高等专科学校试用教材

高等数学

上 册

上海市高等专科学校《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社

高等专科学校试用教材

高 等 数 学

上 册

上海市高等专科学校
《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社

高等专科学校试用教材
高 等 数 学
上 册
上海市高等专科学校
《高等数学》编写组编
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行 上海群众印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 12.5 字数 274,000
1986 年 5 月第 1 版 1986 年 5 月第 1 次印刷
印数：1—25,000
统一书号：13119·1234 定价：2.05 元

前　　言

近年来，我国高等工业专科教育有了很大的发展，编写适合专科学校的高等数学教材已成为各校的迫切要求．在上海市高等教育局的领导下，上海九所高等工业专科学校于1983年初组成了编写组，共同拟订了大纲，讨论了初稿，编写出本教材．

在编写过程中，广泛征求了本市和各地专科学校数学教师的意见，在教材内容选取上，结合专科学校的培养要求和学制特点，力求贯彻"少而精"的原则，加强对学生的基本运算能力的训练；同时注意贯彻理论联系实际的原则，以利于培养学生分析问题和解决问题的能力．

全书基本内容按实际授课时数160左右编写（包括习题课），另有少量带*号的内容供不同需要选用．本书除供三年制工业专科高等数学课使用外，也可供要求相近的大学本科和专科、职工大学、业余大学选作教材以及工程技术人员和具有高中水平的读者参考或自学．

全书共十二章，分上、下两册，上册七章，包括极限与连续，导数与微分，中值定理和导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，微分方程；下册五章，包括无穷级数，向量代数和空间解析几何，多元函数微分学，重积分，线积分和面积分．书后附有常用初等数学公式，常用积分表，平面和空间的常用图形，习题答案．每节后配置了较多的习题，用横线将基本题与提高题分开．每章后配有适量的复习题．

参加本书编写的有(以姓氏笔划为序)：王光球(上海建筑材料专科学校)，严宁鉴(上海冶金专科学校)，李国勇(上海纺织专科学校)，陈光渝(上海冶金专科学校分校)，陈保权(上海医疗器械专科学校)，杨选贤(上海化学工业专科学校)，金士岐(上海轻工业专科学校)，洪蓬(上海科技专科学校)，黄淑芳(上海电力专科学校)．由金士岐、黄淑芳担任主编．复旦大学数学系朱学炎副教授审阅了本书全稿．鉴于专科学校教材建设工作是一个新的尝试，加之时间仓促，难免有不妥之处，盼望使用本书的同行和广大读者不吝指教，以便进一步修改．

上海市高等专科学校《高等数学》编写组

1984年5月

目　录

（上　册）

前　言

第一章　极限与连续

第二章 导数与微分

第三章 中值定理与导数的应用

第四章 不定积分

第五章　定　积　分

第六章　定积分的应用

第七章 微分方程

附 录

习 题 答 案

第一章　极限与连续

函数、极限都是高等数学中最基本的概念，也是微积分的基础. 在中学数学里，对函数概念及其性质已有较详细的讨论，所以本章将在复习函数概念的基础上，着重介绍函数的极限和连续性.

第一节　函　　数

一　函数的概念

客观世界有许多变量，它们之间往往不是孤立的，而是相互依赖、相互制约的. 相互依赖的变量之间的确定关系，在数学上就称为函数关系.

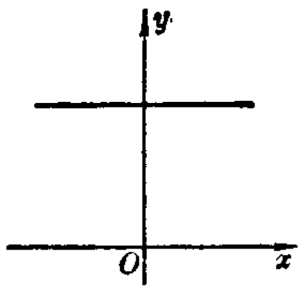
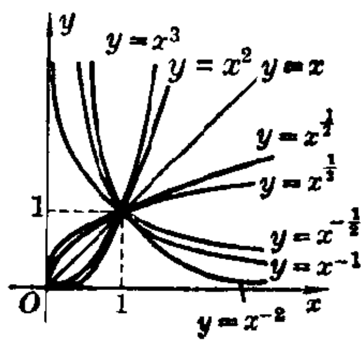
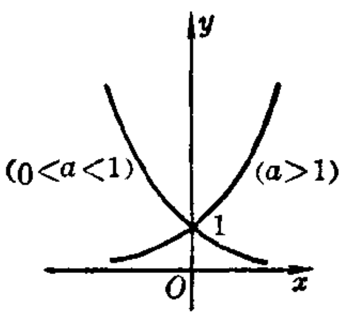
定义　设有两个变量 x 与 y，如果变量 x 在其变化范围 D 内任取一个确定数值时，变量 y 按照一定的规律有唯一确定的数值和它对应，就称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$，且称 x 为自变量，y 为因变量. 自变量 x 的变化范围 D 称为函数的定义域.

函数的定义域常用区间来表示，自变量与因变量的对应规律通常用表格、图象与解析式来表示. 定义域与对应规律是函数关系中的两个要素. 两个函数若具有相同的定义域和对应规律，则称它们是等同的.

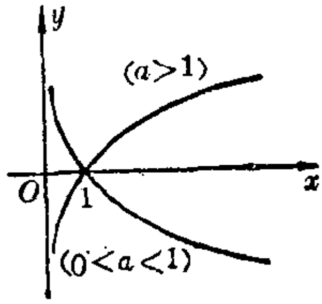
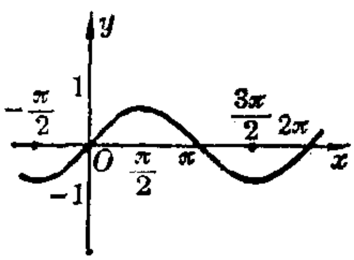
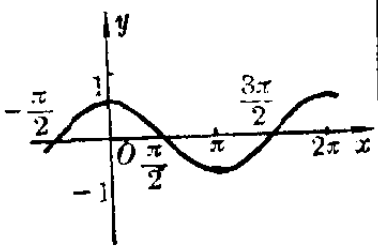
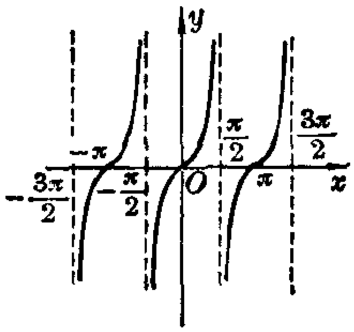
如果自变量取某一数值 x_0 时，函数 $y=f(x)$ 有确定的值和它对应，则称函数在 x_0 处有定义，且记 x_0 处的函数值为

$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$，所以，函数的定义域也就是使函数有定义的x值的全体；而相应的函数值的全体称为函数的值域.

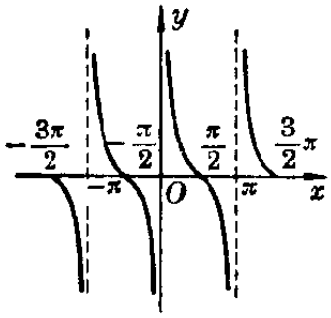
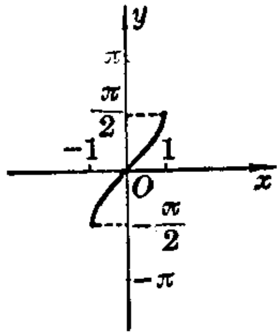
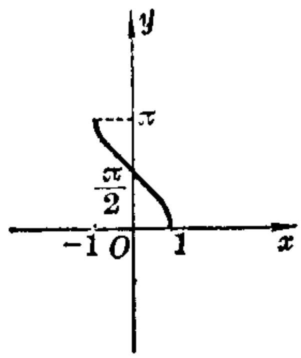
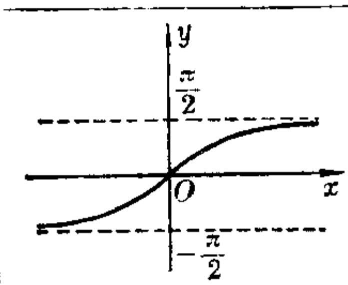
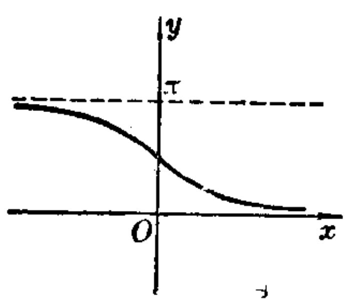
在中学数学里，对于常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等基本初等函数已作过较详细的介绍. 为了今后学习和查阅方便，仅将它们的图形和简单性质列表于下：

名称	表达式	定义域	图形	特性
常数函数	$y=c$	$(-\infty,+\infty)$		
幂函数	$y=x^{\mu}$ $(\mu\neq 0)$	随μ而不同，但在$(0,+\infty)$中都有定义.		经过点$(1,1)$. 在第一象限内当$\mu>0$时，x^{μ}为增函数；$\mu<0$时，x^{μ}为减函数.
指数函数	$y=a^x$ $(a>0,$ $a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$		图象在x轴上方(因$a^x>0$)，且都通过点$(0,1)$. 当$0<a<1$时，a^x是减函数；当$a>1$时，a^x是增函数.

（续表）

名称	表达式	定义域	图形	特性
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$	$(0,+\infty)$		图象在y轴右侧(因0与负数都没有对数)，都通过点(1, 0)。当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 是减函数；当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 是增函数。
三角函数 正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,\ +\infty)$		是以 2π 为周期的奇函数(图形关于原点对称)。图形在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间，即 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$.
三角函数 余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,\ +\infty)$		是以 2π 为周期的偶函数(图形关于y轴对称)。图形在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间，即 $\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$.
三角函数 正切函数	$y=\mathrm{tg}\,x$	$x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$		是以π为周期的奇函数，在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$内是增函数。

（续表）

名称		表达式	定义域	图形	特性
	余切函数	$y=\mathrm{ctg}\,x$	$x\neq k\pi$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$		是以π为周期的奇函数，在$(0,\ \pi)$内是减函数。
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,\ 1]$		单调增加的奇函数.值域：$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,\ 1]$		单调减少. 值域：$0\leqslant y\leqslant\pi$.
	反正切函数	$y=\mathrm{arc\,tg}\,x$	$(-\infty,\ +\infty)$		单调增加的奇函数．值域：$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.
	反余切函数	$y=\mathrm{arc\,ctg}\,x$	$(-\infty,\ +\infty)$		单调减少. 值域 $0<y<\pi$.

二 复合函数

在很多实际问题中，两个变量的联系有时不是直接的。例如，质量为 m 的物体，以初速度 v_0 向上抛，则动能 E_k 是速度 v 的函数：

$$E_k=f(v)=\frac{mv^2}{2},$$

而速度 v 是时间 t 的函数(略去空气阻力)：

$$v=\varphi(t)=v_0-gt,$$

其中 g 是重力加速度。这样，动能 E_k 可通过变量 v 表示成 t 的函数：

$$E_k=f(v)=f[\varphi(t)]=\frac{m(v_0-gt)^2}{2}.$$

一般地，设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域包含在 $f(u)$ 的定义域内，则通过变量 u，y 就是 x 的函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，并称它为前两个函数的复合函数，而变量 u 则称为中间变量。

例 1 设 $y=\sqrt{u}$，而 $u=1+x^2$，则构成复合函数

$$y=\sqrt{1+x^2}.$$

必须注意，复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域应该是使 $u=\varphi(x)$ 的函数值属于 $y=f(u)$ 的定义域的那些 x 所组成。因此，通常只是 $u=\varphi(x)$ 的定义域的一部分。

例 2 设 $y=\arcsin u$，而 $u=1-x^2$，则构成复合函数

$$y=\arcsin(1-x^2)$$

的定义域 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ 仅是 $u=1-x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的一部分。

复合函数不仅可以由两个函数，也可以由多个函数相继进行有限次复合而成。例如，$y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x$ 复

合而成的函数为 $y=\sin\sqrt{1-x}$.

研究复合函数的概念，不仅能将若干个简单的函数复合成一个函数，还可将较复杂的函数分解为若干个简单的函数，这对今后实际运算很有用. 例如，$y=\ln(1-x)$可以看作由 $y=\ln u$, $u=1-x$ 复合而成. 又如，函数 $y=\sqrt[3]{(1+x-x^2)^2}$ 是由函数 $y=u^{\frac{2}{3}}$ 与 $u=1+x-x^2$ 复合而成的.

凡是由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合步骤所构成的函数统称为*初等函数*. 上述各例都是初等函数.

三　双曲函数

工程技术中，有时要用到一种称为双曲函数的初等函数，其定义为：

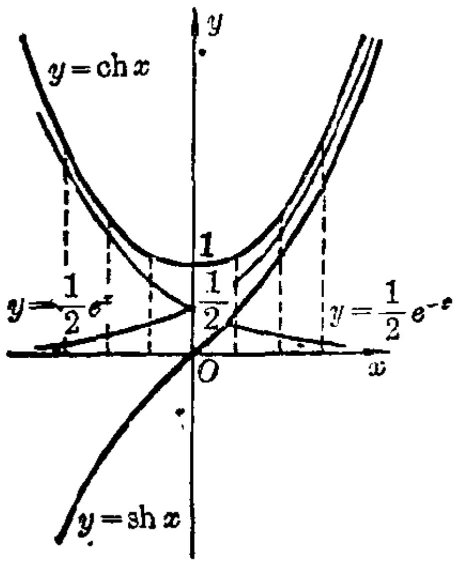


图　1-1

双曲正弦函数

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};$$

双曲余弦函数

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

它们的图形如图 1-1 所示. 由双曲函数的定义，可推出下列公式：

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh}(x-y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y-\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x-y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y-\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x,$$

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$$

以上双曲函数的公式与三角函数的公式相类似，可以通过对比，帮助记忆.

现将两个函数的主要性质列表如下：

名 称	表 达 式	定 义 域	性 质
双曲正弦函数	$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$(-\infty, +\infty)$	奇函数，图形在 I、III 象限，通过原点. 在$(-\infty, +\infty)$内单调增加. $\|x\|$很大时，在第 I 象限内图形接近于 $y=\frac{1}{2}e^x$；在第 III 象限内图形接近于 $y=-\frac{1}{2}e^{-x}$.
双曲余弦函数	$\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$(-\infty, +\infty)$	偶函数，图形在 I、II 象限，通过点$(0, 1)$. 在$(-\infty, 0)$内单调减少；在$(0, +\infty)$内单调增加. $\|x\|$很大时，在第 I 象限内图形接近于 $y=\frac{1}{2}e^x$；在第 II 象限内图形接近于 $y=\frac{1}{2}e^{-x}$.

除了上述双曲正弦函数和双曲余弦函数外，有时还用到双曲正切函数和双曲余切函数，它们的定义是：

双曲正切函数

$$\mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x},$$

双曲余切函数

$$\mathrm{cth}\, x = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}.$$

其性质就不再列举了.