初等数学研究

李长明　周焕山　编

高等教育出版社

★ GAODENG JIAOYU CHUBANSHE

初等数学研究

李长明　周焕山　编

高等教育出版社

（京）112号

内容提要

本书是根据国家教育委员会师范司1991年12月18日颁发的中学教师进修高等师范专科的《"初等数学研究"教学大纲》编写的。本书分为两大部分。第一部分为初等代数，内容包括：数系，解析式，初等函数，方程，不等式，排列与组合；第二部分为初等几何，内容包括：几何证明，几何量的计算，初等几何变换，轨迹，几何作图，立体图形的性质，制图基本知识。本书内容丰富，并且叙述清楚、透彻，逻辑严谨。

图书在版编目(CIP)数据

初等数学研究／李长明，周焕山编．—北京：高等教育出版社，1995
ISBN 7-04-005162-1

Ⅰ．初… Ⅱ．①李… ②周… Ⅲ．初等数学-研究Ⅳ．O12

中国版本图书馆CIP数据核字（95）第01215号

*

高等教育出版社出版
新华书店总店北京发行所发行
文字六〇三厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 23 字数 590 000
1995 年 6 月第 1 版 1995 年 6 月第 1 次印刷
印数0001—12084
定价 14.20 元

目 录

第一部分 初等代数

第二部分 初 等 几 何

第一部分　初等代数

绪　言

现代意义下的代数学，奠基于16世纪和17世纪初。当时欧洲科学大发展，使人们认识到作为科学侍女的数学工具，特别是代数方法的重要性。此后，代数逐渐进入中等学校，成为和几何并重的一门重要的数学教育课程。1859年，我国清代数学家李善兰把英文“algebra”译成代数学，以表达这门学科用字母代表数的特点。这就是汉语“代数”一词的来源。

一、关于代数学的几个历史观点

代数学的最早起源可以追溯到公元前1800年左右。那时代的巴比伦数学文献里已经含有二次方程和某些很特殊的三次方程。从那时起直到公元15世纪的三千多年里，中国、印度、阿拉伯和欧洲都在不同的方面对代数学的发展作出了贡献。特别是中国的代数获得了比较系统的、高水平的发展。例如，约在公元前1世纪前后成书的《九章算术》，其中记载了“方程术”和“正负术”等重要成就。到了13世纪前后，中国数学在高次方程的数值解法、同余式理论以及高阶等差数列等方面又再放异彩，取得令人惊异的成就。

纵观代数学发展的整个历史过程，大体上经历了初等代数的形成、高等代数的创建以及抽象代数的产生和发展这三个阶段。随着这门学科的不断发展，人们对于代数学的研究对象问题的认识也不断深化，逐步形成下面几个历史观点。

1．代数学是研究方程解法和字母运算的科学

在初等代数漫长的渐进阶段，其中心问题一直是方程的解法。最早得到二次方程解法的是巴比伦人和中国人。尽管他们解方程的方法很不相同，但相同的是他们都没有使用符号。公元3世纪的希腊数学家丢番图，以及后来的印度数学家，都曾使用过一些数学符号。但由于当时的书籍的流传靠传抄，符号不能定型，辨认起来很不方便。所以公元9世纪的阿拉伯人，热心采用了印度的数码、记数法和各种运算方法，并推进了方程解法的研究，却断然抛弃了印度人的数学符号。

文艺复兴时期现代印刷业的出现，使标准符号的引进有了实现和推广的可能。韦达是第一位有意识地系统使用字母，从而使符号化代数得以初步形成的数学家。他把使用符号的代数称为“类的计算术”，以区别于“数的计算术”，以此作为代数与算术的分界线。所谓“类”，是指字母所代表的量，因此“类的计算术”就是关于字母的运算。使用字母代表数，不仅便于研究方程解法，而且由字母和数构成的代数式，是研究数学理论和表达科学规律的极其有效的工具。经过笛卡儿、沃利斯和牛顿等人的改进，代数符号进一步完善。1768年，欧拉发表《对代数的完整的介绍》，系统地论述了方程理论和其它代数知识。这部著作表明初等代数已经完全形成。

从韦达到欧拉时代的数学家，基本上认为代数学是研究方程解法和字母运算的科学，这正是初等代数的基本内容。

2．代数学是研究多项式和线性代数的科学

17世纪以来，由于三次和四次方程的根式解问题的完满解决，鼓励人们去探索更高次方程的根式解。虽然许多数学家求解五次方程的努力没有成功，但是他们在多项式理论方面却有很多建树。例如法国数学家范德蒙继牛顿之后研究对称函数，证明了根的任何对称函数都能用多项式方程的系数表示出来。

代数学的另一个方向是关于线性方程组的研究。马克劳林和克莱姆分别给出了由方程组系数确定方程组的解的克莱姆法则。

后来经过贝祖、范德蒙和拉普拉斯等人的研究，行列式理论初步形成。柯西在前人研究的基础上给出了系统的近代行列式理论，并建立了特征方程和特征根的理论。19世纪中期，凯莱和西尔维斯特等人为矩阵理论奠定了基础。1887年，弗罗贝尼乌斯首先证明了哈密尔顿-凯莱定理。他还研究了矩阵的特征多项式、不变因子和初等因子的性质，并引入矩阵的秩的概念。后来若尔当利用相似矩阵等概念，于19世纪末期证明矩阵可化为标准形，现称为若尔当标准型。在上述这些数学家们看来，代数学是研究多项式理论和线性代数的科学。这里的代数学就是现在所说的高等代数。

3．代数学是研究各种代数结构的科学

19世纪初期，两位年轻数学家阿贝尔和伽罗瓦在代数学研究中取得了划时代的突破性进展。阿贝尔首次证明了一般五次方程不可能用根式求解，伽罗瓦则进一步得到了代数方程能用根式求解的充要条件是自同构群可解，并创造了伽罗瓦理论。他所引进的群和域的概念，成为尔后发展起来的抽象代数的基石。但是他们的工作生前被人们忽视，直到19世纪后期，在若尔当、凯莱、戴德金和克莱因等的著作的广泛影响下，抽象的群、环、域的理论才得以成长。20世纪前期，抽象代数在女数学家诺特的著作中达到成熟的地步。

抽象代数是在数学严格化、公理化和抽象化的思想指导下形成和崛起的。其研究对象不再是方程，而是群、环、域、格等抽象系统的代数结构。因此在现代数学家看来，代数学是研究各种代数结构的科学。这里的代数学指抽象代数或近世代数。

4．代数方法是推动数学发展、解决科学问题的有力工具

笛卡儿(1596—1650)在关于科学方法论的研究中，首先发现代数具有作为一门普遍的科学方法的潜力，代数方法是研究和解决科学问题的有力工具，也是对数学对象进行抽象推理的有力工具。他在《指导思维的法则》一书中，提出了一个后来被称为“笛

卡儿模式"的解决问题的通用方法。其要点是

第一，将任何种类的问题化归为数学问题；

第二，将任何种类的数学问题化归为代数问题；

第三，将任何种类的代数问题化归为单个方程的求解。

尽管笛卡儿模式并不是放之四海而皆准的灵丹妙药，但是它在一定范围内还是适用的。事实上，笛卡儿本人在运用代数方法解决几何问题方面获得极大成功，这导致解析几何的诞生。17世纪的那些向来崇尚希腊演绎几何的数学大师们，如费马、沃利斯和牛顿，先后承认了代数方法的优点。到了18世纪，欧拉在《无穷小引论》(1748)中，赞扬代数大大优于希腊人的综合几何。从此，代数学的地位牢固确立，并成为在学校中普遍开设的一门教学科目。

在科学技术迅猛发展、计算机的应用逐渐普及的今天，代数方法作为研究离散对象和编制计算程序的数学工具，正愈来愈发挥重要的作用。

二、作为教学科目的中学代数

作为教学科目的中学代数，它首先必须服从普通教育的培养目标。根据我国《中学数学教学大纲》的规定，其内容要选择"参加现代化建设和学习现代科学技术所必需的并为学生所能接受的数学基础知识"。因此，中学代数和作为一门科学的代数学在内容的广度和深度上是截然不同的。

在内容的广度上，凡是具有相当实用价值的或者可作为学习现代化科学技术的数学工具而又不属于几何的数学基础知识，都可能成为中学代数的入选内容。因此，在现行中学代数里不仅包括数、式、方程和不等式等传统的初等代数内容，以及初等函数内容，还含有从学科来说不属于代数的内容，如解三角形、统计初步、排列和组合等。因此，中学代数的内容具有广泛性、多样性和实用性的特点。

在内容的深度上，把"为学生所能接受的"这一教育心理学的

标准放在首位，而把学科本身所要求的逻辑严谨性的标准放在第二位。因此，许多较难为普通中学生接受的比较抽象的理论部分都从简或从略了。例如，关于正实数的 n 次算术根的存在性与唯一性，在中学代数课本里是避而不谈的。又如对于函数性质的讨论，一般借助于图形直观或实例验证，而不采用严格的逻辑论证。再如关于方程的同解性，只是简单地介绍同解原理，而未详加讨论。作为中学数学教师，既要充分认识这种处理方式的合理性和必要性，又要对教材背后的数学原理和理论背景有比较深刻的理解。

最近十多年来，我国中学代数教材的基本内容作了不少改革，特别是渗透了集合、对应等现代数学思想，但同时保留了传统教材的精华部分。现行中学代数教材主要包括以下几个方面：

1．数的概念及其运算

初中伊始，就在算术数的基础上引进负数，从而扩展到有理数集。接着引进无理数，进一步从有理数集扩展到实数集，最后在高中二年级引进虚数，完成复数集的扩充。课本关于数的讨论，着眼于某一数集里的各种代数运算，而很少涉及数集的抽象性质。

2．解析式及其恒等变换

主要讨论代数式与简单超越式的基础概念、基本运算和恒等变换。初中阶段首先集中讨论了整式的四则运算和因式分解，接着是分式和根式的运算性质与恒等变形。高中阶段进一步讨论了指数式、对数式、三角式和反三角式。由于解析式的恒等变换是求解方程、研究函数的工具，所以必须切实学好。

3．方程

主要讨论各类方程(组)的解法。课本从一元一次方程开始，由浅入深地讨论了一元二次方程，二元、三元线性方程组，并在此基础上进一步研究了简单的高次方程、分式方程和无理方程。方程是初中代数的核心内容，它的应用是联系实际的一个重要方

面，应予足够的重视。

4．不等式

初中代数讨论不等式的解法．包括一元一次不等式（组）、一元二次不等式和简单的绝对值不等式．高中代数比较系统地介绍不等式的基本性质，并讨论了证明不等式的几种最常用的证明方法，还进一步讨论了不等式的解法．一般地说，不等式问题的难度较大，综合性较强，教学中应注意培养学生的数学思维能力．

5．函数

函数在中学代数里占有十分重要的地位．函数概念在初中和高中课本里两次出现，并在刻画函数概念的过程中逐步渗透了集合、对应思想．在初中阶段要切实掌握好“函数及其图象”这一章的基本内容，并体现数、形结合的思想方法，以便为高中阶段比较系统地学习函数打下坚实的基础．

根据高等师范专科学校数学专业的培养目标，联系中学代数的教学实际情况，本书代数部分主要研究上述五个方面的内容，以及需要基础知识不多的排列组合内容．至于中学代数的其余内容，如统计初步、概率和数列等，考虑到它们之间联系比较松散，可以另外分列专题研究．此外，随着我国经济的迅速增长和数学教育改革的深入展开，计算器和微型电脑正悄然进入中学数学课堂，并且势必推动中学数学教学内容的结构改革．作为中学数学教师，应当注意这种发展趋势，并且积极参加有关的进修活动．

第一章　数　　系

现实世界中的数量关系和空间形式，是数学研究的最基本的对象。而数系，又是研究数量关系的起点，因而是初等代数最基础的内容。

本章从现代数学观点出发，系统讨论了各个数系的构成与扩展，数的运算和数的性质，以及近似计算等内容.这些理论知识，对于透彻理解和驾驭中学代数教材，是十分必要的。

§1·1　数的概念的扩展

推动数的概念不断扩展的原因有两个，外因是社会发展的需要；内因是为了满足运算封闭性的需要：除之不尽而有分数，减之不够而有负数，等等。

一、数的概念发展小史

人类最初的计数活动，起源于对猎物和猛兽的点数，以及人群间对捕获物的分配和交换，当原始人发现两只狼逼近时，可能会伸出两个手指将这一信息传达给他的同伴，并从两只狼、两只羊、两只野果等等和两个手指之间的一一对应关系中逐渐领悟到“2”这个概念。然后又有3，4等概念的产生。这样，自然数概念和人类的十个手指结下了不解之缘。公元前4世纪的哲学家亚里士多德曾经指出：十进制的广泛使用，是由绝大多数人生有10个手指和10个脚趾这一生理特征决定的。

中国是最早使用十进位值数制的文明古国。殷墟出土的甲骨文说明，殷商初期就已使用一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万等13个计数单位，即已经建立了十进非位值数

制．到了周代，又出现以算筹为计算工具的筹算方法．表示数目一到九的算筹数码有纵横两种形式：

纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

记数时，个位常用纵式，十位常用横式，依次纵横相间，按照从低位到高位自右向左排列．例如，

𝍯𝍥𝍪𝍧　和　𝍦𝍮　𝍪𝍣

分别表示7628和76024．注意第2个数百位上的0是用空位表示的．一般地，如果相邻两个数目都是横式，或都是纵式，它们之间必然有表示0的空位．这样，就能运用9个数码和空位表示任意大的自然数．这是世界上最早的十进位值数制，也是我国数学史上最重要的成就之一．

正分数是紧接自然数之后产生的，距今已有四千多年，但是零的符号“0”迟至公元后才在印度出现，9世纪的印度数学家摩诃毗罗对零的运算作了完整的讨论．这样就形成了非负有理数．这之前，约在公元前5世纪，希腊的毕达哥拉斯学派就发现了不可公度量的存在，相当于发现了无理数，但是该学派却不肯接受也不愿使用无理数．至于负数，在中国的《九章算术》里就已正式出现，其中“正负术”记载了正负数加减运算的法则．16世纪中叶，意大利数学家卡尔达诺在《大术》一书中讨论三次方程的解法时，使用了负数的平方根．他因此享有发现虚数的荣誉．但在以后两百多年间，许多数学家都不承认虚数的合理性．直到18世纪下半叶，由于欧拉和高斯的著作中自由地使用了虚数，并建立了比较系统的复数理论，虚数才得到广泛承认．到了19世纪70年代，戴德金和康托尔等数学家运用现代数学方法，建立起严格的实数理论．至此，实数系和复数系的理论基础才牢固地确立．

如上所述，新数的产生是交错出现的．例如，在人们引进负数之前先发现了无理数；在确立实数理论之前已产生了虚数概念．

但从整体上看，数的概念的发展的历史过程大致按照以下顺序：

自然数集$\xrightarrow{\text{添正分数}}$正有理数集$\xrightarrow{\text{添负分数和零}}$有理数集$\xrightarrow{\text{添无理数}}$实数集$\xrightarrow{\text{添虚数}}$复数集

在中小学数学教科书里，数的概念的扩展（或扩张）的步骤同历史过程是大致接近的，只是将零的引入提前了。即

自然数集$\xrightarrow{\text{添零}}$扩大的自然数集$\xrightarrow{\text{添正分数}}$算术数集$\xrightarrow{\text{添负数}}$有理数集$\xrightarrow{\text{添无理数}}$实数集$\xrightarrow{\text{添虚数}}$复数集

二、数系扩展的方式与原则

通常把对某种运算是封闭的数集叫做数系。例如自然数集N，它对于加法是封闭的，因此自然数集也叫做自然数系。同样，整数集Z、有理数集Q、实数集R和复数集C都是数系。但是一般的数集未必带有运算。例如$A=\{1, \sqrt{2}\}$，$B=\{x|-5\leqslant x\leqslant 3\}$，都不是数系。

1. 数系扩展的方式

数系扩展的方式有两种：

（1）添加元素法　即把新元素添加到已建立的数系中去，形成新的数系。它大致接近历史上数系扩展的方式。中小学数学教科书也是采用这种方式实现数系的扩展的。

（2）构造法　这是按照代数结构的观点和比较严格的公理系统扩展数系的方法。一般做法是先从理论上构造一个集合，然后指出这个集合的某个真子集与已知数系是同构的。本章§1.7将用构造法实施由实数集到复数集的扩展。

2. 数系扩展的原则

设数系A扩展后得到新的数系B，不论采用哪种扩展方法，都应遵循以下原则：

（1）$A\subset B$（A是B的真子集）。

（2）A的元素间所定义的一些运算或基本关系，在B中被

重新定义．而且对于A的元素来说，重新定义的运算和关系与A中原来的意义完全一致．

（3）在A中不是总能施行的某种运算，在B中总能施行．

（4）在同构的意义下，B应当是A的满足上述三原则的最小扩展，而且由A唯一确定．

在上述四条原则中，第三条是最重要的，实际上它是数系扩展的主要目的．同时要指出，数系扩展后也失去了一些性质．例如自然数系有最小数，扩展后的整数系就没有最小数．不过这和原则（2）并不矛盾．因为作为整数集的真子集，自然数集仍有最小数．

§1·2 自然数集

自然数集是日常生活中应用最多的数集．既可用它清点数目的多少，也可用它编排次序；反过来说，点数或排序所得的结果都是自然数，数学上据此形成两种自然数理论：基数理论和序数理论．

一、基数理论

1．自然数概念

自然数的基数理论以集合论的基本概念为基础．在集合论中，如果集合A和B的元素之间可以建立一一对应的关系，就称集合A和集合B等价，记作$A\sim B$．不难验证，集合的等价具有下面的性质：设A、B、C是集合，则

（1）$A\sim A$（反身性）；

（2）若$A\sim B$，则$B\sim A$（对称性）；

（3）若$A\sim B$，$B\sim C$，则$A\sim C$（传递性）．

集合论的创始人康托尔首先指出：如果一个集合能够和它的一个真子集建立等价关系，这个集合就是无限集．我们可以据此定义有限集．

定义1 不能与自身的任一真子集等价的集合叫做有限集．

例如，下面是三类最简单的等价有限集合：

（1）$\{\triangle\}\sim\{\odot\}\sim\{\times\}\sim\{\varnothing\}$；

（2）$\{\triangle$，甲$\}\sim\{\odot$，乙$\}\sim\{\times$，丙$\}\sim\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$；

（3）$\{\triangle$，甲，子$\}\sim\{\odot$，乙，丑$\}\sim\{\times$，丙，寅$\}\sim\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$。

我们注意到，这三类集合中最抽象的集合是每类最后的集合，即$\{\varnothing\}$，$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$和$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$，它们除了能够体现每类集合的共同特征之外，不具有任何别的实际意义，因而它们常被选定为每类集合的代表。

定义2 彼此等价的所有集合的共同特征的标志叫做基数。非空有限集合的基数叫做自然数，空集的基数叫做0。集合A的基数记作$|A|$。并规定

$$|\{\varnothing\}|=1,\ |\{\varnothing, \{\varnothing\}\}|=2,$$
$$|\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}|=3.$$

等等，从而得到自然数集

$$N=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}.$$

由定义2可知，$A\sim B\Longleftrightarrow|A|=|B|$。

例如，要求$\{x, y, w\}$的基数，可先找出它的等价集合：$\{x, y, w\}\sim\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$，所以$|\{x, y, w\}|=|\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}|=3$。

根据定义2与等价集合的性质，可得

定理1 自然数的相等关系具有反身性、对称性与传递性，即

（1）对任何$a\in N$，有$a=a$（反身性）；

（2）设$a, b\in N$，若$a=b$，则$b=a$（对称性）；

（3）设$a, b, c\in N$，若$a=b$，$b=c$，则$a=c$（传递性）。

一般地，如果集合A的元素间的某个关系满足反身性、对称性和传递性，就称它是一个等价关系。因此，自然数的相等关系