

高等专科学校试用教材

高等数学

上册

上海市高等专科学校《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社

高等专科学校试用教材

高等数学

上册

上海市高等专科学校
《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社

高等专科学校试用教材

高等数学

上册

上海市高等专科学校

《高等数学》编写组编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

总发行所上海发行所发行 上海群众印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 12.5 字数 274,000

1984 年 5 月第 1 版 1985 年 5 月第 1 次印刷

印数: 1—25,000

统一书号: 13119·1234 定价: 2.05 元

前 言

近年来,我国高等工业专科教育有了很大的发展,编写适合专科学校的高等数学教材已成为各校的迫切要求。在上海市高等教育局的领导下,上海九所高等工业专科学校于1983年初组成了编写组,共同拟订了大纲,讨论了初稿,编写出本教材。

在编写过程中,广泛征求了本市和各地专科学校数学教师的意见,在教材内容选取上,结合专科学校的培养要求和学制特点,力求贯彻“少而精”的原则,加强对学生的基本运算能力的训练;同时注意贯彻理论联系实际的原则,以利于培养学生分析问题和解决问题的能力。

全书基本内容按实际授课时数160左右编写(包括习题课),另有少量带*号的内容供不同需要选用。本书除供三年制工业专科高等数学课使用外,也可供要求相近的大学本科和专科、职工大学、业余大学选作教材以及工程技术人员和具有高中水平的读者参考或自学。

全书共十二章,分上、下两册,上册七章,包括极限与连续,导数与微分,中值定理和导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用,微分方程;下册五章,包括无穷级数,向量代数和空间解析几何,多元函数微分学,重积分,线积分和面积分。书后附有常用初等数学公式,常用积分表,平面和空间的常用图形,习题答案。每节后配置了较多的习题,用横线将基本题与提高题分开。每章后配有适量的复习题。

参加本书编写的有(以姓氏笔划为序):王光球(上海建筑材料专科学校),严宁鉴(上海冶金专科学校),李国勇(上海纺织专科学校),陈光渝(上海冶金专科学校分校),陈保权(上海医疗器械专科学校),杨选贤(上海化学工业专科学校),金士岐(上海轻工业专科学校),洪蓬(上海科技专科学校),黄淑芳(上海电力专科学校)。由金士岐、黄淑芳担任主编。复旦大学数学系朱学炎副教授审阅了本书全稿。鉴于专科学校教材建设工作是一个新的尝试,加之时间仓促,难免有不妥之处,盼望使用本书的同行和广大读者不吝指教,以便进一步修改。

上海市高等专科学校《高等数学》编写组

1984年5月

目 录

(上 册)

前 言

第一章 极限与连续

第一节 函数	1	第五节 极限运算法则.....	31
一 函数的概念	1	习题 1-5	34
二 复合函数	5	第六节 两个重要的极	
三 双曲函数	6	限.....	35
四 分段函数	8	习题 1-6	38
习题 1-1	8	第七节 无穷小的比较.....	39
第二节 数列的极限.....	11	习题 1-7	41
习题 1-2	16	第八节 函数的连续性	
第三节 函数的极限.....	17	与间断点.....	42
一 $x \rightarrow \infty$ 时函数		一 函数的连续性.....	42
的极限.....	17	二 函数的间断点.....	44
二 $x \rightarrow x_0$ 时函数		习题 1-8	48
的极限.....	20	第九节 连续函数的运	
习题 1-3	25	算.....	49
第四节 无穷小与无穷		习题 1-9	51
大.....	26	第十节 闭区间上连续	
一 无穷小.....	26	函数的性质.....	52
二 无穷大.....	29	习题 1-10	53
习题 1-4	30	第一章复习题.....	54

第二章 导数与微分

第一节 导数概念.....57	则.....75
一 函数的变化率	习题 2-2-(1)81
——导数.....57	四 隐函数及参量
二 导数的几何意	方程所确定的
义.....61	函数的求导法.....84
三 求函数的导数	习题 2-2-(2)89
举例.....61	第三节 高阶导数.....90
四 可导与连续的	习题 2-394
关系.....64	第四节 微分.....96
习题 2-167	一 微分概念.....96
第二节 求导法则.....68	二 微分的运算法
一 导数的四则运	则100
算法则.....68	三 微分应用于近
二 复合函数的求	似计算102
导法则.....72	习题 2-4104
三 反函数求导法	第二章复习题106

第三章 中值定理与导数的应用

第一节 中值定理109	第三节 泰勒公式125
习题 3-1114	一 泰勒公式125
第二节 洛必达法则115	二 几个函数的马
一 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定	克劳林公式129
型的极限115	习题 3-3136
二 其它类型未定	第四节 函数的单调性
型的极限120	与极值136
习题 3-2124	一 函数的单调性

及其判别法	136	绘	156
二 函数的极值及		一 垂直渐近线和	
其求法	140	水平渐近线	156
三 最大值与最小		二 函数作图的一	
值	144	般步骤	157
习题 3-4	148	习题 3-6	159
第五节 曲线的凹凸及		第七节 曲率	160
拐点	150	一 曲率概念	160
一 曲线的凹凸及		二 曲率半径、曲	
其判定法	151	率圆	164
二 曲线的拐点及		习题 3-7	165
其求法	152	第八节 方程的近似解	166
习题 3-5	155	习题 3-8	170
第六节 函数图形的描		第三章复习题	171

第四章 不定积分

第一节 原函数与不定		二 第二类换元积	
积分概念	173	分法	187
习题 4-1	175	习题 4-3	193
第二节 基本积分公式		第四节 分部积分法	196
和不定积分的		习题 4-4	202
性质	176	第五节 两种特殊类型	
一 基本积分公式	176	的积分举例	204
二 不定积分的性		一 有理函数的积	
质	177	分举例	204
习题 4-2	180	二 三角函数有理	
第三节 换元积分法	182	式积分举例	211
一 第一类换元积		习题 4-5	214
分法	182	第四章复习题	215

第五章 定 积 分

第一节 定积分概念	218	二 定积分的分部	
一 两个实际问题	218	积分法	241
二 定积分概念	221	习题 5-4	243
习题 5-1	225	第五节 定积分的近似	
第二节 定积分的性质	226	计算	245
习题 5-2	229	习题 5-5	251
第三节 微积分学的基		第六节 广义积分	252
本公式	230	一 无穷区间的广	
习题 5-3	234	义积分	252
第四节 定积分的换元		二 被积函数有无	
积分法和分部		穷间断点的广	
积分法	236	义积分	254
一 定积分的换元		习题 5-6	256
积分法	236	第五章复习题	257

第六章 定积分的应用

第一节 平面图形的面		长	272
积	260	习题 6-3	275
一 在直角坐标系	260	第四节 定积分在物理	
二 在极坐标系	263	方面的应用举	
习题 6-1	266	例	276
第二节 体积	267	一 功	276
一 已知平行截面		二 液体静压力	278
面积求体积	267	三 引力	279
二 旋转体的体积	269	四 转动惯量	282
习题 6-2	271	习题 6-4	284
第三节 平面曲线的弧		第六章复习题	285

第七章 微分方程

第一节 微分方程的基本概念	288	*三 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	312
习题 7-1	291	习题 7-4	313
第二节 可分离变量的一阶微分方程	293	第五节 线性微分方程	314
一 可分离变量的一阶微分方程	293	习题 7-5	318
二 齐次方程	298	第六节 二阶常系数线性齐次微分方程	319
习题 7-2	300	习题 7-6	328
第三节 一阶线性微分方程	302	第七节 二阶常系数线性非齐次微分方程	329
习题 7-3	308	习题 7-7	336
第四节 可降阶的高阶微分方程	309	*第八节 常系数线性微分方程组解法举例	337
一 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	310	习题 7-8	339
二 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	311	第七章复习题	339

附录

附录一	341	附录二 平面常用曲线及其方程	344
1. 希腊字母表	341	附录三 积分表	347
2. 初等数学常用公式	341		

习题答案

第一章 极限与连续

函数、极限都是高等数学中最基本的概念,也是微积分的基础. 在中学数学里,对函数概念及其性质已有较详细的讨论,所以本章将在复习函数概念的基础上,着重介绍函数的极限和连续性.

第一节 函 数

一 函数的概念

客观世界有许多变量,它们之间往往不是孤立的,而是相互依赖、相互制约的. 相互依赖的变量之间的确定关系,在数学上就称为函数关系.

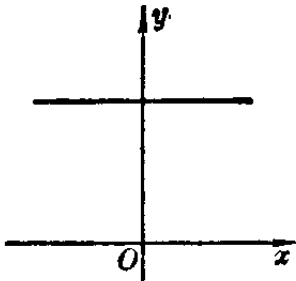
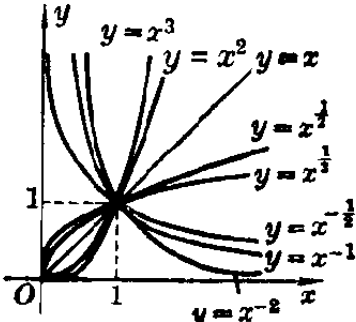
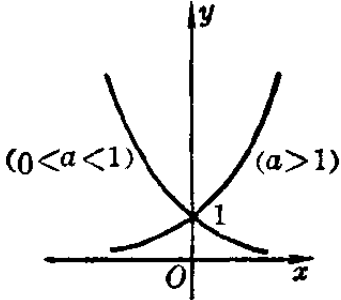
定义 设有两个变量 x 与 y , 如果变量 x 在其变化范围 D 内任取一个确定数值时, 变量 y 按照一定的规律有唯一确定的数值和它对应, 就称变量 y 是变量 x 的函数, 记为 $y=f(x)$, 且称 x 为自变量, y 为因变量. 自变量 x 的变化范围 D 称为函数的定义域.

函数的定义域常用区间来表示, 自变量与因变量的对应规律通常用表格、图象与解析式来表示. 定义域与对应规律是函数关系中的两个要素. 两个函数若具有相同的定义域和对应规律, 则称它们是等同的.

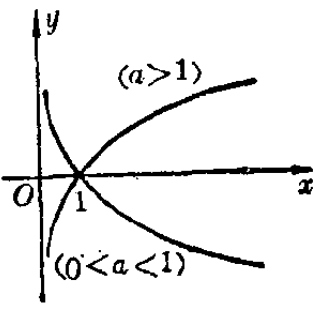
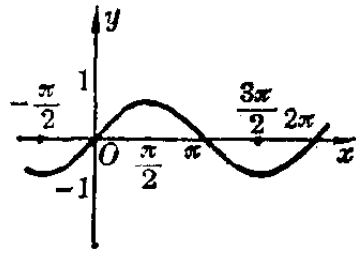
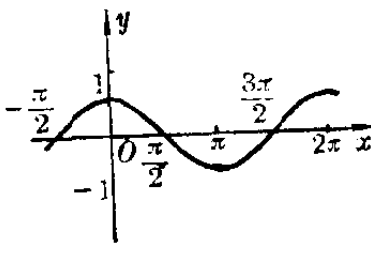
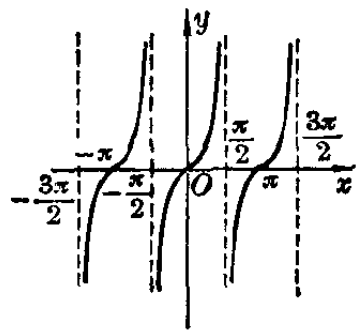
如果自变量取某一数值 x_0 时, 函数 $y=f(x)$ 有确定的值和它对应, 则称函数在 x_0 处有定义, 且记 x_0 处的函数值为

$f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$, 所以, 函数的定义域也就是使函数有定义的 x 值的全体; 而相应的函数值的全体称为函数的值域.

在中学数学里, 对于常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等基本初等函数已作过较详细的介绍. 为了今后学习和查阅方便, 仅将它们的图形和简单性质列表于下:

名 称	表 达 式	定 义 域	图 形	特 性
常 数 函 数	$y=c$	$(-\infty, +\infty)$		
幂 函 数	$y=x^\mu$ ($\mu \neq 0$)	随 μ 而不同, 但在 $(0, +\infty)$ 中都有定义.		经过点(1, 1). 在第一象限内 当 $\mu > 0$ 时, x^μ 为增函数; $\mu < 0$ 时, x^μ 为减函数.
指 数 函 数	$y=a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)	$(-\infty, +\infty)$		图象在 x 轴上方(因 $a^x > 0$), 且都通过点(0, 1). 当 $0 < a < 1$ 时, a^x 是减函数; 当 $a > 1$ 时, a^x 是增函数.

(续表)

名称	表达式	定义域	图 形	特 性
对数函数	$y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)	$(0, +\infty)$		图象在 y 轴右侧 (因 0 与负数都没有对数), 都通过点 $(1, 0)$. 当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a x$ 是减函数; 当 $a > 1$ 时, $\log_a x$ 是增函数.
三角函数	正弦函数 $y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$		是以 2π 为周期的奇函数 (图形关于原点对称). 图形在两直线 $y = 1$ 与 $y = -1$ 之间, 即 $\sin x \leq 1$.
	余弦函数 $y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$		是以 2π 为周期的偶函数 (图形关于 y 轴对称). 图形在两直线 $y = 1$ 与 $y = -1$ 之间, 即 $\cos x \leq 1$.
	正切函数 $y = \operatorname{tg} x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)		是以 π 为周期的奇函数, 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是增函数.

(续表)

名称	表达式	定义域	图 形	特 性
余切函数	$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)		是以 π 为周期的奇函数, 在 $(0, \pi)$ 内是减函数.
反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$	$[-1, 1]$		单调增加的奇函数. 值域: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$
	反余弦函数 $y = \arccos x$	$[-1, 1]$		单调减少. 值域: $0 \leq y \leq \pi.$
	反正切函数 $y = \operatorname{arctg} x$	$(-\infty, +\infty)$		单调增加的奇函数. 值域: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$
	反余切函数 $y = \operatorname{arccotg} x$	$(-\infty, +\infty)$		单调减少. 值域 $0 < y < \pi.$

二 复合函数

在很多实际问题中,两个变量的联系有时不是直接的.例如,质量为 m 的物体,以初速度 v_0 向上抛,则动能 E_k 是速度 v 的函数:

$$E_k = f(v) = \frac{mv^2}{2},$$

而速度 v 是时间 t 的函数(略去空气阻力):

$$v = \varphi(t) = v_0 - gt,$$

其中 g 是重力加速度. 这样, 动能 E_k 可通过变量 v 表示成 t 的函数:

$$E_k = f(v) = f[\varphi(t)] = \frac{m(v_0 - gt)^2}{2}.$$

一般地, 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$, 且 $\varphi(x)$ 的值域包含在 $f(u)$ 的定义域内, 则通过变量 u , y 就是 x 的函数, 记为 $y = f[\varphi(x)]$, 并称它为前两个函数的复合函数, 而变量 u 则称为中间变量.

例 1 设 $y = \sqrt{u}$, 而 $u = 1 + x^2$, 则构成复合函数

$$y = \sqrt{1 + x^2}.$$

必须注意, 复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义域应该是使 $u = \varphi(x)$ 的函数值属于 $y = f(u)$ 的定义域的那些 x 所组成. 因此, 通常只是 $u = \varphi(x)$ 的定义域的一部分.

例 2 设 $y = \arcsin u$, 而 $u = 1 - x^2$, 则构成复合函数

$$y = \arcsin(1 - x^2)$$

的定义域 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 仅是 $u = 1 - x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 的一部分.

复合函数不仅可以由两个函数, 也可以由多个函数相继进行有限次复合而成. 例如, $y = \sin u$, $u = \sqrt{v}$, $v = 1 - x$ 复

合而成的函数为 $y = \sin \sqrt{1-x}$.

研究复合函数的概念, 不仅能将若干个简单的函数复合成一个函数, 还可将较复杂的函数分解为若干个简单的函数, 这对今后实际运算很有用. 例如, $y = \ln(1-x)$ 可以看作由 $y = \ln u$, $u = 1-x$ 复合而成. 又如, 函数 $y = \sqrt[3]{(1+x-x^3)^2}$ 是由函数 $y = u^{\frac{2}{3}}$ 与 $u = 1+x-x^3$ 复合而成的.

凡是由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合步骤所构成的函数统称为初等函数. 上述各例都是初等函数.

三 双曲函数

工程技术中, 有时要用到一种称为双曲函数的初等函数,

其定义为:

双曲正弦函数

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

双曲余弦函数

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

它们的图形如图 1-1 所示. 由双曲函数的定义, 可推出下列公式:

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$

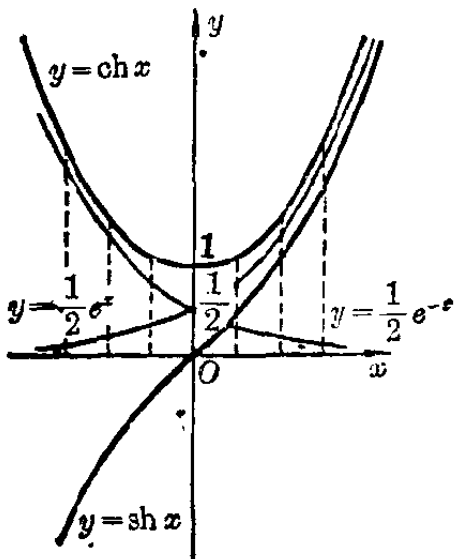


图 1-1

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

以上双曲函数的公式与三角函数的公式相类似，可以通过对比，帮助记忆。

现将两个函数的主要性质列表如下：

名 称	表 达 式	定 义 域	性 质
双曲正弦函数	$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$(-\infty, +\infty)$	奇函数，图形在 I、III 象限，通过原点。 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加。 x 很大时，在第 I 象限内图形接近于 $y = \frac{1}{2} e^x$；在第 III 象限内图形接近于 $y = -\frac{1}{2} e^{-x}$。
双曲余弦函数	$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$(-\infty, +\infty)$	偶函数，图形在 I、II 象限，通过点 $(0, 1)$。 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少；在 $(0, +\infty)$ 内单调增加。 x 很大时，在第 I 象限内图形接近于 $y = \frac{1}{2} e^x$；在第 II 象限内图形接近于 $y = \frac{1}{2} e^{-x}$。

除了上述双曲正弦函数和双曲余弦函数外，有时还用到双曲正切函数和双曲余切函数，它们的定义是：

双曲正切函数

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

双曲余切函数

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

其性质就不再列举了。