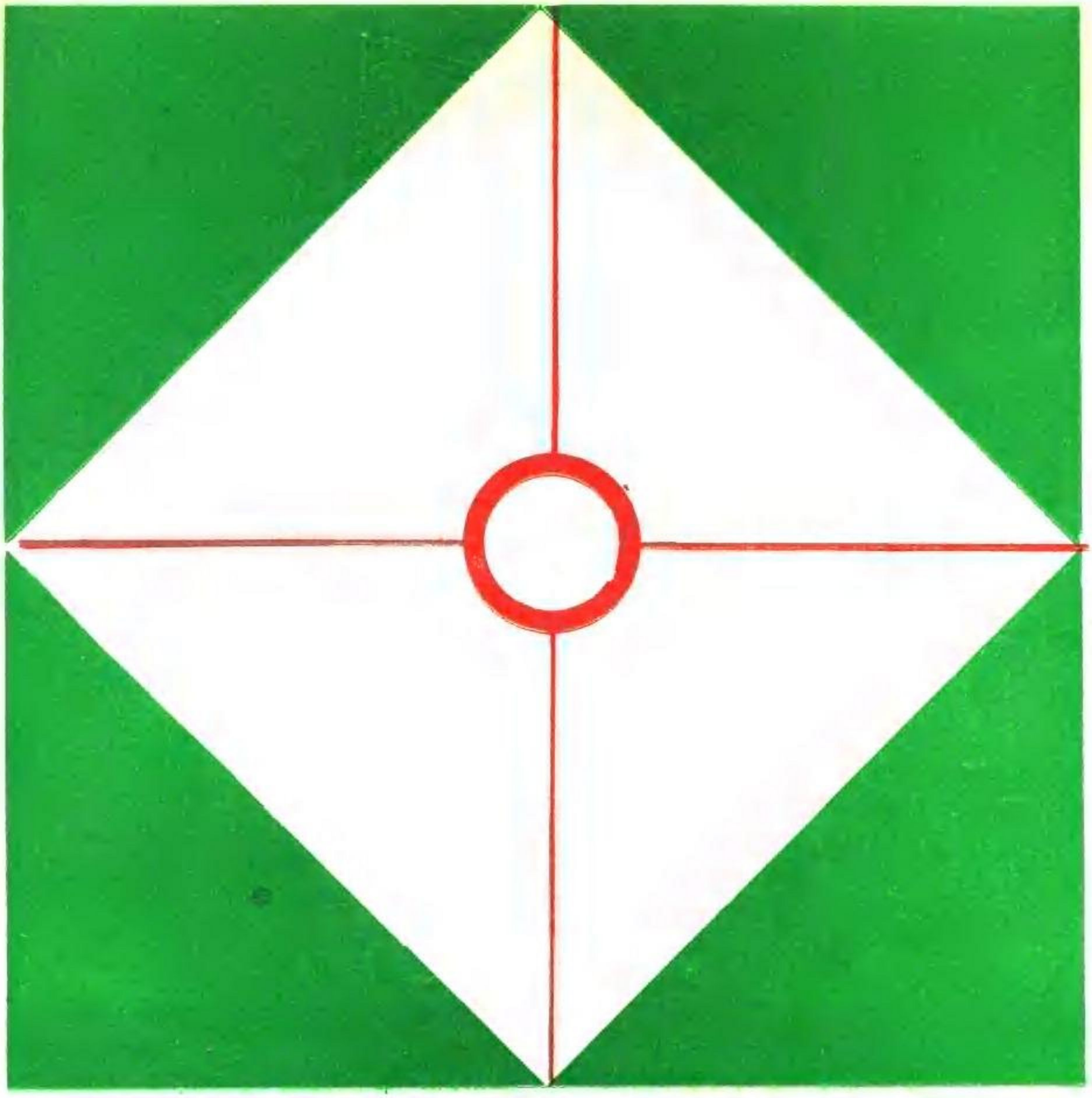

弹性固体力学

王俊奎　　丁立祚

中国铁道出版社

弹性固体力学

王俊奎　　丁立祚

中国铁道出版社
1990年·北京

内 容 简 介

本书保持经典弹性力学中成熟的和有用的基本理论部分，并增加近代发展起来的有实用价值和比较成熟的新理论和新学科，例如变分法、差分法，有限元法以及复合材料力学和断裂力学等。对基本理论的发展简史有扼要叙述。

读者对象：理工科高等院校高年级大学生、研究生以及科学研究、工程设计人员。

弹 性 固 体 力 学

王俊奎　　丁立祚

中国铁道出版社出版、发行

责任编辑　王能远　　封面设计　翟　达

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092毫米 $\frac{1}{16}$　印张：29.5　字数：740千

1990年5月　第1版　第1次印刷

印数：1—1500册

ISBN7-113-00564-0/TU·136　定价：12.65元

前　言

无论是固有的自然界，还是人类对自然界的改造，都处处存在着固体力学的问题，例如星体的冲击，地壳的变化，以及人类的抗敌工具、生产工具、生活工具的制造、都离不开固体力学的概念、原理、理论或计算方法。只有认识与不认识、先进与落后的差别，不存在有无固体力学的问题。

弹性力学又称弹性理论，是固体力学的一个重要分支学科，也是其他固体力学诸分支学科的基础，例如材料力学、结构力学、塑性力学以及交叉学科和边缘学科，都与弹性力学密切相关。虽然有些人认为经典的弹性力学已经形成了一个固定体系和标准内容，但是近些年来，知识界出现了一些新情况，初学弹性力学的人还希望同时得到有关近代力学如复合材料力学和断裂力学的基础知识。为此，这本书就试将这二个学科的基本内容写了进去，以满足人们的需要。为了与所谓经典的弹性力学加以区别，本书就定名为弹性固体力学。

弹性固体力学的内容，是研究弹性物体在外界因素（荷载、温度、湿度等）作用下的应力场、应变场以及有关的破坏规律。对于弹性固体力学求解时，可用数学与实验相结合的方法，即根据实验-理论-再实验这个公式去进行。在理论工作中，先选定力学模型，然后用数学建立几何方程、应力-应变关系、平衡（静力或动力的）微分方程，最后利用这些方程以及具体问题中存在的边界条件和动力问题中的初始条件，求出 μ_i，ε_{ij}，σ_{ij}（i，$j=1$，2，3）等15个位移、应变和应力分量。这方面的研究，构成了以数学方法为主要手段的理论工作。当然还有实验及实验方法，用以验证理论工作的可靠性和解决用数学方法难于解决的复杂和困难的固体力学问题。在具体问题中要灵活运用数学手段，上述15个分量可能不需要全部求出，只须解出其中若干个量即能满足问题的要求，并且有时精确解求不出来，还须考虑利用实验的结果求得数学计算的近似解。

1984年夏，我们开设了一个弹性固体力学的暑期短训班。为此，先写了一本讲义，在此基础上，经过修改补充，完成了这本书的撰写工作。在撰写本书时，预先作了一个撰写内容计划并希望突出下列几个特点：

（一）保持经典弹性力学中成熟的和有用的基本理论部分，并增加近代发展起来的有实用价值和比较成熟的新理论和新学科，例如变分法、差分法、有限元法以及复合材料力学和断裂力学等。概念和理论的描述，由浅入深、循序渐进，一般遵循一维、二维和三维这个顺序。我认为这是符合读者的认识规律的。

（二）本书以基本概念、基本理论和解题的分析方法为主，例题、习题为副，并注意深入浅出，理论联系实际，使学工科的读者能够对理论深入了解，学理科的读者能够把理论应用于实际问题中。因此，在书中的重点和难点的地方。加入一些有典型性的范例，进行分析和计算，以求读者比较透彻地和巩固地掌握所学的基本理论与培养独立解决实际问题的能力。

（三）对基本理论的发展简史，本书给以扼要的介绍，使读者能够了解弹性固体力学的发展历程、时代背景以及理论与实践的关系，借以起到一个温故知新，进而发展旧理论和创造新理论的作用。

（四）本书可以作为高等理工科院校高年级大学生、研究生以及科学研究、工程设计人员的教科书和参考书。

预先作了如上的设想．希望本书具有自己的特点，但是由于编写时间仓促，考虑不够周善，形成若干不尽如意之处。对于失误与不妥的地方，请同行贤达及时给以指教。

王俊奎　丁立祚

一九八八年七月二十九日

目　录

第一章　绪论及基本概念

§1.1　弹性固体力学研究的范畴和目的

弹性固体力学是研究弹性固体在外力作用下所产生的变形和应力之间变化规律的一门经典力学学科。所谓弹性，是指物体加外力后的应变与应力之间有单值函数关系，并且在除去外力后它能恢复原来的形状而不遗留任何痕迹。所谓外力可分为表面力和体积力，二者也分别简称为面力和体力。面力是指作用在所研究物体表面上的外力，例如流体压力，两固体相接触的力等。体力是指分布在所研究物体内部各质点的外力，例如物体本身重量，物体运动惯性力、电磁吸引力，温度变化等。

弹性固体力学与生产实际有密切的联系，它的基本理论是从生产实践和科学实验中概括总结出来的，并且都是经过实验检验证明是正确的，它所解决的问题也都是由生产活动所提供的，这一学科已经推动了许多学科的发展，并且也与新兴的学科技术密切相关的。例如飞机，火箭、导弹，人造卫星，桥梁、建筑，船舶、机械等现代结构设计都离不开弹性固体力学，也离不开具有弹性固体力学知识的大量高水平的科技人才。为了满足重量轻，变形小，经久耐用和经济效益高等结构设计的要求，就必须用高精度的弹性固体力学的方法来研究弹性固体的强度，刚度，稳定性与振动范围内的许多有关原理和解题方法，也就是说必须研究弹性固体在外力作用下的形变场与应力场以及破坏准则。弹性固体力学的理论来源于实践，反过来，理论又为实践服务。由于新兴科学技术的发展，弹性固体力学也在不断的发展和充实，但是它的基本概念，基本假设，基本方法应该说是很成熟的。

从工程结构的本身来讲，它研究的一维问题如杆、杆系，二维问题如板、壳，三维问题如无限大弹性体等；从工程材料来讲，它研究的各向同性材料如钢、铝、钛等合金和各向异性材料如纤维增强复合材料等；从理论来讲，它研究应变场、应力场、破坏准则等；从方法来讲，它有变分原理，有限元法，有限差分法，非弯曲理论，弯曲理论，扭转理论，应力集中，线性与非线性理论，稳定理论，振动与波动理论等。

弹性固体力学与材料力学相比，在研究对象、基本假设、研究方法等方面有相同的地方，也有不同的地方。由于基本假设与研究方法不尽相同，所得的结论也就有所不同。例如在材料力学中研究梁的弯曲，采用的是平截面假设，这只是在一定范围内接近于实际情况；若用弹性固体力学的方法去研究，一般说来，梁中正应力并不是沿梁高度按直线分布。对于非圆截面杆的扭转、圆孔附近的应力集中、无限大弹性体中的应力分布等问题，都不是材料力学的方法所能解决的，必须用弹性固体力学的方法来解决。

§1.2　弹性固体的力学模型

弹性固体（或称弹性体）的形状和材料性能有各种各样，因而要想用数学表示出它的一般规律和计算方法，就必须把复杂的现象给以简化和概括，依照抓住主要的略去次要的原

则，对弹性体的性质提出一些假设，从而形成典型的力学模型，当然，这些假设必须是与实际情况很接近或者完全符合，而不能主观臆造。

今提出一些主要的基本假设如下：

一、连续性——就是不考虑组成物体的各个分子的运动和原子结构，只认为物质是充满物体所占有的几何空间。有了连续性假设，我们就有可能利用连续函数这一类数学来处理。例如微分、积分和微分方程就是研究弹性固体力学的有力的工具。当然非连续体与离散体也出现在固体力学中，其定义与连续性定义正相反，在本书中如没有明确提出，就指物体为连续体。

二、自然应力状态——认为物体是处于自然状态，即在外力作用之前，物体内部没有初应力。也就是说，由弹性固体力学所求得的应力仅仅是由于外力所产生的。若物体中有初应力存在，就必须在研究问题前明确地指明。

三、均匀的各向同性和各向异性——就是认为物体内所有各点在任何方向上，其材料性能都是相同的，有了这个假设，我们在研究弹性固体力学中的物体受力后的微体平衡以及物体的弹性常数时，均不因其物体的大小、位置坐标和方向而变化，各向异性体也出现在固体力学中，此时它的弹性常数随物体本身的方向而改变，正交各向异性只在二个垂直方向上其数值不同。

四、小变形与大变形——小变形就是说与物体尺寸比较起来，变形将是非常小的。可以不考虑因变形而引起的尺寸变化。这样，就可以用变形以前的几何尺寸来代替变形以后的尺寸。还有，在小变形假设下，物体的变形和位移公式中将略去其二阶微量，从而使得几何变形线性化。大变形亦即非线性问题也是在讨论范围之内，特别是稳定性问题更为重要。

在本书中，如无特别说明，一般是指所研究的弹性固体为连续的，自然应力状态的，均匀各向同性的和小变形的等。

§1.3　有关弹性固体力学的基本方法

弹性固体力学是在上述连续性假设和弹性变形的范围内，通常用以下两种基本方法来处理问题：

一、经典的静力（动力学）-几何-物理关系的方法。

二、能量方法。

静力（动力学）-几何-物理关系方法中的几何方面是指描写变形及运动的几何方法。在弹性固体力学中主要用原来位置作为随体坐标来描写变形，这种坐标又称为拉格朗日（Lagrange1736—1813）坐标。对于弹性体如果应用牛顿(Newton）定律则可得到静力平衡方程，或动力——运动方程，再加上物性（或物理）关系，就是通常所称的广义虎克定律。它实质上是更一般的本构方程的一种简单的情况。这样就构成了经典的静力（动力）方程，几何方程，物理方程，连同必要的边界条件（静力问题）或边界条件与初始条件(动力问题)，组成整个弹性固体力学问题的体系。

能量方法——变分方法．相应于上述经典的基本方程体系，对于弹性固体力学可根据它所具有的椭圆型方程性质建立泛函条件极值性质的能量格式或称变分格式。这里的物性关系连同几何表达式都包含了变形能或余能项，而外力功则包含了边界条件的性质。对于动力学问题则可应用哈密尔顿（Hamiltion，W·R）原理的方式来建立。

这里应该指出，弹性固体力学的一种特殊情况，它在质量守恒方面（连续性方程）是与上述已提到的诸方程不相耦合的。它可独立地表示体积（密度）的改变。而在考虑热交换的情况下则还应建立热平衡方程，以及相应的温度边界条件和初始条件。

学习弹性固体力学时应对于这两个基本方法有一个统一的认识。这有助于在理论上明确，而进一步再作近似计算在解出具体问题时也是很有用的。

§1.4 通用符号及正负方向的规定

在弹性固体力学中，对于应变、应力、位移及弹性常数、有二种惯用的符号，兹介绍如下：

第一种符号为：σ表示正应力，τ表示剪应力，都是单位面积上所承受的力，如图1.1所示。凡力都有大小、方向和作用点。为了表明应力的作用方向和作用点，还要加上坐标下标。例如，正应力σ_x是作用在垂直于x轴的面上，沿着x轴的方向作用的。剪应力τ_{xy}有两个下标，前一个表明作用面是垂直于x轴，后一个下标是表明作用方向沿着y轴。

为了今后在数学上易于处理问题和在计算结果上便于识认真实情况，首先要规定一系列适宜的、惯用的正负方向：

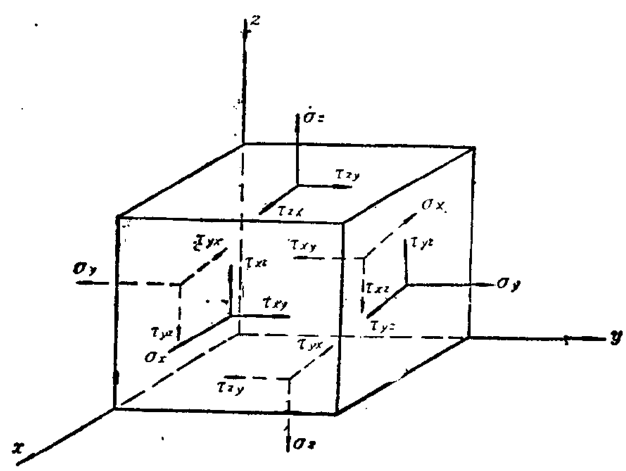

图 1.1

如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个截面就称为一个正面，而这个面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。相反，如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个截面就称为一个负面，而这个面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图中所示的应力分量全部都是正的。注意，虽然上述正负号规定，对于正应力是和材料力学中的规定相同的（拉应力为正而压应力为负）但对于剪应力却与材料力学的规定不完全相同。

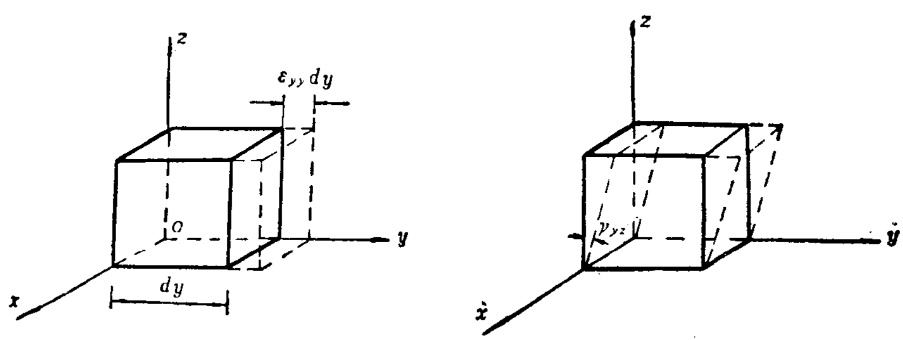

图 1.2

以ε表示正应变，γ表示剪应变，亦用与上述应力相类似的下标，例如ε_{yy}或(ε_y)表示方向与y轴平行的正应变，γ_{yz}表示发生在与坐标面y_oz平行的一个平面内，如图1.2所示的剪应

变，是一个角度；由此类推，共有三个正应变 ε_{xx}，ε_{yy}，ε_{zz}（或ε_x，ε_y，ε_z）与三个剪应变 γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{zx}。这六个量称为应变分量。

正应变以伸长为正，剪应变以使直角变小为正，图1.2所示的ε_{yy}与ε_{yz}都是正的。

拉压及剪切模量分别以E及G表示，泊松（S·D·Poisson）系数以ν表示，与材料力学的定义相同。

位移在x，y，z三个方向上的投影，分别以u，v，w表示，称为位移分量。

二种符号列表对照如下：

应力分量、应变分量				弹性常数	
一	二	一	二	一	二
σ_x	σ_{11}	ε_{xx}	e_{11}	E	E
σ_y	σ_{22}	ε_{yy}	e_{22}	μ, G	μ, G
σ_z	σ_{33}	ε_{zz}	e_{33}	ν	ν
τ_{xy}	σ_{12}	γ_{xy}	e_{12}		
τ_{yz}	σ_{23}	γ_{yz}	e_{23}		
τ_{zx}	σ_{31}	γ_{zx}	e_{31}		

本书中采用的是第一种符号。第二种符号便于运用张量计算。张量运算是在解决固体力学问题中常遇到并且很有用的数学工具。现在有专门著作讨论张量分析和应用①。本书不再介绍。

§1.5 弹性固体力学的发展简史

自然界中存在着大至天体小至粒子的固态物体和各种固体力学问题。人所共知的山崩地裂、沧海桑田都与固体力学有关。现代工程中，无论是飞行器、船舶、坦克，还是房屋、桥梁、水坝、原子反应堆以及日用家具，其结构设计和计算都要应用固体力学的原理和计算方法。由于工程范围的不断扩大和科学技术的迅速发展，固体力学也在发展，一方面要继承传统的有用的经典理论，另一方面为适应各门现代工程的特点而建立新的理论和方法。固体力学的发展过程可分为三个时期：

萌芽时期 远在公元前二千多年前，中国和世界其他文明古国就开始建造了有固体力学思想的建筑物、简单的车船和狩猎的工具等。中国在隋开皇中期（公元591～599年）建造的赵州石拱桥，已蕴含了近代杆、板、壳体设计的一些基本思想。随着实践经验的积累和工艺精度的提高，人类在建造房屋、桥梁和船舶等方面都不断取得辉煌的成就。但早期的关于强度计算和经验估算等方面的许多资料没有流传下来。尽管如此，这些成就还是为较早发展起来的固体力学理论，奠定了基础。

发展时期 实践经验的积累和17世纪物理学的成就，为固体力学理论的发展准备了条件。在18世纪，制造大型机器、建造大型桥梁和大型厂房这些社会需要，成为固体力学发展的推动力。固体力学理论的发展可以说经历四个阶段：（1）基本概念的形成阶段，（2）解决特殊问题的阶段，（3）建立一般理论、原理、方法、数学方程的阶段，（4）探讨复杂问题的阶段。这四个阶段的发展次序不是绝对的，有时互相交叉，彼此有密切的联系。在这

① 例如曹富新编，力学中的张量计算，中国铁道出版社，1985。

一时期，固体力学基本上是沿着研究弹性规律和研究塑性规律这样两条平行的道路发展的，而弹性规律的研究较早、发展较快、成就较多。

弹性固体的力学理论是在实践的基础上于17世纪发展起来的。英国的K虎克于1678年提出：物体的变形与所受外载成正比，人们称为虎克定律。瑞士的雅各布第一、伯努利在17世纪末提出关于弹性杆的挠度曲线的概念。而且尼尔第一、伯努利于18世纪中期首先导出棱柱杆侧向振动的微分方程。瑞士L·欧拉于1744年建立了受压杆失稳临界值的公式，又于1757年建立了柱体受压的微分方程，从而成为第一个研究稳定性问题的学者。法国的C-A de库仑在1773年提出了材料强度理论，他还在1784年研究了扭转问题并提出剪切的概念。这些研究成果为深入研究弹性固体的力学理论奠定了基础。法国的C.—L.—M.—H.纳维于1820年研究了薄板弯曲问题并于次年发表了弹性力学的基本方程。法国的A.—L.柯西于1822年给出应力和应变的严格定义并于次年导出矩形六面体微元的平衡微分方程。他的这些结果对整个固体力学的发展产生了深远的影响。法国的S.—D.泊松于1829年得出了受横向载荷平板的挠度方程。法国的A.J.C.B.de圣维南于1855年用半逆解法解出了柱体扭转和弯曲问题，并提出了有名的圣维南原理。随后德国的F.E.诺伊曼建立了三维弹性理论，并建立了研究圆轴纵向振动的较完善方法。德国的G.K.基尔霍夫提出梁的平截面假设和板壳的直法线假设，他还建立了板壳的准确边界条件并导出了平板微分方程。英国的J.C.麦克斯韦在19世纪50年代完备地发展了光测弹性的应力分析技术后，又于1864年对只有两个力的简单情况提出功的互等定理；随后，意大利的E.贝蒂于1872年对该定理加以普遍证明。意大利的A.卡斯蒂利亚诺于1873年提出了卡氏第一和第二定理。德国的F.恩盖塞于1884年提出了余能的概念。德国的L.普朗特于1903年提出了解扭转问题的薄膜比拟法。乌克兰的S.P.铁木辛柯在20世纪初用能原理解决了许多杆、板、壳的稳定性问题。匈牙利的T.Von卡门首先建立了弹性平板非线性的基本微分方程。苏联的H.И.穆斯赫利什维利于1833年发展了弹性力学复变函数方法。美国的L.H.唐奈建立了圆柱形壳在扭力作用下稳定问题的唐奈方程。W.弗吕格于1932年和1934年发表了圆柱形薄壳的稳定性和弯曲的研究成果。苏联的B.З.符拉索夫在1940年前后建立了薄壁杆、折板系、扁壳等二维结构的一般理论。在飞行器、舰艇、原子反应堆和大型建筑等结构的高精度要求下，有很多中外学者参加了力学研究工作，并解决了大量复杂问题。此外，弹性固体的力学理论还不断渗透到其他领域，如用于纺织纤维、人体骨骼、心脏、血管等方面的研究工作。

最近时期 指的是第二次世界大战以后的时期。这个时期固体力学的发展有两个特征：一是有限元和电子计算机在固体力学中得到广泛应用；二是近二三十年出现了两个新的分支——断裂力学和复合材料力学。电子计算机是1946年问世的。M.J.特纳等人于1956年提出了有限元法的概念后，有限元法发展很快，在固体力学中大量应用，解决了很多复杂的问题。

结构物体总是存在裂纹，这促使人们去探讨裂纹尖端的应力场和应变场以及裂纹的扩展规律。早在本世纪20年代，A.A.格里菲思首先提出了玻璃的实际强度取决了裂纹的扩展应力这一重要概念。G.K.欧文于1957年提出应力强度因子及其临界值概念，用以判断裂纹的扩展、从此诞生了断裂力学。随后，P.C.帕里斯为此作了很多研究工作。H.利伯维茨和J.埃夫蒂斯根据能量分析提出了非线性范围的断裂韧性概念。一些学者在此基础上发展了断裂力学的理论和方法。重要成果有：1961年A.A.韦尔斯和F.M.伯德金等人提出了裂纹顶端张开位移方法（即COD方法）；1963年F.厄尔多根和美籍华人薛昌明提出了混合型裂纹扩

展的最大拉应力理论；1968年J.R.赖斯研究塑性区内裂纹前缘的应力场和应变场而提出J积分；1973年薛昌明又提出了应变能密度理论。

纤维增强复合材料力学发端于本世纪50年代。复合材料力学研究有宏观、细观和微观三个方向。固体力学各分支在各向同性材料研究中所形成的基本概念和力学理论一般仍能应用于复合材料，只是增加了一些新的力学内容，例如非均匀性、各向异性、层间剥离等。在宏观研究方面，美籍华人蔡为仑和R.希尔在50年代建立了各向异性复合材料的破坏准则；以后又出现了蔡-吴张量破坏准则；近十余年来，在纤维增强复合材料的板壳力学方面出现了大量的研究成果，解决了大量的实际问题。在细观研究方面，B.W.罗森、J.C.哈尔平、蔡为仑等作出了贡献。化学工作者从微观方面来考虑材料的力学性能，他们提出的化学键理论就是研究如何增加层间剪切强度和湿强度。复合材料力学是年轻学科，但发展迅速，它解决了大量传统材料难于胜任的结构问题。

第二章 应 变 分 析

物体在外力作用下则发生变形。在研究变形时，首先要找出变形的规律，这在实践上是具有重大的意义。所以研究物体的变形是弹性固体力学的基本任务之一。

本章将从几何的观点对变形进行分析。

§2.1 位移和应变

物体在外力作用下体内任一点的位移，可以分为两部分：一部分是由于物体形状的改变所产生的。另一部分是由于整个物体的刚性移动所产生的。为了研究方便起见，我们先假设物体不发生刚性移动。

在物体上任取一点$M(x, y, z)$，变形后，M点移动到新的位置$M'(x', y', z')$，如图2.1所示，现用u，v，w表示全位移MM'沿坐标轴x，y，z的投影，称为位移分量或位移向量的投影。

为了叙述简便起见，可用位移的列阵表示

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

不同的点的位移分量也是不同的，它们是该点的坐标的函数，即：

$$\left.\begin{aligned} u&=u(x,y,z) \\ v&=v(x,y,z) \\ w&=w(x,y,z) \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

通常我们假设物体在外力作用下发生变形，而不破裂，因此u，v，w是x，y，z的单值连续函数，并假设它们是可微的。

为了研究物体的变形，我们假想用三组互相垂直的平面把物体分割成许多微小的六面体，然后取出其中的一个来研究。对于这个六面体，我们只要研究它在各坐标面上的投影的变形情况就够了，如图2.2所示。它们的变形，不外乎两方面：（1）各边的伸长或缩短的变化，（2）两边夹角的变化。下边先讨论第一类的变化，即线应变。然后再讨论第二类变化，即角应变。

设图2.2是表明所研究的六面体在xoy平面内的投影是矩形$ABCD$。在变形前，AB和AC的长度分别为dx和dy如图2.3所示。A，B，C的坐标各为：

$$A(x,y),\ B(x+dx,y),\ C(x,y+dy)$$

变形以后，A，B，C分别到达新的位置A'，B'，C'：

$$\begin{aligned} &A'[x+u,\ y+v] \\ &B'[x+dx+u(x+dx,y),\ y+v(x+dx,y)] \\ &C'[x+u(x,y+dy),\ y+dy+v(x,y+dy)] \end{aligned}$$

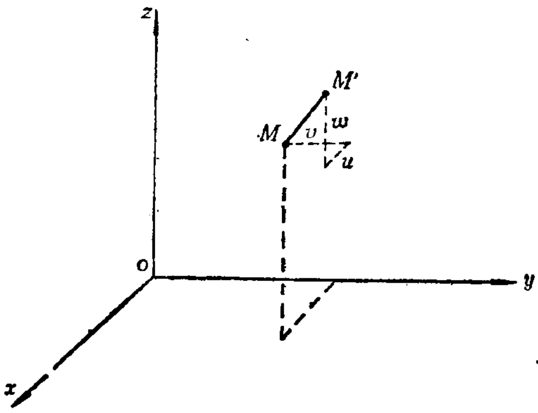

图 2.1

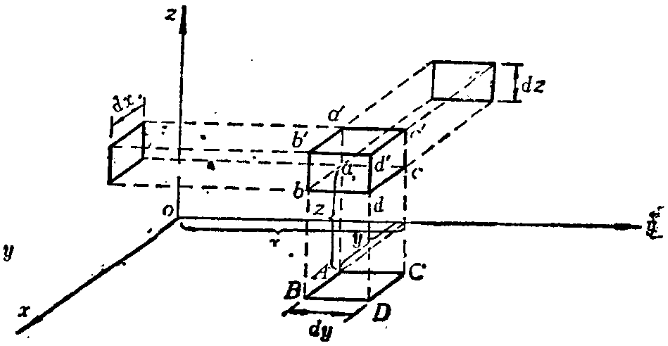

图 2.2

将$u(x+dx,y)$，$u(x,y+dy)$以及$v(x+dx,y)$，$v(x,y+dy)$按泰勒（Taylor）级数展开，并略去微量dx,dy，dz的二次 以上的项。

即得

$$u(x+dx,y)-u(x,y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$$

$$u(x,y+dy)-u(x,y)=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy$$

$$v(x+dx,y)-v(x,y)=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx$$

$$v(x,y+dy)-v(x,y)=\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

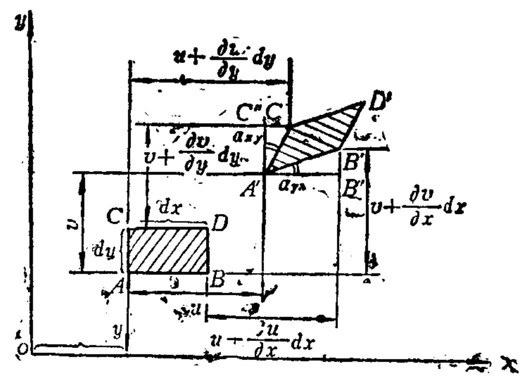

图 2.3

从图2.3的分析可知，原长为dx的AB边在ox轴上的投影的相对伸长可写为

$$\varepsilon_{xx}=\frac{A'B''-AB}{AB}=\frac{u(x+dx,y)-u(x,y)}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (a)$$

同理得到，原长为dy和dz的AC边和aa'边在oy轴和oz轴上的投影的相对伸长如图2.2所示，分别写为：

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial u}{\partial y},\quad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z} \qquad (b)$$

当$\varepsilon>0$时，表示线段伸长；

当$\varepsilon<0$时，表示线段缩短。

而伸长度ε_{xx}，ε_{yy}，ε_{zz}一般称为正应变，或称为线应变。

我们令α_{yx}表示在x方向的线段向y方向转动的转角，所以α_{xy}则表示在y方向的线段向x方向转动的转角。而对直角BAC的变化$\alpha_{xy}+\alpha_{yx}$称为角应变，或称为剪应变，记为

$$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}=\alpha_{xy}+\alpha_{yx} \qquad (c)$$

由图2.3可知，当变形微小时，

$$\alpha_{yx}\approx \operatorname{tg}\alpha_{yx}=\frac{B''B'}{A'B''}=\frac{v(x+dx,y)-v}{dx+[u(x+dx,y)-u]}$$

$$=\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}dx}{dx+\dfrac{\partial u}{\partial x}dx}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{1+\dfrac{\partial u}{\partial x}}\approx\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (d)$$