高等学校教学参考书

姜礼尚 庞之垣著

有限元方法及其理论基础

人民教育出版社

高等学校教学参考书

有限元方法
及其理论基础

姜礼尚 庞之垣著

人民教育出版社

高等学校教学参考书

有限元方法及其理论基础

姜礼尚 庞之垣著

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 9.875 字数 234,000

1979 年 9 月第 1 版 1980 年 6 月第 1 次印刷

印数 00,001—11,000

书号 13012·0387 定价 0.72 元

前　言

有限元方法已成为当前求偏微分方程数值解的一个重要方法. 它在数学上属于变分方法的范畴,是古典变分方法(Ritz-Galerkin 方法)与分块多项式插值结合的产物. 这种结合不仅使有限元方法保持了原有变分方法的优点, 而且还兼有差分方法的灵活性, 使古典变分方法的不足之处得到了充分地弥补. 因此有限元方法是古典变分方法的革新和发展, 这种革新和发展是实质性的,使古典变分方法大大向前推进了一步.

有限元离散化的思想早在 40 年代就已经提出. 但是直到 60 年代,国内与国外几乎同时在不同实践的基础上,用有限元方法来解决工程、力学问题,并给出了收敛性的证明和误差估计. 这些工作不仅吸取了前人提出的一些想法,而且在算法上有新的突破.它们采取单元分析、总体合成、代数解算等基本步骤, 充分发挥了划分单元在几何上所具有的灵活性, 使有限元的计算程序具备了简单通用、标准化等优点,特别对于那些物理性态、几何形状比较复杂的课题,更显出它的优越性.

近年来,国内外出版的有限元方法的书籍,大致有两类: 一类是论述有限元数学理论的书籍. 这类书由于概括性比较强, 论题比较广泛,所用到的数学知识比较多, 起点比较高,对于广大工程技术人员,以及部分力学和计算工作者来说,学习时可能会感到吃力. 一类是从结构力学的观点应用有限元方法解决实际问题的书籍. 这类书对于普及有限元方法曾起过很重要的作用. 但它们用到的专业知识都比较多, 这样势必对不同专业的读者会带来一些困难, 而且这类书往往不涉及理论分析. 为适应不同专业读者的

需要，本书企图写成一本有限元方法的入门书，打算从偏微分方程数值解法的角度，对有限元的算法和理论基础都作较详细的论述.但是为了便于读者掌握这些方法，本书还采取了解剖麻雀，循序渐进的原则. 通过一些典型例子的分析，使读者自己由浅入深地总结出有限元方法解题的一般规律和理论分析的基本思路和技巧.考虑到有些读者可能没有接触过数学和力学的某些必要的专门知识，本书专节作了扼要的补充.

在本书第一章首先以直杆拉伸为例说明有限元离散化的物理背景，随后通过常微分方程，Poisson 方程，平面与空间弹性体的平衡方程，说明如何把这些方程的各种边值问题化归为等价的变分形式(“虚功方程”)，也就是定义边值问题的广义解.然后针对不同的问题，采取统一的步骤离散化，反复阐明单元分析，总体合成的基本思想.

第二章是插值多项式的系统总结.重点是二维插值(包括三角形单元和矩形单元). 本章详细地推导了这些插值多项式的具体表达式，并讨论了它们的唯一可解性，整体连续性和总体自由度等问题.

第三章可能对部分读者来说是感到最困难的一章，因为这一章所讨论的课题不可避免地要用到比较广泛的数学知识. 为了便于读者学习，尽可能减少些困难，我们有意识地铺了一些台阶. 在本章开始，先根据正文的需要扼要地提供了泛函分析、Соболев空间、变分法(二次泛函的极值问题)、椭圆型方程广义解的存在性和可微性等方面的基本知识，并给出一系列例子. 为了说明有限元方法是古典变分方法的发展，本章仔细介绍了 Ritz-Galerkin 方法，并从 Galerkin 方法的角度介绍有限元算法，以期把第一章的基本解算过程，从理论上加以概括. 本章的中心是插值逼近的误差估计. 为了便于读者掌握这方面的最新成果和基本方法，我

们从一维插值开始，通过二维线性插值，逐步由浅入深地介绍了 n 维空间高次多项式插值的误差估计的一般结果．并利用这个结果给出了能量模估计，L_2 模估计 (Nitsche 技巧) 和连续模 (一致模) 估计．

第四章企图以板的弯曲为例，介绍非协调元的理论分析．由于板的弯曲的微分方程是四阶偏微分方程，如果采取古典变分法的框架，需要它在相邻单元的公共边上满足协调性条件，即要求它本身以及一阶微商在公共边上连续，为此必须在每个单元上至少采取 5 次多项式插值（三角形单元）或双三次插值（矩形单元）．这在计算上就会带来一定的困难．能否突破古典变分方法的框框采取非协调元呢？若采取非协调元将会对具体计算和理论分析带来什么问题呢？本章以 Adini 元为例(即矩形单元 12 自由度不完全双三次插值)详细地讨论了这些问题．

第五章讨论的中心议题是平面弹性动力问题的算法和离散模型的稳定性问题．由于动力问题与时间有关，它的解算过程是随着时间 t 的增长，一个时刻又一个时刻地解算下去的．这样随着计算时间的增加计算误差累积会不会使解答完全失真，也就是解是否稳定？这是一个首先要考虑的问题．本章通过两个简单离散模型(一个是显式的，一个是隐式的)，仔细讨论了这个问题．

当然随着有限元方法使用的日益广泛深入，一些新的课题还在不断涌现．例如混合—杂交有限元，非线性问题，奇型问题的有限元解法等等，目前正在逐渐吸引人们的注意．本书对这些内容不可能一一枚举，只能为读者的进一步深入研究起一个导引作用．

在本书的编写过程中曾得到很多同志的帮助．贵州大学祝开成同志为第三章泛函分析的准备知识，提供了一个初稿．本书这一部分内容，就是按照他提供的材料修改写成的．贵州大学祝开成、林敬凡同志以及山东大学袁益让同志都曾仔细看过本书的原

稿，并提出过不少修改意见．此外江苏师院的一些同志曾对本书的编写方法提过一些有益的建议，并在完稿过程中得到他们热情的支持和帮助．在此我们向他们表示衷心的感谢．

姜礼尚（北京大学）
庞之垣（贵州大学）
1978 年 8 月于苏州

目　　录

第一章　离散过程……………………………………………………1
§1　一个例子……………………………………………………1
§2　二阶常微分方程……………………………………………4
§3　二维 Poisson 方程 …………………………………………22
§4　平面弹性问题………………………………………………38
§5　空间弹性问题………………………………………………55
§6　用有限元法解题的具体步骤………………………………63
第二章　插值与基函数……………………………………………66
§1　一维情形……………………………………………………67
1.1　线性插值(Lagrange 型)与长度坐标……………………67
1.2　高次 Lagrange 型插值……………………………………71
1.3　三次 Hermite 型插值………………………………………73
§2　二维情形(三角形剖分)……………………………………75
2.1　线性插值(Lagrange 型)与面积坐标……………………77
2.2　高次 Lagrange 型插值……………………………………81
2.3　Hermite 型插值……………………………………………92
2.4　其它形式的插值……………………………………………105
§3　二维情形(矩形剖分)………………………………………113
3.1　Lagrange 型插值……………………………………………113
3.2　Hermite 型插值……………………………………………119
§4　任意四边形剖分与等参数单元……………………………124
§5　三维情形……………………………………………………129
5.1　四面体剖分…………………………………………………129
5.2　六面体剖分与等参数单元…………………………………130
§6　小结…………………………………………………………133
第三章　理论基础…………………………………………………135
§1　泛函分析和 Соболев 空间的预备知识……………………136
1.1　线性空间……………………………………………………136
1.2　Hilbert 空间…………………………………………………138
1.3　线性算子与线性泛函………………………………………142

1.4 直交投影与 Riesz 表现定理……144
1.5 弱收敛与紧致性……146
1.6 Соболев 空间……149
§2 椭圆型方程边值问题解的存在性与可微性……159
2.1 变分原理与广义解……159
2.2 适定性……164
2.3 广义解的可微性……175
§3 古典变分方法与有限元法……178
3.1 古典 Ritz-Galerkin 方法……178
3.2 有限元法……183
§4 Соболев 空间的插值逼近……192
4.1 一维线性插值误差……193
4.2 二维线性插值误差……197
4.3 一般情形的插值误差……203
§5 有限元解的收敛性与误差估计……213
5.1 收敛性……214
5.2 能量模估计……215
5.3 L_2 模估计……216
5.4 连续模估计……217
第四章 板的弯曲问题……220
§1 数学模型……220
§2 有限元解法……225
§3 协调元的误差分析……231
§4 非协调元的误差分析……234
第五章 平面弹性动力问题……246
§1 变分形式……247
§2 半离散化……251
§3 富氏方法、特征值与特征向量……257
§4 数值积分法与格式的稳定性……266
附录1 线性代数方程组的解法……283
附录2 数值积分……296
附录3 表达式(5.22)—(5.24)的证明……301

第一章 离散过程

从工程和力学上来讲，有限元的算法源出于结构力学的思想. 本章开始以直杆拉伸为例，阐明这个思想的解算过程. 为了推广，对它进行了必要的抽象和概括，使它适用于其他力学和物理学等问题，并且通过一系列例子，企图阐明以下两个思想：

(1) 虚功方程是有限元法离散化的出发点.

(2) 建立离散模型采用单元分析、总体合成的基本步骤.

大量实践表明，从虚功方程出发进行离散化，具有简单、便于推广的优点. 采用单元分析、总体合成的步骤，有助于使计算程序达到通用、标准化的目的. 这样的离散过程同样适用于如板的弯曲问题(第四章)，动力学问题(第五章)等.

§1 一个例子

物理模型

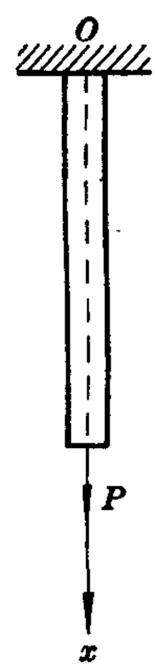


图 1-1

考虑一根长为 L 一端固定的等截面均匀弹性杆，它在自重和另一端的拉力 P 的作用下处于平衡状态. 问杆的形变和杆内的应力分布？

设杆的弹性模量为 E，截面积为 S，密度为 ρ. 如图 1-1 选取坐标系 Ox. 命 $u(x)$ 表示截面 x 处的**位移**，$\varepsilon(x)$、$\sigma(x)$分别表示截面 x 处的伸长率(即**应变**)和单位面积上所受的内力(即**应力**). 由**几何方程**

$$\varepsilon(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}=\frac{du}{dx}$$

与物理方程(Hooke 定律)

$$\sigma(x)=E\varepsilon(x)$$

我们知道只要求得位移函数 $u(x)$，就可以得到应力分布 $\sigma(x)$.

下面我们用有限元方法求位移函数.

1.1 离散模型

把杆分成 n 个小段(**单元**)：$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=L$，单元之间的联结点 $x=x_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$称为**节点**. 把每个单元的质量分成两半，分别集中到这单元的两个端节点上. 这样原来的弹性杆就成了一串"糖葫芦"(图 1-2)，其中每一颗"海棠果"表示一个节点. 虽然它的体积为 0，但却集中了相邻二个单元质量的一半. 而在相邻两颗"海棠果"之间，由一根没有质量但却保持有原有长度和弹性的细丝相联结. 在力学上，这个步骤称为**质量移置**. 当然这是原物理模型的一个近似. 但可以想象只要杆分得足够细，使得单元的长度充分小时，那么这种近似是可行的.

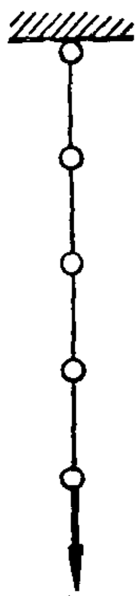


图 1-2

由于杆(亦即"糖葫芦串")处于平衡状态，因此作用在每颗"海棠果"上的所有作用力的合力应等于 0. 下面我们以"海棠果"(节点) $x=x_i$ 为例，来分析它的受力情况.

节点 $x=x_i$ 是单元 e_{i-1}：$x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$ 和单元 e_i：$x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$ 的联结点，$1\leqslant i\leqslant n-1$. 那么由于质量移置，在节点 $x=x_i$ 所受**外力**(即重力)为

$$F_i=F_i^{e_i}+F_i^{e_{i-1}}=\frac{1}{2}S\rho gL_i+\frac{1}{2}S\rho gL_{i-1}$$

这里 $F_i^{e_k}$ 表示单元 e_k 分配到节点 x_i 的重力（称**等效节点荷载**），$L_k=x_{k+1}-x_k$ 表示单元 e_k 的长度. 在两个端节点 $x=x_0, x=x_n$ 上所受的外力分别为

$$F_0=F_0^{e_0}+R=\frac{1}{2}S\rho gL_0+R$$

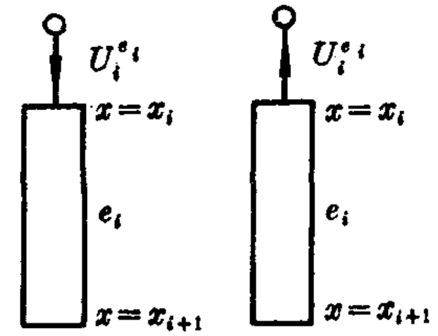
$$F_n=F_n^{e_{n-1}}+P=\frac{1}{2}S\rho gL_{n-1}+P$$

R 表示**支承反力**(未知的)

另一方面，由于杆变形，每个单元(弹性细丝)受到拉伸(或压缩)，因此对节点产生作用力(即**内力**)．设 u_k 表示节点 $x=x_k$ 的位移，那么单元 e_i 的伸长为 $u_{i+1}-u_i$，伸长率(应变) $\varepsilon_i=\dfrac{u_{i+1}-u_i}{L_i}$，应力 $\sigma_i=E\dfrac{u_{i+1}-u_i}{L_i}$，单元 e_i 对节点 $x=x_i$ 的作用力 $U_i^{e_i}$ 为

$$U_i^{e_i}=E\frac{u_{i+1}-u_i}{L_i}S$$

(这里 $U_i^{e_i}=\sigma_iS$，因为若单元受拉，$\sigma_i>0$，$U_i^{e_i}$ 的指向与 Ox 轴同向，$U_i^{e_i}>0$；若单元受压，σ_i、$U_i^{e_i}$ 均为负(见图 1-3))．



a) 单元受拉　　b) 单元受压

图 1-3　e_i 单元对节点 $x=x_i$ 的作用力

同理，单元 e_{i-1} 对节点的作用力 $U_i^{e_{i-1}}$ 为

$$U_i^{e_{i-1}}=-E\frac{u_i-u_{i-1}}{L_{i-1}}S$$

(这里 $U_i^{e_{i-1}}=-\sigma_{i-1}S$，理由相仿.)

由于所有作用在节点 $x=x_i(0\leqslant i\leqslant n)$ 上的合力为 0，故有节点平衡方程:

$$\begin{cases}U_0^{e_0}+F_0=0\\ U_i^{e_{i-1}}+U_i^{e_i}+F_i=0\quad(1\leqslant i\leqslant n-1)\\ U_n^{e_{n-1}}+F_n=0\end{cases}$$

注意到约束条件 $u_0=0$($x=x_0$ 点固定)，那么由在节点 $x_1,\cdots,x_n$ 的平衡方程，便可得到以节点位移 $u_1,\cdots,u_n$ 为未知数的代数方程组

$$
\begin{cases}
SE\left[\left(\dfrac{1}{L_0}+\dfrac{1}{L_1}\right)u_1-\dfrac{1}{L_1}u_2\right]=\dfrac{1}{2}S\rho g(L_1+L_0) \\
SE\left[-\dfrac{1}{L_{i-1}}u_{i-1}+\left(\dfrac{1}{L_{i-1}}+\dfrac{1}{L_i}\right)u_i-\dfrac{1}{L_i}u_{i+1}\right] \\
=\dfrac{1}{2}S\rho g(L_{i-1}+L_i) \qquad (i=2,\cdots,n-1) \\
SE\left[-\dfrac{1}{L_{n-1}}u_{n-1}+\dfrac{1}{L_{n-1}}u_n\right]=\dfrac{1}{2}S\rho gL_{n-1}+P
\end{cases}
$$

解之可得 $u_1, \cdots, u_n$. 代入节点 $x=x_0$ 的平衡方程 $U_0^{e_0}+F_0=0$, 便可求得支承反力 R:

$$R=-SE\frac{u_1}{L_0}-\frac{1}{2}S\rho gL_0$$

单元 e_i 的应力:

$$\sigma_i=E\frac{u_{i+1}-u_i}{L_i} \quad (0\leqslant i\leqslant n-1)$$

在节点 x_i 处的应力可由相邻的两个单元 e_i, e_{i-1}的单元应力作加权算术平均得到

$$\sigma(x_i)=\frac{L_{i-1}\sigma_{i-1}+L_i\sigma_i}{L_{i-1}+L_i}$$

§2 二阶常微分方程

2.1 上一节我们通过划分单元、质量移置，把一根连续杆转化为一个质点系，然后应用质点系的平衡条件，导出节点位移应满足的代数方程组. 这个离散化过程，虽然比较初等，且具有明显的物理直观，可以把它看作是有限元方法的雏型，但不易把它直接推广到平面、空间弹性问题以及其它力学、物理问题. 为此，我们从描写杆处于平衡状态的微分方程边值问题出发，导出它的“**虚功方程**”(或称**变分方程**)，然后进行**离散化**，重新得到节点位移满足

的**代数方程组**. 这条离散化的途径, 虽然从表面上看, 对我们这个具体模型未免比较迂回, 但它包含了用有限元方法解题的基本框架, 可以用来处理其它各种微分方程的边值问题.

首先回顾一下杆的平衡方程的建立.

在杆上任意截取一段$[\alpha, \beta]$, $(0<\alpha<\beta<L)$, 作用在这段杆上有两种力. 其一是杆的重力$\int_\alpha^\beta \rho g S dx$, 其二是杆的其它部分通过截面 $x=\alpha$, $x=\beta$ 对这段杆的作用力, 它们分别为$-S\sigma(\alpha)$和 $S\sigma(\beta)$ (这里正负号的确定见 § 1). 由于杆处于平衡状态, 所以作用在这段杆上的所有作用力的合力为 0, 即有

$$\int_\alpha^\beta g\rho S dx+\sigma(\beta)S-\sigma(\alpha)S=0$$

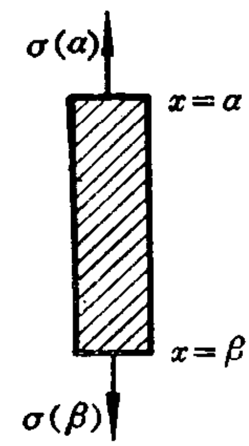


图 1-4

或

$$\int_\alpha^\beta \left[g\rho S+\frac{d}{dx}(\sigma S)\right]dx=0$$

如果被积函数连续, 那么由区间$[\alpha, \beta]$的任意性, 立得在 $0<x<L$ 上有

$$\frac{d}{dx}(\sigma S)+\rho g S=0$$

利用几何方程和物理方程, 我们有

$$-\frac{d}{dx}\left(\mathrm{E}S\frac{du}{dx}\right)=\rho g S \quad (0<x<L) \tag{1.1}$$

在杆的两端分别满足边界条件:

$$u(0)=0 \tag{1.2}$$

$$\sigma(L)=\frac{P}{S}\text{或}\quad \mathrm{E}u'(L)=\frac{P}{S} \tag{1.3}$$

这里在 $x=0$ 处给定的是“**位移边界条件**”$u(0)=0$, 在微分方程教程中称为“第一类边界条件”, 在变分方法 (包括有限元方法) 中称它为“**约束边界条件**”或“**强制边界条件**”; 在 $x=L$ 处给定的是“应

力边界条件"$\sigma(L)=\dfrac{P}{S}$或$u'(L)=\dfrac{P}{S\mathrm{E}}$,在微分方程教程中称为"第二类边界条件",在变分方法(包括有限元方法)中称它为"**自然边界条件**". 必须注意: 在有限元方法中对这两类边界条件的处理是完全不同的.

用任意一个满足齐次约束边界条件的连续可微函数$\varphi(x)$(即$\varphi(x)\in C^1_{[0,L]}$, $\varphi(0)=0$)①乘方程(1.1)的两端, 并在区间$[0,L]$上求积分, 利用分部积分公式, 注意到自然边界条件(1.3)以及$\varphi(0)=0$, 我们得到

$$\int_0^L \mathrm{E}S\varphi'(x)u'(x)dx-\int_0^L S\rho g\varphi(x)dx-P\varphi(L)=0 \quad (1.4)$$

在力学上, $\varphi(x)$表示满足约束边界条件的**任意虚位移**, 积分等式(1.4)称为"**虚功方程**".

如果函数$u(x)$满足下述条件: 1° $u(x)\in C^1_{[0,L]}$, 2° $u(0)=0$, 3°对**任意**$\varphi(x)\in C^1_{[0,L]}$, $\varphi(0)=0$, 等式(1.4)成立, 我们称它为**虚功方程(1.4)的解**.

那么, 从上面推导可以断言: 如果$u(x)$是边值问题(1.1)—(1.3)的解,它也一定是虚功方程(1.4)的解. 反之,如果$u(x)$是虚功方程(1.4)的解,且$u(x)\in C^2_{(0,L)}\cap C^1_{[0,L]}$②,那么也必然是边值问题(1.1)—(1.3)的解. 事实上,由(1.4)可得

$$-\int_0^L\left[\frac{d}{dx}\left(S\mathrm{E}\frac{du}{dx}\right)+S\rho g\right]\varphi(x)dx+[S\mathrm{E}u'(L)-P]\varphi(L)=0$$

由于$\varphi(x)$的任意性, 立即推得$u(x)$在区间$(0, L)$内满足方程(1.1),在边界$x=L$上满足自然边界条件(1.3).

这里有几个问题要特别说明一下:

---

① 符号"$\in$"表示"属于", $C^k_{[0,L]}$ 表示"所有在区间$[0,L]$上k次连续可微函数的全体",特别, $C^0_{[0,L]}$又常记为$C_{[0,L]}$.

② 符号"$\cap$"表示"交",即公共部分.

1. 在上面我们证明了边值问题 (1.1)—(1.3) 与虚功方程 (1.4) 在一定条件下是等价的. 但是很明显它们对于解的光滑性要求却不同. 对于边值问题(1.1)—(1.3)的解 $u(x)$, 我们要求它在区间$(0, L)$内二次连续可微, 而作为虚功方程(1.4)的解, $u(x)$属于 $C^1_{[0,L]}$已完全足够(事实上还可以进一步减弱). 因此人们通常把边值问题(1.1)—(1.3)属于 $C^2_{(0,L)} \cap C^1_{[0,L]}$ 的解称为**古典解**, 而把与它相应的虚功方程(1.4)的解, 称为**边值问题(1.1)—(1.3)的广义解**, 或叫做 **Galerkin 意义下的广义解**①. 确定这种广义解的虚功方程正是有限元方法的出发点.

2. 从虚功方程(1.4)出发求解边值问题 (1.1)—(1.3) 的方法, 通常称为**变分方法**. 在变分方法中, 第一边界条件必须强加给未知函数. 而第二边界条件无须强加给未知函数, 它直接出现在虚功方程中, 只要函数适合虚功方程, 它自然满足这类边界条件. 由此可以看出, 何以人们在变分方法中把第一和第二边界条件分别叫做"强制边界条件"和"自然边界条件".

3. 上面由微分方程边值问题形成虚功方程的方法是一般的. 在高维情形即对于偏微分方程, 只需用 Green 公式代替分部积分, 并吸收自然边界条件, 就得到与这偏微分方程边值问题相应的"虚功方程".

2.2 离散化

人们通常把微分方程(1.1)和虚功方程(1.4)称为连续形式. 所谓离散化, 就是把它们近似地转化为代数方程(组). 这一节我们将再次通过直杆拉伸这个例子, 阐明用有限元方法把问题离散化的基本步骤.

1. 单元剖分

---

① 关于广义解的定义, 我们将在本章 §2, 2.3 以及第三章 §2, 2.1 对它逐步加以精确化.

把区间$[0,L]$剖分成 n 个小区间

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=L$$

区间$[x_i,x_{i+1}]$称为单元 $e_i(i=0,1,\cdots,n-1)$，$x=x_i$ 称为节点($i=0,1,\cdots,n$).

2. 位移模式

在§1的例子中，无论是进行质量移置，还是用节点位移来表示单元应力，这里都蕴含着一个基本假设：在每个单元上位移的变化是线性的．从数学上讲，就是用一个分段线性函数代替杆上的位移分布，即进行线性插值．大家知道，决定一个分段线性(或 k 次)多项式，只需要去确定有限个参数值，这样，我们就把问题离散化，把它转化为一个代数问题了．在有限元方法中，所谓“位移模式”，简单地说，就是确定插值多项式的具体形式，通过节点函数值(也可包括微商值)把它表出.

下面我们仍然采取线性位移模式.

由于它是分段线性函数，因此我们只需在每个单元上写出它的表达式．假设在单元 e_i：$[x_i,x_{i+1}]$的两端节点 $x=x_i$，x_{i+1} 上，给定位移值 u_i 和 u_{i+1}．由于在单元 e_i 上位移是线性的，即 $u(x)=ax+b$，又由于 $u(x_i)=u_i$，$u(x_{i+1})=u_{i+1}$，由此定出 a、b，可得 $u(x)$在单元 e_i 上的表达式：

$$u(x)=\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}u_i+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}u_{i+1}\quad(x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1})$$

命

$$N_i(x)=\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i},\qquad M_i(x)=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

容易验证这两个函数在单元 e_i 上有以下的性质：

(1) $N_i(x)$、$M_i(x)$都是一次多项式；

(2) $N_i(x_i)=1$，　$N_i(x_{i+1})=0$，　$M_i(x_i)=0$，$M_i(x_{i+1})=1$.