的真值所决定，则称为真值函数运算。研究真值函数运算的学科叫做命题演算，或按流行的说法，叫逻辑代数，它的主要内容是近代数理逻辑的一个分支。

常用的真值函数运算有以下几种：

否定

否定是真值函数运算的最简单而又普遍的例子。设A是一个命题，A的否定——非A的真值由A的真值确定：当A假时为真，当A真时为假。我们用特殊的记号 $\neg$ 表示否定，如此，$\neg$A表示否定A的命题。$\neg$A和A的真值间的关系可由右真值表清楚地表示出来：

A	$\neg$A
T	F
F	T

* 对事物表示判断的语句称为命题，只表示一个基本内容的命题叫做基本命题，由几个基本命题组合起来的命题叫复合命题，由一个或几个命题组成新命题的法则叫做命题运算。

**如果一个命题所表示的判断为真，则这个命题叫做真命题，否则叫做假命题，一个命题的真或假称为这个命题的真值。在命题运算中，命题A为真用A＝T表示，命题A为假用A＝F表示，而把T、F叫做命题的真值。

八

在这个真值表中，A下面的列给出了A的两个可能的真值T（真）和F（假），┐A下面的列分别填入┐A的相应真值.

合取

另一个真值函数运算是合取，我们用符号A&B表示（A和B的）合取.合取&的真值表如右图，由于对A和B的真值指派有四种可能，因此真值表中有四行，只有第一行当A和B都为真时，A&B有值T.

A	B	A&B
T	T	T
F	T	F
T	F	F
F	F	F

析取

英语中单词"或"的用法是含糊的，许多时候，"A或B"表示A和B中至少一个是真的，这包括了A和B两个都为真的情况，这里的"或"具有可兼的意思.例如，为了说明某个人的成功，我们可以说"他非常聪明或者非常幸运"，这显然不排除他既聪明又幸运这种可能性，可兼用的"或"在法律行文中往往表示为"和/或".

有时，"或"这个词也在不可兼的意义下使用.例如，"今天下午我将去溜冰或呆在家里学习"，显然，今天下午我不能既去溜冰又呆在家里学习.这种不可兼用法究竟是说话者的意图或者是听者的推断，常常很难由句子本身去确定.任何情况下，"或"字使用上的含糊都是科学应用的语言所不能允许的，必须对不同意义的"或"采用不同的记号*.由于数学论断中可兼"或"的出现更为经常，我们首先对它引入特别的记号.

我们用"A∨B"表示"A或B或两者"，在它的真值表中，使A∨B为假的唯一情况是A和B两个都假.式子A∨B叫做（A和B的）析取式.

A	B	A∨B
T	T	T
F	T	T
T	F	T
F	F	F

* 在一些自然语言中，对于可兼"或"和不可兼"或"有不同的词表示，例如，在拉丁语中，可兼意义的"或"用"Vel"，不可兼意义的"或"用"aut".

条件

在数学中，经常出现“若A则B”这样的表述，所以我们有必要明确相应的真值函数运算。显然，当A是T而B是F时，“若A则B”必是F，但是对其他情况（A是F或A和B两者皆为T的情况），自然语言(如英语)还没有明确的用法。事实上当A和B的意义无关时(例如，“如果牛奶的价格是每夸脱(相当于1.01市升）25美分，则满潮是今天下午8点”)，“若A则B”被看成是毫无意义的。

因此，如果我们希望把“若A则B”的构成法当作真值函数运算（即“若A则B”真值必须由A和B的真值确定)，我们就不得不超出通常的用法。现在我们引入→作为这种新运算的符号，用“A→B”表示“若A则B”。A→B叫做具有前提A和结果B的条件式。对于→的真值表现在只填了第三行，为了确定如何填写这个真值表的其余各项，我们可以讨论“若（C&D）则C”，这是一个恒真命题，当C是T而D是F时，（C&D）是F，因此在我们的真值表里，第二行应填T（因为(C&D）是F，C是T，而“若（C&D）则C”是T）。类似地，当C是F且D也是F时，（C&D）是F，因此第四行应是T。最后，当C是T而D也是T时，(C&D) 是T，第一行应是T，于是我们得到左边的真值表。

A	B	A→B
T	T	
F	T	
T	F	F
F	F	

A	B	A→B
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

注意：当且仅当A是T，B是F时A→B才是F。

为了使A→B的意义更清楚，注意A→B和（$\neg$A)$\vee$B总有相同的真值（即在A和B的四种可能的真值指派下都有相同的真值），因此A→B的直觉意义是“非A或B”，这正是近代数学赋予

"若A则B" 的意义。

只要A是F，不管B的真值如何，命题$A\to B$是T，同时，只要B是T，$A\to B$也必是T而不管A的真值如何。对这两种情况，我们说$A\to B$因A假或因B真而为平凡真。

例1·1　命题$2+2=5\to 1\neq 1$和$2+2=5\to 1=1$两者都是平凡真的，因为$2+2=5$是假的。

双条件

现在我们再引入一个特殊的符号来表示另一个真值函数运算，用$A\longleftrightarrow B$表示"A当且仅当B"。A当且仅当B.我们理解为A和B有相同的真值（即如果A是T，则B也是T，反过来也一样），因此"$\longleftrightarrow$"有右边的真值表。

A	B	$A\longleftrightarrow B$
T	T	T
F	T	F
T	F	F
F	F	T

形如$A\longleftrightarrow B$的命题叫做双条件命题，注意$A\longleftrightarrow B$与$(A\to B)\&(B\to A)$恒取相同的真值，在数学上通过证明$A\to B$和$B\to A$而推出双条件命题$A\longleftrightarrow B$的方法也反映出这一点。

1.2　联结词

到现在为止，我们介绍了五个真值函数运算并且为它们引入了五个特别的记号：¬、&、∨、→、⟷。显然，如果我们只限于两个变元，则一共有$2^4=16$个不同的真值函数运算，因为两个变元的真值指派有四行（如右表），每一个真值函数在每一行可以取T或F中的一个值，因此有2·2·2·2个二元真值函数运算。

A	B	
T	T	-
F	T	-
T	F	-
T	F	-

对于任意一个真值函数运算（即相应于任意一个真值表），

我们可以引入一个特殊符号来表示，这个符号叫做联结词。符号：┐、&、∨、→、⟷都是联结词。对实际应用来说，这五个联结词已经足够了。

例 1·2　我们用联结词＋来表示不可兼"或"运算，它的真值表如右图。

A	B	A＋B
T	T	F
F	T	T
T	F	T
F	F	F

1.3　语句式

为了研究真值函数运算的性质，我们引入下面的概念。

由语句字母A、B、C、…、A_1、B_1、C_1、…有穷次使用联结词┐、&、∨、→、↔而构成的表达式叫做关于联结词┐、&、∨、→、↔的语句式。更准确地说，语句式是指下面两种形式：

（1）所有的语句字母（有或者没有正整数足标）都是语句式。

（2）如果A和B是语句式，则（┐A）、（A&B）、（A∨B）、（A→B）和（A↔B）也是语句式*。

显然，我们也可以定义任意新给定的联结词的语句式，只要在上面第（2）条中用给定的联结词代替┐、&、∨、→、↔就行了。

1.4　括号

在写语句式时需要括号是很显然的，象A∨B&C这样的表达

---

*更严格的定义是：B是一个语句式当且仅当存在有穷序列A_1，…，A_n满足：

（1）A_n是B；

（2）如果1≤i≤n，则A_i是一个语句字母，或者存在j，k＜i使A_i为（┐A_j）、（A_j&A_k），（A_j∨A_k），（A_j→A_k），（A_j↔A_k）中的一个。

式可能指（（A∨B）&C），也可能指（A∨（B&C)），而这两个语句式在任何意义下都是不相等的。

括号虽然是需要的，但在许多情况下也可以省去。为此，我们采取下面省略括号的规定。

（1）每个不只是一个语句字母的语句式在外层有一对括号，我们可以省去这一对括号而不至于引起混淆。例如，我们把((A∨B）&（¬C））写成（A∨B）&（¬C）。

（2）省去括着否定的一对括号。例如，我们把(¬A)∨C写成¬A∨C。这样写不会同¬（A∨C）相混，因为后者的括号不能省去。同样地，语句式（A&B）∨（¬(¬（¬B）））可以写成（A&B）∨¬¬¬B。

（3）对任意一对联结词，我们采取向左结合的原则。例如，A&B&C表示（A&B）&C，A→B→C表示（A→B）→C。

例1.4 利用上面的（1）—（3），下面左边的语句式可以写成右边等价的表达式：

((¬(¬(A&C)))∨（¬A))	¬¬（A&C）∨¬A
((A∨(¬B))&(C&(¬A)))	(A∨¬B)&(C&¬A)
(((A∨(¬B))&C)&(¬A))	（A∨¬B）&C&¬A
((¬A)→(B→(¬(A∨C))))	¬A→(B→¬(A∨C))

附录A将给出更广泛的省略括号的规定，同时，附录B还介绍了一种书写语句式的方法，可以完全不使用括号（但认读起来要复杂得多）。

1.5 真值表

每个语句式A定义了一个真值函数，即对A中语句字母的每个真值指派，可以确定A本身相应的真值，A和各语句字母的真值之间的关系可以用真值表表示出来。

例1.5 语句式(¬A∨B）⟷A有真值表

A	B	┐A	┐A∨B	(┐A∨B)⟷A
T	T	F	T	T
F	T	T	T	F
T	F	F	F	F
F	F	T	T	F

表中每一行相应于语句字母的一个真值指派，而各列则逐步给出了构成给定语句式时所出现的部分语句式的真值。

例1.6　语句式（A∨（B&C))→B有真值表

A	B	C	B&C	A∨(B&C)	(A∨(B&C))→B
T	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F
F	F	T	F	F	T
T	T	F	F	T	T
F	T	F	F	F	T
T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	T

当有三个语句字母时，真值表有8行，一般地，有n个语句字母时，真值表有2^n行，因为对每个语句字母都有两种可能的指派：T或F。

简化真值表

构成一个语句式所使用的最后一个联结词叫做这个语句式的主联结词。例如(A∨B)→C的主联结词是→，A∨（B→C）的主联结词是∨，┐(A∨B)的主联结词是┐。

真值表可以如下简化，我们只写出给定的语句式，不再对组成此语句式的每个部份语句式进行分列，而在每个部份语句式的主联结词下写出该部份的真值。

例1.7 作$(\neg A\vee B)\longleftrightarrow A$的简化真值表。我们从图①的真值表开始，注意，语句字母每出现一次都要重复一次对它的真值指派。

①

(¬	A	∨	B)	⟷	A
	T		T		T
	F		T		F
	T		F		T
	F		F		F

② 然后填写否定部份的值

(¬	A	∨	B)	⟷	A
F	T		T		T
T	F		T		F
F	T		F		T
T	F		F		F

③ 接着填写析取部份的值

(¬	A	∨	B)	⟷	A
F	T	T	T		T
T	F	T	T		F
F	T	F	F		T
T	F	T	F		F

④ 最后，填写双条件的值

(¬	A	∨	B)	⟷	A
F	T	T	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	F	F

我们使用四个分开的图表只是为了说明问题，实际上所有的工作可以在一个图表上完成。

1.6 重言式和矛盾式

一个语句式A，如果对于语句字母的所有真值指派恒取值T，则A叫做重言式。显然，A是重言式当且仅当在它的真值表中A下面的列只含有T。