积分变换

积分变换

熊大国　编著

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书在微积分学的基础上，以应用为线索，较系统地介绍了傅里叶变换和拉普拉斯变换的基本内容，并且把计算训练和理论内容紧密结合起来．对一些容易使人困惑的问题，如有关δ函数的处理；如何确定初始条件；为什么在$[0-, \infty)$上建立拉普拉斯变换；怎样统一离散频谱和频谱等问题，给出了清楚、准确的解答．

本书可作为工科院校《积分变换》课程的教材，也可供有关工程技术人员参考．凡具有微积分学基础的读者均能自学．

积 分 变 换

熊大国 编著

*

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防科工委印刷厂印刷

*

850×1168毫米 32开本 7.375印张 190千字

1990年5月第一版 1990年5月第一次印刷

ISBN 7－81013－333－0/O·62

印数：1—3000册 定价：3.50元

前　言

本书是作者在讲授工程数学《积分变换》课程的讲义基础上完成的。所追求的目标是：在微积分学的基础上，以应用为线索把傅里叶（Fourier）变换和拉普拉斯（Laplace）变换组成较系统的理论，把理论讲述和计算能力的训练紧密结合起来，培养读者在实践中应用这两类变换的能力。

本书内容符合教育部1980年颁发的高等工业学校《工程数学教学大纲(草案)》“积分变换”部分的要求。积分变换的理论和方法不仅在数学的许多分支中，而且在其它自然科学和各种工程技术领域中均有着广泛的应用。本书结合应用背景展开傅里叶变换和拉普拉斯变换的理论，其中包括从应用角度引进δ函数和在微积分学范围内处理δ函数的方法。书中含有足够多的例题和与之相配合的习题。它们复盖了计算中常见的类型和技巧。

在实际工作中作者发现有一些问题，像如何处理初始条件？为什么要区分$[0-,\infty)$和$[0+,\infty)$上的拉普拉斯变换？如何把离散频谱和频谱归结成统一形式？以及在应用时采用那类变换最佳，往往使部分应用工作者感到困惑；而另外一些问题，像在微积分学范围内介绍δ函数，又使一些数学工作者感到棘手。为此，本书先对原象函数$f(t)$给出上述问题的准确提法和解决方法，然后阐明这些问题在傅里叶变换$F(\omega)$和拉普拉斯变换$F(s)$上的相应提法和解决方法。作者认为，在应用中以时间为自变量的函数有明确的实际意义，而傅里叶变换和拉普拉斯变换的实际意义大都来源于它。

本书由北京科技大学容尔谦教授主审，他提出了许多极为重要的、很有启发性的意见。北京理工大学沈以淡副教授审阅了全

稿，提出了宝贵意见。在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中一定存在不少缺点和不妥之处，期望读者批评指正。

作者于北京理工大学

1989年3月

目　录

绪　论

在学习一门知识时，如果能预先了解这门知识的中心思想，知道那些概念和性质必须透彻了解，那些计算必须运用自如，那么学习将收到事半功倍的效果，学完后，不仅掌握了这门学科的理论，而且了解理论所能运用的范围，以及如何运用理论解答实际问题。

“积分变换”的中心思想是把复杂的、耗费时间的计算简化为简单的、节省时间的计算。

为了理解“数学”是如何完成这项任务的，让我们从大家熟悉的对数说起。十七世纪，航海和天文学积累了大批观测数据，需要对它们进行大量的乘法和除法运算。在当时，这是非常繁重的工作。为了克服这个困难，1614 年 纳皮尔（Napier）发明对数。随后，人们造出以10为底和以 e 为底的对数表。令

$$D=\{x:\ x\text{为正实数}\} \tag{1}$$

$$R=\{X:\ X\text{为实数}\} \tag{2}$$

指数函数 $x=e^X$ 是定义在 R 上取值于 D 的单值函数。对数函数 $X=\ln x$ 是指数函数的反函数，它是定义在 D 上取值于 R 的单值函数。它们建立了 D 和 R 之间的一个一一对应：

$$D\ni x^{①}\overset{x=e^X}{\underset{X=\ln x}{\Longleftarrow\!=\!\Longrightarrow}}X\in R \tag{3}$$

众所周知，对数函数具有性质：

$$\ln(xy)=\ln x+\ln y \tag{4}$$

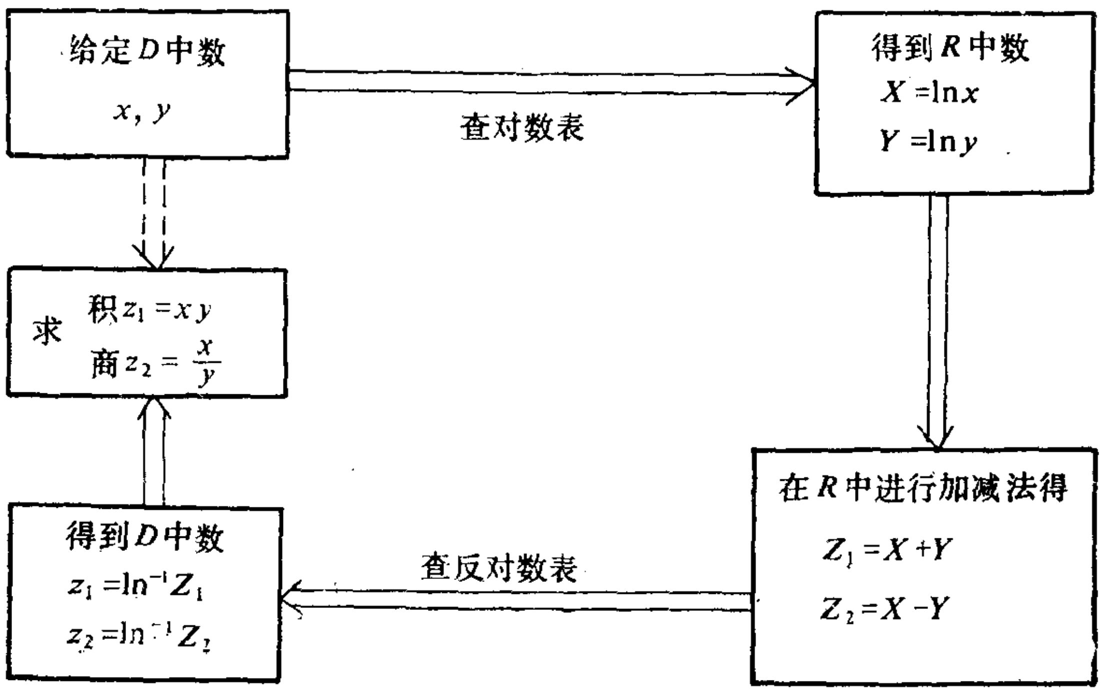
$$\ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y \tag{5}$$

---

① $x\in D$ 表示 x 是 D 中的元，读为 x 属于 D。

应用(1)～(5)简化“D中元的乘、除法运算”的原理可用表1表出。

表1



由此看出，通过查两次对数表就能够把“D中元的乘除法运算”简化为“R中元的加减法运算”。

在本书讨论的两类积分变换的理论中，(1)和(2)被代之为

$$D=\{f(t):\ f(t)\text{ 是具有某种性质的实变量的实值函数}\} \tag{6}$$

$$G=\{F(\omega):\ F(\omega)\text{ 是具有某种性质的实(或复)变量的复值函数}\} \tag{7}$$

代替(3)的相应物是建立D和G之间的一个一一对应T：

$$D\ni f(t)\xLeftarrow[F(\omega)=T[f(t)]]{f(t)=T^{-1}[F(\omega)]}\Rightarrow F(\omega)\in G \tag{8}$$

称T为积分变换，T^{-1}为积分逆变换。称D为积分变换T的原象空间，G为象空间。

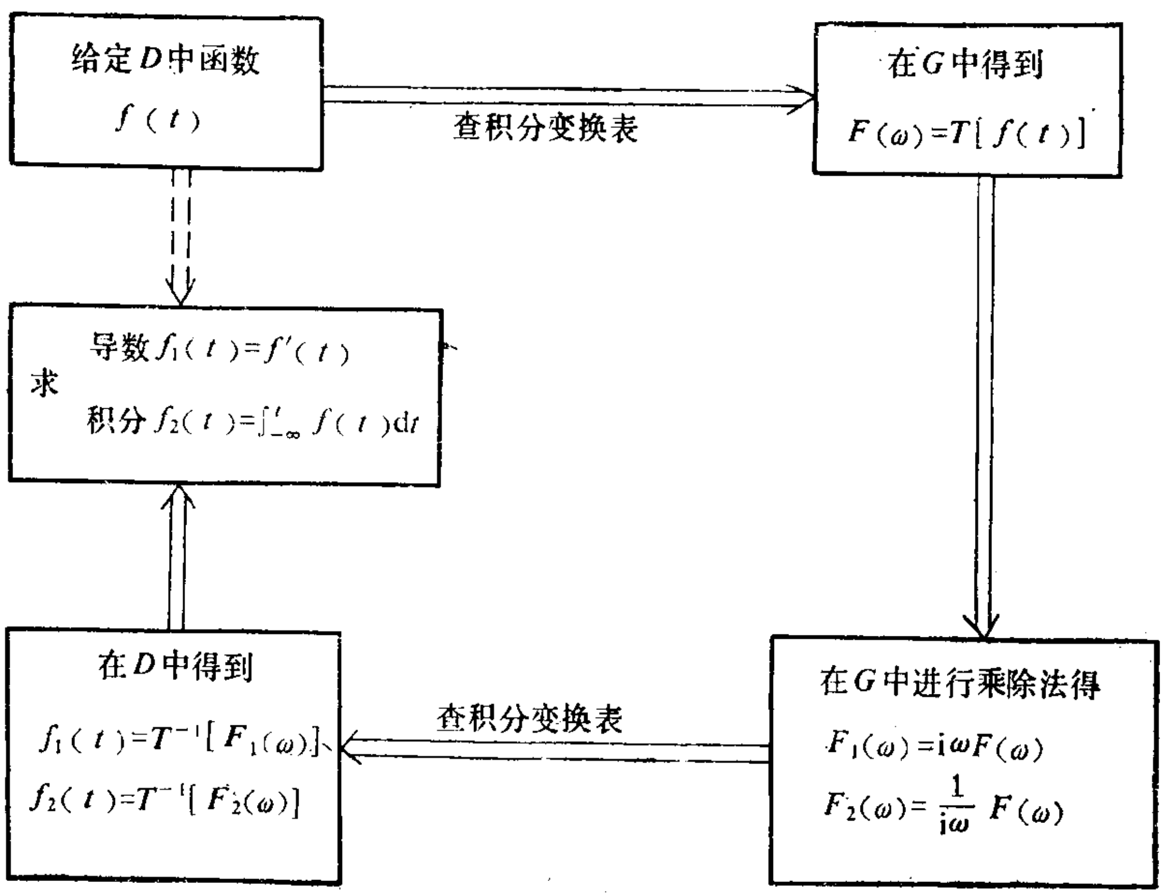
如果能证明T具有性质：

$$T[f'(t)]=\mathrm{i}\omega T[f(t)] \tag{9}$$

$$T\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}T[f(t)] \tag{10}$$

那么用(6)～(10)代替(1)～(5)，通过查两次积分变换表就能够把“D中函数的微积分运算”简化为“G中函数的乘除法运算”。其工作原理可用表 2 表出。

表 2



由上述讨论看出，为掌握积分变换理论需要做四件事情：

(1)建立T和T^{-1}的解析表达式。这是§1.1，§2.1 和§2.5的内容；

(2)尽可能地扩大原象空间D。这是§1.2和§2.2的内容；

(3)获得T和T^{-1}的性质。这是§1.3，§1.4，§2.3 和 §2.4 的内容；

（4）熟练地进行“已知$f(t)$，求$F(\omega)=T[f(t)]$”和“已知$F(\omega)$，求$f(t)=T^{-1}[F(\omega)]$”的计算。这项内容贯穿全书，由例题① 和习题组成。

计算能力的培养是件十分重要的事情。那种认为可以用查“大积分变换表”代替计算训练的想法对初学者是极端有害的。

① 本书较详细地处理了分段函数的四则运算和微积分运算。

第一章　傅里叶变换

§1.1　傅氏变换对的解析表达式

(一)简谐振动和傅里叶级数的复指数形式

最简单的一类运动是简谐振动

$$x(t)=a\cos(\omega t+\alpha) \qquad (-\infty<t<\infty) \qquad (1.1.1)$$

其中ω称为角频率，a称为振幅，$\omega t+\alpha$ 称为周相，α称为初相。又称 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$为周期，$\nu=\dfrac{1}{T}$为普通频率。

考虑复平面上绕原点的匀速圆周运动（图 1.1.1）。设质点A在$t=0$时位于Z_0，角速度为ω。显然质点的运动方程为

$$Z(t)=Z_0e^{i\omega t} \qquad (-\infty<t<\infty) \qquad (1.1.2)$$

记$a=|Z_0|$，$\alpha=\arg Z_0$。应用欧拉（Euler）公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad (1.1.3)$$

可把（1.1.2）写成

$$Z(t)=a[\cos(\omega t+\alpha)+i\sin(\omega t+\alpha)] \qquad (1.1.4)$$

因此，此圆周运动在x轴方向的运动分量恰好是简谐振动（1.1.1）。故称（1.1.2）为复简谐振动。通常也简称为简谐振动。

用（1.1.2）的实部代替（1.1.1）在计算上带来了极大的方便。因为对形如（1.1.2）的函数进行四则运算和微积分运算后取实部，所得结果与对形如（1.1.1）的函数进行同样运算的结果相同。因此够能用对指数函数作比较简单的演算代替对三角函数作比较繁重的演算。

下面导出傅里叶级数的复指数形式。用R表示实数域，$f(t)$

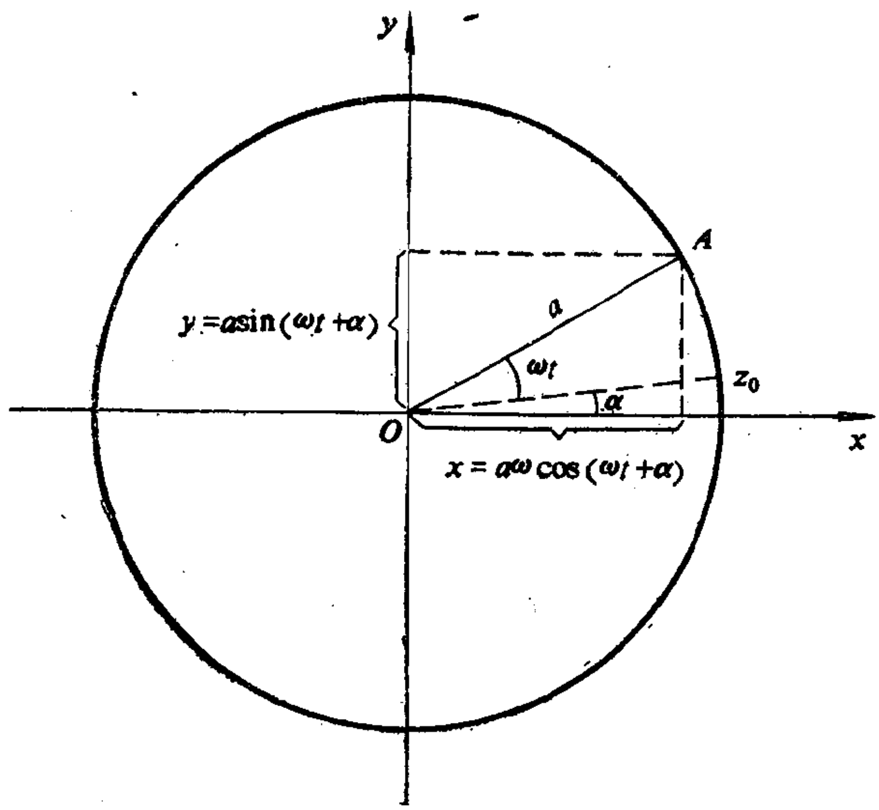


图1.1.1　用匀角速度转动的矢量A的投影表示简谐振动

是R上的实值函数。称$f(t)$在$[a,b]$上满足狄里克莱（Dirichlet）条件，如果它满足条件：

1° $f(t)$在$[a,b]$上或者连续，或者只有有限个第一类间断点；

2° $f(t)$在$[a,b]$上只有有限个极值点。

由傅里叶级数理论得到：如果$f(t)$是以T为周期的实值函数，在$\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$上满足狄里克莱条件。那么在$f(t)$的连续点处成立

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\lambda t+b_n\sin n\lambda t) \qquad (1.1.5)$$

在间断点t_0处，左端应代之为$\frac{1}{2}[f(t_0+)+f(t_0-)]$。其中$\lambda=\frac{2\pi}{T}$，

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\lambda t\,\mathrm{d}t \quad (n=0,1,2,\cdots) \quad (1.1.6)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\lambda t\,\mathrm{d} \quad (n=1,2,3,\cdots) \quad (1.1.7)$$

为了计算上的方便，需要把（1.1.5）中的三角函数转换为指数函数．由欧拉公式导出

$$\cos x=\frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2} \qquad (1.1.8)$$

$$\sin x=\frac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i} \qquad (1.1.9)$$

代入（1.1.5）得到

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{\mathrm{e}^{in\lambda t}+\mathrm{e}^{-in\lambda t}}{2}+b_n\frac{\mathrm{e}^{in\lambda t}-\mathrm{e}^{-in\lambda t}}{2i}\right]$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-ib_n}{2}\mathrm{e}^{in\lambda t}+\frac{a_n+ib_n}{2}\mathrm{e}^{-in\lambda t}\right]$$

如果令

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\lambda t\,\mathrm{d}t-i\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\lambda t\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)[\cos n\lambda t-i\sin n\lambda t]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-in\lambda t}\mathrm{d}t \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{in\lambda t}\mathrm{d}t \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

而它们可合写成一个式子

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\lambda t}\mathrm{d}t \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \quad (1.1.10)$$

我们便得到傅里叶级数的复指数形式

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\lambda t} \quad (1.1.11)$$

(二)周期函数的离散频谱

为了更好地理解关系式(1.1.10)和(1.1.11)，让我们介绍栅状函数的概念.

设$u_n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是实数序列，并且$\cdots\cdots<u_{-2}<u_{-1}<u_0<u_1<u_2<\cdots$，则$I=\{u_n;\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是数轴上的离散集合。如果对每个$u_n$，有一个实数(或复数)$\varphi(u_n)$与之对应，则称

$$\varphi(u_n),\quad u_n\in I$$

为定义在I上的实(或复)栅状函数，并称I为定义域。实栅状函数的图形可绘成图1.1.2. 其中过u_n的线段的另一端点的纵坐标

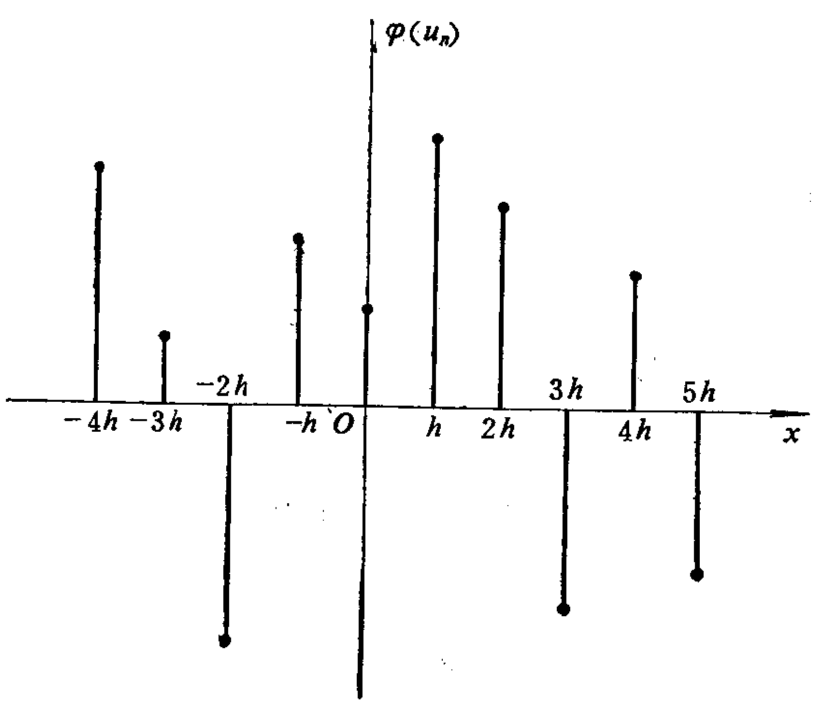


图1.1.2 实栅状函数$\varphi(u_n)$的图形(假定$u_n=nh$)

是函数值$\varphi(u_n)$。

在同一定义域上的栅状函数的四则运算规则和普通函数类似。它们是：

1°数α和栅状函数$\varphi(u_n)$的乘积是栅状函数$\alpha\varphi(u_n)$；

2°定义在I上的两个栅状函数$\varphi(u_n)$和$\psi(u_n)$的和与差$\varphi(u_n)\pm\psi(u_n)$是I上的栅状函数；

3°定义在I上的两个栅状函数$\varphi(u_n)$和$\psi(u_n)$的积$\varphi(u_n)\psi(u_n)$是I上的栅状函数；如果$\psi(u_n)\neq 0$，它们的商$\dfrac{\varphi(u_n)}{\psi(u_n)}$是栅状函数。

本书只涉及一类特殊的实(或复)栅状函数，它们的定义域或者为$I=\{nh: n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，或者为$\bar{I}=\{0,h,2h,3h,\cdots\}$，其中$h$是正常数。

回到（1.1.10）和（1.1.11）的讨论。容易看出c_n是定义在

$$I_\lambda=\{n\lambda: n=0,\pm1,\pm2,\cdots\} \tag{1.1.12}$$

上的复栅状函数。为了更清楚地显示这一情况，我们把c_n改记为$F(n\lambda)$。即在I_λ上有

$$F(n\lambda)=c_n \tag{1.1.13}$$

这样，（1.1.10）和（1.1.11）的结论可以写成

引理1.1.1 设$f(t)$是以T为周期的实值函数，在$\left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]$上满足狄里克莱条件。令$\lambda=\dfrac{2\pi}{T}$，那么存在定义在$I_\lambda$上的复栅状函数$F(n\lambda)$，使得在$f(t)$的连续点处成立

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\lambda)\mathrm{e}^{in\lambda t} \tag{1.1.14}$$

$$F(n\lambda)=\frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-in\lambda t}\mathrm{d}t \tag{1.1.15}$$

在 $f(t)$ 的间断点 t_0 处，(1.1.14) 的左端应代之为 $\frac{1}{2}[f(t_0+)+f(t_0-)]$。

公式 (1.1.14) 在振动理论中可解释成：以 T 为周期的振动 $f(t)$ 是简谐振动 $F(n\lambda)e^{in\lambda t}$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 叠加产生的运动。这些简谐振动的角频率都是 λ 的倍数，称 $\lambda=\frac{2\pi}{T}$ 为基频。角频率为零的简谐振动 $F(0)$ 称为 $f(t)$ 的零频分量；角频率为 $n\lambda$ 的简谐振动

$$\begin{aligned}&F(n\lambda)e^{in\lambda t}+F(-n\lambda)e^{-in\lambda t}\\&=2|F(n\lambda)|\cos[n\lambda t+\arg F(n\lambda)]\end{aligned}\tag{1.1.16}$$

称为 $f(t)$ 的第 n 次谐波。

定义1.1.1 称栅状函数 $F(n\lambda)$ 为周期函数 $f(t)$ 的离散频率谱密度，简称为离散频谱。称 $|F(n\lambda)|$ 为离散幅谱；称 $\arg F(n\lambda)$ 为离散相谱。

(三) 傅 氏 变 换

一般的运动可以视为周期为∞的振动。试问：在什么条件下它也是简谐振动的叠加？可以证明，如果 $f(t)$ 满足如下两个条件：

1° 在任一有限区间上满足狄里克莱条件；

2° $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$

那么回答是肯定的。

设 $f(t)$ 是定义在 R 上的实值函数。引进周期为 T 的函数

$$f_T(t)=f(t-nT)\quad 当 -\frac{T}{2}+nT\leqslant t<\frac{T}{2}+nT$$

$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\tag{1.1.17}$$

(图1.1.3(a), (b))，由引理 1.1.1 推出，存在 I_λ 上的栅状函数