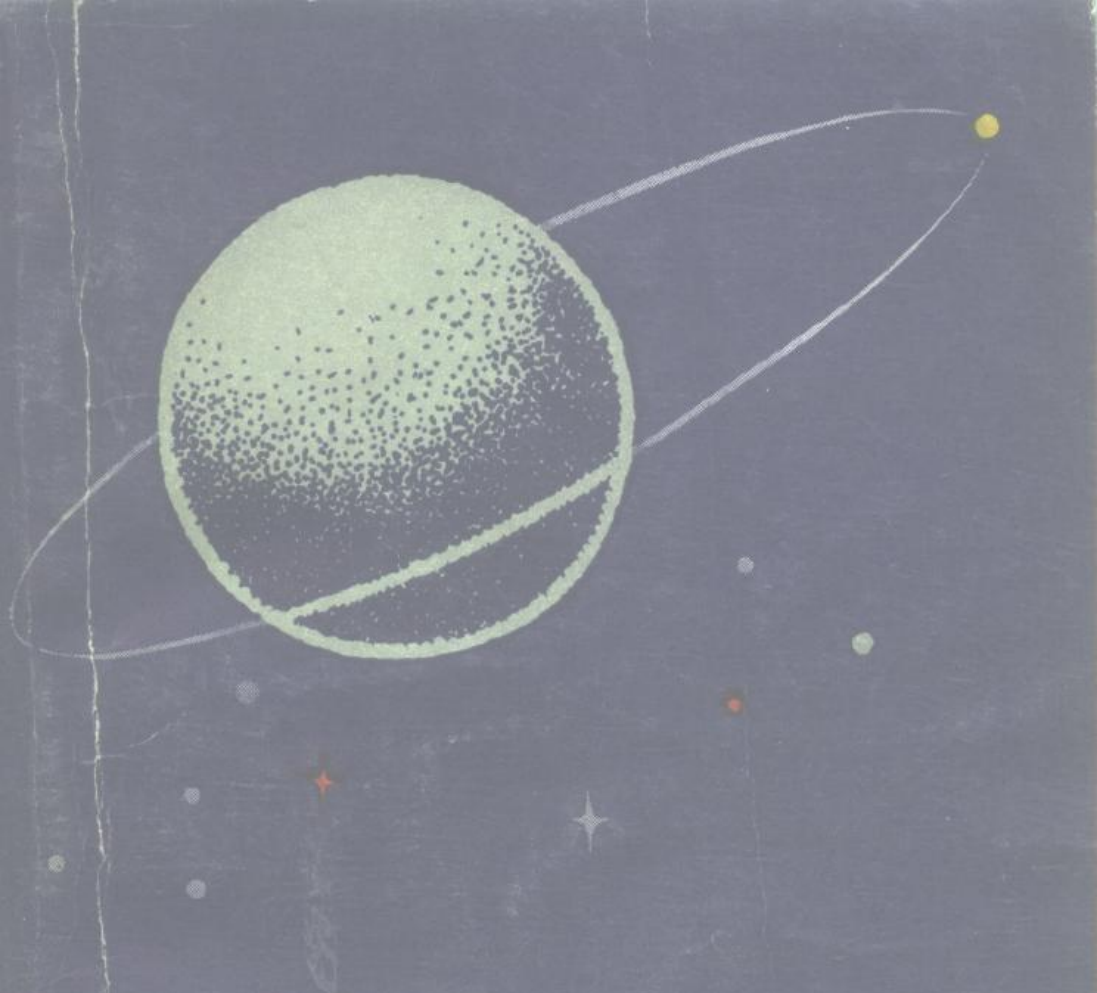




周卡 编著

空间测量中的力学基础

测绘出版社

P128.1

ZK

空间测量 中的力学基础

周 卡 编著

130

测绘出版社

002779

本书共分九章,并有一个附录,系统地阐述了空间测量中的力学基础性问题。第一章为矢量运算,第二章为质点力学,第三章刚体运动,第四章广义坐标与拉格朗日运动方程,第五章变分法及哈密尔顿理论,第六章为正则变换,第七章哈密尔顿——雅可比运动方程,第八章摄动问题,第九章空间测量中的坐标系统及其变换。书末附录讲述张量计算。为处理空间测量的基础。

本书的特点是着重理论基础。

本书可供大地测量科技人员,空间探测人员,地球物理专业人员以及各有关专业研究生的基础参考书。

空间测量中的力学基础

周卡 编著

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32·印张 13 3/8·字数 300 千字

1983 年 9 月第一版·1983 年 9 月第一次印刷

印数 1—3,300 册·定价 2.05 元

统一书号: 15039·新 214

前 言

目前大地测量学发展的趋势是向着宇宙空间及探测地壳运动的方向前进。在处理这些空间问题中,必须采取统一的坐标系,对宇宙空间来说,日心坐标系看来是可行的,对地球来说,地心坐标系看来是必须要在世界范围内建立的。由于人造地球卫星、宇宙飞船航行的成功,电子计算机的功能的进一步提高,宇宙通讯系统的日趋完善,给了空间测量技术以巨大的冲力。

我们从事这方面的工作,理论基础必须要强。我们在书坊见到的书籍介于解析力学与天体力学之间,并以近代数学为表达工具的还不多,这样就促使了笔者在 1975 到 1978 年的这一段时间抽空编写本书。对笔者帮助较大的是:

1. Goldstsin, H.; Classical Mechanics, 1953.
2. Michal, A.D.; Matrix and Tensor Calculus, 1947.
3. Page, L.; Introduction to Theoretical Physics, 1947.
4. Whittaker, E.T.; A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 1944.

当然,还有别的书籍(参考本书中的各参考文献)。笔者的理论水平有限,虽尽了自己的最大努力,错误的地方一定也是难免的,希望读者批评指正。

周 卡

1981 年 2 月于北京

绪 言

“空间测量”一语的含义是指包括地球、地球以外诸行星和卫星在内，利用人造卫星作为测标或载运测器的观测台，对之进行测量的意思。

测量学，总言之，就是一门空间定位的科学。谈到空间定位必然就要谈到这被定位的点或点集，这被定位的质体或质体群，它们的位置以什么为基准。对于基准问题，从数学观点说，就是空间坐标系的选取和建立。坐标系随着时间与空间的变化而处于变动之中。我们生存于地面，由于各个国家的政治与历史关系以及所处的地理位置不同，分别建立了各自的坐标系来处理其本身有关的测量问题。若把地球当作一整体来对待，这样分散的独立坐标系是满足不了要求，而达不到统一的科学目的。

我们生存在地面上，一切活动都在地面上，我们测量的主要对象是地面点在某一坐标系上的位置和各点所构成的几何形状。所以我们就把这样的活动及其后面的理论依据，统称之为几何的大地测量学或几何的测量学。同时在处理这些相关位置当中又是把地球当作是一个具有稳定的固体壳的刚体。从目前我们对地壳的了解来说显然是不恰当的，地壳本身存在着块体运动。

地球附有质量，一切在空中运动着的质体包括测量仪器和载运仪器的工具也都附有质量，既有质量就离不开空间引力场的作用，必然要产生相对运动。在测定地球重力场中，出现了等位面 and 地球形状的问题，处理这个问题所采取的手

段和其理论根据，我们就叫它为物理的大地测量学或物理的测量学。在表达地表位置的三维空间中，以参考椭球面为基准的地面点的曲面坐标形成一个系统，而由水准测量所得的高程点，又形成另外一个系统。这两个系统过去一直是把它们分别开来处理的，主要表现在测量平差过程中。

测量学或大地测量学既然是当作应用几何学而开始的，在通过它的绝大部分历史中，作为以地球为对象的技术科学，长期保持了它的几何特性。直到19世纪的后半期，测量工作者所使用的工具都是扩大了几何仪器的变种，即使在人造卫星升空的时代，在世界范围内进行着全球的重力测量，他们仍把这些卫星主要看作是一种新的几何工具，一种升高了的新观测台，以过去习惯了的使用方式来对待。

由于经验的累积，在卫星跟踪和轨道的观测中，我们发现人造卫星可以多种方式来使用。第一种想法是对卫星从数个测站、在通视条件许可下进行同步观测，便于消除因卫星运动而引起的位置误差。虽然我们相信同步观测可以获得最高精度，而准同步观测，借动力地计算卫星位置仍可收到高精度的效果。时间间隔，从而卫星在各观测期间可能运动的距离，则是在卫星轨道精度之外的许多其他因素的基础上来选择的，可以从几秒到数天。卫星观测一般分为：

同步联立观测；

短弧；

长弧。

显然对上面三种类型的观测，可以进行各种组合，但没有必要在此叙述得如此复杂，也没有必要将短弧和长弧作细致的区分。总的说来，短弧法是把为了定出一组坐标所需的全部观测，安排在卫星轨道一周之上进行；长弧法则把观测

分布在多周之上。

同步联立观测的理论,在目前,总的来说已相当成熟了。绝大部分的困难,主要出现在影响精度的小的误差源,如折射、仪器时滞等上。除此之外,还有测站分布的最优化问题。

如果观测是非同步的,则在观测时的卫星位置要么就必须从独立源知道,要么就要沿测站测定卫星轨道。后一场合就相当于要作测站坐标、卫星轨道以及地球重力场的共同测定。前者原则上与同步观测相同。

大地水准面可以从几何的天文大地测量法得出,但只限于陆地。一个较为间接的途径,可用于陆地和海洋的是通过重力测量。在人造地球卫星出现之前,从重力数据推导大地水准面,几乎全都使用 Stokes 公式,它是以全球重力异常为函数而给出大地水准面对于参考椭球面的高。这个公式有缺点,在五十年代的早期曾由 M.Molodensky(1948), R.Hirvonen(1960), A.Bjerhammar(1960)以及其他的人都指出来了,并且提出了修正的公式。

随着人造地球卫星的进展,一个寻找大地水准面总的形貌的较简单的途径,是引用把重力位表示成球谐函数的级数式。这个级数式是如此地有用于人造卫星数据来工作的理由,在于当将这些数据代入卫星运动方程时,它给出一组可以解析解的微分方程(虽不是闭合式,但不用很多的代数运算)。

在卫星测地的早期年代,在地面重力法与卫星重力法之间的差别,仍是很突出的,因为地面资料分布不理想,以至不能以良好的信息,给出大地水准面的总形貌,而且卫星资料相当粗糙,以至不能提供出来有关短波长细节的任何知

识。随着这两种资料的增进和增长，相应的理论就得结合起来，使得资料能够组合应用。

在研究卫星资料与地面资料的组合法中，我们知道原始地面重力值是对参考椭球体，以各种不同的距离，按点给出的。在与卫星资料比较之前或在代入待解方程之前是要它们换算成重力异常，而取其平均值。以我们所要改正的是空间 (free air) 异常或是均衡 (isostatic) 异常为转移，这个过程能产生不同的结果级别。把这些资料与卫星资料综合起来最后得出的大地水准面，依施行的改正的不同将相应地变化。

当 Stokes 的逐点积分及球谐级数为人们广泛应用 而且是最有名的场显示之际，它们不是唯一的，对于各种目的来说，也不是最佳的。Stokes 公式对于一已知点的大地水准面，要求知道全球重力值；球谐法要求知道全部系数来取得一已知点上的总的大地水准面高。对于短距离的相对高程，前者是好的，对于远距离的相对平均高程，后者是好的。

到现在为止，月球测量工作已进行了不少了，而金星测量也在探索中。

正是为了空间测量打好理论基础，我们开始写本书的。

为了把理论公式的推导，表达得精简而有力一些，我们采用了矢量和张量计算这二种近代的数学工具。矢量这一部分在第一章作了基本的介绍；其中也提到了一些张量的基本概念。本来矢量就是一阶张量。要熟悉张量就必须从熟悉矢量开始。由于篇幅的限制及防止过多的数学内容冲淡了本书的重点，故把张量这一部分作为附录。

第二章所介绍的是有关质点力学的部分。这是从运动学的观点出发必须了解的基本知识。单从目录上看，好像都是一些普通物理的东西，然而就从这里引导出来了一些基本概

念，同时在处理这些问题所用的数学方法上，寓意作以后各章要重复引用的基础。

第三章刚体运动主要在表达由许多质点组成的质体间的力学关系，特别是相对于地球的运动。我们把固体的运动，以其本身当成一个整体的量来描述，所得的结论，必然是牛顿定律和固体刚性的后果，此外并没有什么新的内容。

刚体运动的主要内容是讨论刚体的定位，位移和旋转。至于物体的形变对于运动所产生的影响，我们认为这是弹性力学要研究的题材，在这里即不予考虑。

第四章广义坐标与拉格朗日运动方程。一个力学问题解出的难易，很大程度上取决于空间坐标系的选取。在选取坐标系中，我们希望有尽量多的循环坐标出现，从而使问题解得容易。

第五章变分法及哈密尔顿理论是在解复杂的力学问题中将运动方程写成变分原理的形式，独立于坐标系，变换就可简化得多。

第六章正则变换及第七章哈密尔顿运动方程是解决力学问题的基本技术。这是我们必须要很好掌握的。

第八章摄动问题。利用哈密尔顿—雅可比方程来解决复杂的力学问题，常碰到许多困难。对这个偏微分方程的解出，只是偶尔得到成功。在处理位函数问题上，我们把它分成二部分：一部是由单体所引起，其余一部分看作其他第三者所引起的摄动。我们先解主要部分，然后依近似计算，逐次迭代来解摄动问题，使解出的结果，达到我们欲求精度。这是技术科学中的非常重要的一种手段。对于一个复杂的问题，我们追求严格的数学解是不现实的，往往也是不可能的。明智者必须在省力、省时和省钱的基础上讲求实效。

第九章空间测量中的坐标系统及其变换，完全是在解决大地测量中的几何问题上来讨论的，没有讨论实际的测量问题，这是因为本书的目的在于打基础，弥补一般业务书籍的不足而已。

谈到空间质体的相对运动问题，我们必须要在空间和时间问题上有正确的了解，然后才能得到比较正确的结论。在这个意义上，显然我们是需要相对论的知识的。由于不能使读者负担过重，我们在此从略。

在写这本书的过程中，我们老想到给读者打基础，希望读者在研究工作上发挥作用，于是在理论上可能写得多了一点或者深了一点。希望读者不必耽心，只要在第一章多化一点功夫，然后补充一部分矩阵计算的知识，全书是可以愉快地读下去的。

参 考 文 献

1. Bjerhammer, A.: On the Determination of the Shape of Earth, Geodesy Division, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1960.
2. Hirvonen, R.: New Theory of the Gravimetric Geodesy, Paper 56, Ser. A3, Finnish Acad. of Sci., Helsinki, 1960.
3. Molodensky, M.: The External Gravitational Field of the Figure of the Earth, Publ. 12(3), Akad. Nauk. SSSR, Moscow, 1948.

目 录

第一章 矢量	(1)
1-1 小引	(1)
1-2 矢量的定义 (矢量的几何意义和性质) ...	(1)
1-3 笛卡尔直角坐标系和单位矢量	(2)
1-4 二矢量的数积	(4)
1-5 面积的矢量表示法	(6)
1-6 三维空间中的直线和平面	(8)
1-7 二矢量的矢积	(10)
1-8 三矢积	(14)
1-9 斜角坐标, 基和逆基	(18)
1-10 矢量的逆变分量和协变分量	(22)
1-11 斜角坐标系上二矢量的数积(标积)	(24)
1-12 直积	(27)
1-13 一组线性无关的矢量的正交化	(28)
1-14 矢量的微分	(32)
1-15 梯度	(36)
1-16 矢量场的散度	(38)
1-17 旋度(或旋转)	(40)
1-18 矢量运算符 ∇ 的连续引用	(42)
1-19 矢量积分	(44)
1-20 散度定理	(47)
1-21 司托克(Stokes)定理	(49)
1-22 正交曲线坐标	(53)

第二章 质点力学	(62)
2-1 小引	(62)
2-2 速度和加速度	(62)
2-3 运动诸定律	(70)
2-4 功与能	(72)
2-5 射体运动	(76)
2-6 自由落体运动	(81)
2-7 简谐运动	(85)
2-8 阻尼振动	(87)
2-9 非调和运动	(89)
2-10 强迫振动	(93)
2-11 椭圆简谐运动	(95)
2-12 单摆	(98)
2-13 耦和振动	(102)
2-14 在反平方引力下的运动 行星运动	(105)
2-15 质点组的质心运动	(118)
2-16 角动量及力矩	(121)
第三章 刚体运动	(126)
3-1 小引	(126)
3-2 标准轴系	(127)
3-3 尤拉角	(130)
3-4 速度和加速度	(137)
3-5 相对于地球的运动	(143)
3-6 惯性张量	(145)
3-7 尤拉方程	(147)
3-8 陀螺仪 (对称旋转子)	(155)
3-9 二分点的岁差 (进动)	(162)

第四章 广义坐标与拉格朗日运动方程	(167)
4-1 小引	(167)
4-2 以广义坐标所表示的速度和加速度	(170)
4-3 拉格朗日运动方程	(172)
4-4 循环坐标	(189)
4-5 齐二次拉格朗日函数与正态模	(194)
第五章 变分法及哈密尔顿理论	(198)
5-1 小引	(198)
5-2 变分法中所处理的问题类型	(198)
5-3 变分计算	(200)
5-4 哈密尔顿原理	(204)
5-5 哈密尔顿原理与制约条件	(209)
5-6 非守恒系	(211)
5-7 最小作用原理	(213)
5-8 哈密尔顿运动方程	(215)
5-9 哈密尔顿函数的意义	(219)
5-10 哈密尔顿函数与循环坐标	(221)
第六章 正则变换 (接触变换)	(226)
6-1 正则变换 (接触变换)	(226)
6-2 Poincaré 积分不变式	(235)
6-3 作为正则变换不变式的拉格朗日符号 与珀松符号	(240)
6-4 珀松符号与运动方程	(249)
第七章 哈密尔顿——雅可比运动方程	(252)
7-1 小引	(252)
7-2 对于哈密尔顿主函数的哈密尔顿——雅 可比方程	(252)

7-3	对于哈密尔顿特性函数的哈密尔顿—— 雅可比方程·····	(258)
7-4	哈密尔顿——雅可比方程中的变 数分离·····	(262)
7-5	空间中的开卜勒问题·····	(268)
第八章	摄动问题·····	(285)
8-1	小引·····	(285)
8-2	摄动方程·····	(285)
8-3	椭圆变数·····	(291)
8-4	对拉格朗日方程的修改·····	(296)
8-5	椭球位·····	(303)
8-6	由于地椭而致的卫星摄动·····	(317)
8-7	长期摄动·····	(331)
8-8	日月摄动·····	(337)
8-9	太阳辐射摄动·····	(352)
8-10	大气阻力摄动·····	(356)
第九章	空间测量中的坐标系统及其变换·····	(369)
9-1	小引·····	(369)
9-2	坐标系·····	(369)
9-3	坐标变换·····	(375)
9-4	时及坐标的精确定义·····	(382)
附录	张量计算·····	(387)
1.	注记与求和·····	(387)
2.	欧几里得度量张量·····	(388)
3.	标量、逆变矢量及协变矢量·····	(391)
4.	二阶张量场·····	(392)
5.	欧几里得 Christoffel 符号·····	(396)

- 6. 矢量场协变微分..... (398)
- 7. $r = p + q$ 阶张量场, p 阶逆变, q 阶协变 (401)
- 8. Christoffel 符号及其有关的式子 (403)

第一章 矢 量

1-1 小 引

在处理和分析空间问题中，矢量和张量是非常有力的数学工具。矢量本身就是一阶张量。了解张量代数必须从深入了解矢量运算开始。

我们写这一章的目的是为了张量，也是为了以后的力学推导打基础。只要读者在立体解析几何学和微积分学上有一定的基础，阅读是不会有困难的。希望读者能较好地掌握这一章，它的突破为以后各章铺平道路。

1-2 矢量的定义(矢量的几何意义和性质)

有许多物理量不能单独以简单的数来表示，还必须指出其方向，例如一作用力，只有在它的大小和方向都知道以后，才能使它完全决定。这是一类的量。而另一类如质量、温度等，只要一数值即够了。前一类具有大小（数）和方向的量，叫做“矢性量”。而后一类只具有数，而无方向关系的量，叫做“数性量”或标量。

一数性量可以一简单的数值表出，而矢性量就必须以矢量来表达。一矢量是一有向线段，其长是以某一单位来计的该量的大小，其方向就是所表达的量的方向。为了完全表达出一矢量的方向，必须要区别出该矢量的始点和终点。始点设在何处毫无关系，我们考虑矢量，只要它对于其本身平移时

不生变化即可。然而在某些特殊情况下，矢量位置可有其一定的意义。虽然始点位置一般不重要，而始点与终点的区别必须明确，因为始点与终点互换，给出一反向矢量。

以下我们以一斜体字母如 a 来表示数量，以黑体字母如 $\mathbf{a}$ 来表示矢量。如是，此地的 a 即 $\mathbf{a}$ 的模或长。以后凡是黑体小写字母，除特别指出外，一律代表矢量。

为了将二矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 几何地相加，则将 $\mathbf{b}$ 的始点置于 $\mathbf{a}$ 的终点。此二矢量的和即这样一矢量，它的始点即 $\mathbf{a}$ 的始点，它的终点即 $\mathbf{b}$ 的终点，见图 1-1，

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} . \quad (1-1-1)$$

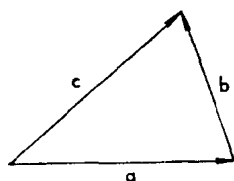


图 1-1
矢量相加

这就是矢量的加法律。

二矢量的相加与加的顺序无关，满足加法的交换律：

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} .$$

这种加法可继续进行至任何数的矢量，成对相加至最末一对为止。

一矢量可以一正数相乘得一新矢量，其方向不变，其长为原矢量长的乘数倍。以 -1 相乘改变原矢量方向。一负数乘一矢量相当于先乘 -1 而后以该数的绝对值相乘。

一矢量与另一矢量的相减相当于加一负矢量，

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{c} + (-\mathbf{b}) . \quad (1-2-2)$$

1-3 笛卡尔直角坐标系和单位矢量

为了表达和处理矢量运算的方便起见，我们在这里建立一右手直角坐标系，以 O 为原点，其三正交轴的关系，正如一螺旋一样，反时针方向旋转时，螺旋就向前进。这样的坐